6. ELIPTIČKE JEDNADŽBE 2. REDA

- EGZISTENCIJA, JEDINSTVENOST, REGULARNOST
- PRINCIP MAKSIMUMA
- DVIJE METODE: ENERGETSKA, PRINCIP MAKSIMUMA
- SUSTAVNA ZADAĆA - TREBA ZA KASNIJE

6.1. DEFINICIJE

6.1.1. ELIPTIČKA JEDNADŽBA

$$(*) \quad \begin{cases} Lu = f & u\ U \\ u = 0 & \text{na } \partial U \end{cases}$$

U - OTVOREN, OGRANIČEN

$f : U \to \mathbb{R}$ ZADANA

L - DIFERENCIJALNI OPERATOR 2. REDA

TRAŽI SE: $\quad u : \overline{U} \to \mathbb{R}$

OBLIK ZA L:

(D) DIVERGENTNI OBLIK

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)\, u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\, u_{x_i} + c(x)u$$

$$= \operatorname{div}(A(x)\nabla u) + b(x)\cdot \nabla u + c(x)u$$

ILI

(ND) NEDIVERGENTNI OBLIK

$$Lu = -A(x)\cdot H_u(x) + b(x)\cdot \nabla u(x) + c(x)u$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\, u_{x_i} + c(x)u(x)$$

H_u – HESSEOVA MATRICA OD u (2. PARCIJALNIH DERIVACIJA)

a^{ij}, b^i, c – ZADANE FUNKCIJE (REALNE) KOEFICIJENTI

$\Updownarrow$

A, b, c – ZADANE FUNKCIJE $A: U \to M_n(\mathbb{R})$

$b: U \to \mathbb{R}^n$

$c: U \to \mathbb{R}$

NAP: ~~ZA~~ C^1 KOEFICIJENTE

$$(D) \Longleftrightarrow (ND)$$

NPR: IZ (D):

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \Big(b^i(x) - \sum_{j=1}^{n} a^{ij}_{x_j}(x) \Big) u_{x_i} + c(x) u$$

(ND)

MOŽE I OBRATNO

(D) – ENERGETSKE METODE

(ND) – PRINCIP MAKSIMUMA

PRETPOSTAVKA :

A – SIMETRIČNA $\left(a^{ij} = a^{ji} \right)_{i,j=1,\dots,n}$

DEF: L JE UNIFORMNO ELIPTIČAN AKO $\exists\, \theta > 0$ T.D.

$$A(x)\xi \cdot \xi \geq \theta |\xi|^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ s.s. } x \in U$$

NAP: $A(x) > 0$ s.s. x & KONSTANTA U OCJENI ODOZDO ($\Leftrightarrow$ NAJMANJA SVOJSTVENA VRIJEDNOST) UNIFORMNO > 0

PR: $a^{ij} = \delta_{ij}$, $b^i = 0$, $c = 0$

$$A = I, \quad b = 0, \quad c = 0$$

$$Lu = -\operatorname{div} \nabla u = -\Delta u$$

$$L = -\Delta$$

- PONAŠANJE ELIPTIČKIH JEDNADŽBI SLIČNO $-\Delta$
- NEMAMO FORMULE!

PR. JDBE TIPIČNO OPISUJU RAVNOTEŽU NPR. KONCENTRACIJE TVARI u

1) $A \cdot H_u$ - DIFUZNI ČLAN

$F := -A\nabla u$ - FLUX (DIFUZNI)

L ELIPTIČAN $\Rightarrow F \cdot \nabla u = -A\nabla u \cdot \nabla u \leq 0$

$\Rightarrow F$ "GLEDA" U SMJERU $-\nabla u$

$\Rightarrow$ KONCENTRACIJA OD VIŠE PREMA NIŽOJ

2) $b \cdot \nabla u$ - TRANSPORTNI ČLAN

3) cu - LOKALNO POVEĆANJE/SMANJENJE

NAP: - ~~JDBA~~ LINEARNA
- ! NELINEARNE JDBE PRIRODNO SE JAVLJAJU (MEHANIKA, DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA)

6.1.2. SLABA RJEŠENJA

- PROMATRAMO L OBLIKA (D)

- PRETPOSTAVKA

$$A,\ b,\ c \quad L^{\infty} \text{ FUNKCIJE}$$

$$f \in L^2(U)$$

ZA GLATKO RJEŠENJE

$$\boxed{Lu = f \text{ u } U, \quad u = 0 \text{ na } \partial U}$$

$$Lu = -\text{div}(A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f$$

TEST FUNKCIJA $v \in C_c^{\infty}(U)$

$$\int_U Lu\, v = \int_U f v$$

$$\int_U -\text{div}(A\nabla u)v + b \cdot \nabla u\, v + cuv = \int_U fv,$$

$\uparrow$ P.I.

$$\int_U A\nabla u \cdot \nabla v + b \cdot \nabla u\, v + cuv = \int_U fv$$

NEMA ČLANOVA NA RUBU ZBOG D.R.U.

u RJEŠENJE ZADOVOLJAVA:

$$\Rightarrow \int_U A\nabla u \cdot \nabla v + b \cdot \nabla u\, v + cuv = \int_U fv, \quad v \in C_c^{\infty}(U)$$

NEKA JE $v \in H^1_0(U)$. (DIRICHLETOV R.U. $\Rightarrow$ ULAZI U PROSTOR)

APROKSIMACIJA: $\exists\, v_m \in C^\infty_c(U)$ $\quad v_m \to v \quad H^1_0(U)$

$$\int_U A\nabla u \cdot \nabla v_m + \int_U b\cdot \nabla u\, v_m + \int_U c u\, v_m = \int_U f v_m$$

$$\Big\downarrow \; \nabla v_m \to \nabla v \; L^2 \qquad \Big\downarrow \; v_m \to v \; L^2 \qquad \Big\downarrow \; v_m \to v \; L^2 \qquad \Big\downarrow \; v_m \to v \; L^2$$

$$\int_U A\nabla u \cdot \nabla v + \int_U b\cdot \nabla u\, v + \int_U c u v = \int_U f v$$

$\Rightarrow$ u RJEŠENJE ZADOVOLJAVA:

$$\boxed{\int_U A\nabla u \cdot \nabla v + \int_U b\cdot \nabla u\, v + \int_U c u v = \int_U f v \,, \quad v \in H^1_0(U)}$$

TZV. PROŠIRENJE PO GUSTOĆI.

DEF: (i) $B : H^1_0(U) \times H^1_0(U) \to \mathbb{R}$

$$B[u,v] := \int_U A\nabla u \cdot \nabla v + b\cdot \nabla u\, v + c u v$$

(ii) $u \in H^1_0(U)$ ZOVEMO SLABIM RJEŠENJEM OD $(*)$ AKO

$$B[u,v] = (f, v)_{L^2} \,, \quad v \in H^1_0(U).$$

(VARIJACIJSKA (SLABA) FORMULACIJA OD $(*)$)

MOŽE I MNOGO OPĆENITIJE

$$\begin{cases} Lu = f^0 - \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i} & u\ U \\ u = 0 & na\ \partial U \end{cases}$$

$f^i \in L^2(U)$, $i = 0, \dots, n$

ZAPRAVO JE T.S. $f \in H^{-1}(U)$, $f = f^0 - \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i}$

$$\int_U Lu\, v = {}_{H^{-1}}\langle f, v\rangle_{H^1_0}, \quad v \in H^1_0(U)$$

SLABA FORMULACIJA

NAĆI $u \in H^1_0(U)$:

$$B[u,v] = {}_{H^{-1}}\langle f, v\rangle_{H^1_0}, \quad v \in H^1_0(U)$$

NAP: ŠTO S NEHOMOGENIM DIRICHLETOM?

$$\begin{cases} Lu = f & u\ U \\ u = g & na\ \partial U \end{cases}$$

SLABA FORMULACIJA:

NAĆI $u \in H^1(U)$, $u|_{\partial U} = g$ (U SMISLU TRAGOVA) T.D.

$$B[u,v] = {}_{H^{-1}}\langle f, v\rangle_{H^1_0}, \quad v \in H^1_0(U)$$

ZA TO JE NUŽNO DA JE $g \in T(H^1(U))$ T.J.

$\exists\, w \in H^1(U)$ T.D. $w|_{\partial U} = g$ $(Tw = g)$

DEF: $\tilde{u} = u - w$

$\Rightarrow \tilde{u}|_{\partial U} = u|_{\partial U} - w|_{\partial U} = g - g = 0$

$L\tilde{u} = Lu - Lw = f - Lw =: \tilde{f} \in H^{-1}(U)$

$\Downarrow$

$B[\tilde{u},v] = B[u-w,v] = B[u,v] - B[w,v] = {}_{H^{-1}}\langle f,v\rangle_{H^1_0} - B[w,v]$

$=: {}_{H^{-1}}\langle \tilde{f}, v\rangle_{H^1_0}, \quad v \in H^1_0(U)$

6.2. EGZISTENCIJA SLABOG RJEŠENJA

6.2.1. LAX-MILGRAMOVA LEMA

$(H, \| \ \|)$ - HILBERTOV PROSTOR

$(\ , \ )$ - SKALARNI PRODUKT

$\langle \ , \ \rangle_{H', H}$ - DUALNO SPARIVANJE

TM 1 (LAX-MILGRAM)

NEKA JE $B : H \times H \to \mathbb{R}$ BILINEARNA FORMA KOJA JE OGRANIČENA:

$$\exists \alpha > 0 \qquad |B[u,v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|, \quad u,v \in H$$

I POZITIVNA (ELIPTIČNA, KOERCITIVNA):

$$\exists \beta > 0 \qquad \beta \|u\|^2 \leq B[u,u], \quad u \in H.$$

NEKA JE $f \in H'$ (OGRANIČEN L.F. NA H).

TADA $\exists!$ $u \in H$ T.D.

$$B[u,v] = \langle f, v \rangle, \quad v \in H.$$

DOK: $v \mapsto B[u,v]$ JE OGRANIČEN L.F. NA H.

RIESZ $\Rightarrow$ $\exists\, w \in H$ T.D. $B[u,v] = (w, v)$, $v \in H$

$$u \overset{A}{\longmapsto} w$$

1) A JE LINEARAN

2) A JE OGRANIČEN

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = (w, Au) = B[u, Au] \leq \alpha \|u\| \cancel{\|Au\|}$$

$\Rightarrow$ $\|Au\| \leq \alpha \|u\|$

3) A JE INJEKTIVAN

$$\beta \|u\|^2 \leq B[u,u] = (Au, u) \leq \|Au\| \|u\|$$

$\Rightarrow$ $\beta \|u\| \leq \|Au\|$

4) $R(A)$ JE ZATVOREN

$w_m \in R(A)$, $w_m \longrightarrow \underline{w \in H}$?

$\Rightarrow \exists u_m \in H \quad w_m = Au_m \qquad \|u_m - u_k\| \le \|A(u_m - u_k)\| = \|w_m - w_k\| \to 0$

$\Rightarrow u_m$ JE C-NIZ

$\Rightarrow u_m \longrightarrow u$ u H

$\Rightarrow \underset{w_m}{\overset{\|}{A u_m}} \longrightarrow Au$ u $H \Rightarrow w = Au \Rightarrow w \in H$.

5) $R(A) = H$

PRETP. SUPROTNO: $\exists \underset{0}{\overset{}{w}} \in H$, $w \neq 0$ $\quad w \in R(A)^{\perp}$

$$\Rightarrow (Aw, w) = 0$$

$$\|$$

$$B[w, w] \ge \beta \|w\|^2 \Rightarrow w = 0 \Rightarrow \Leftarrow$$

6) A JE IZOMORFIZAM

7) ZA $f \in H'$ RIESZ $\Rightarrow \exists w \in H$ T.D. $\langle f, v\rangle = (w, v)$, $v \in H$

ZA $w \overset{6)}{\Rightarrow} \exists u \in H \quad Au = w$

$$\underline{\langle f, v\rangle} = (w, v) = (Au, v) = \underline{B[u, v]}, \quad v \in H$$

$\Rightarrow \exists$ RJEŠENJE

8) JEDINSTVENOST

PRETP SUPROTNO & POSTOJE DVA RJ: $u, \tilde{u}$

$$\begin{array}{l} B[u, v] = \langle f, v\rangle, \quad v \in H \\ B[\tilde{u}, v] = \langle f, v\rangle, \quad v \in H \\ \hline B[u - \tilde{u}, v] = 0, \quad v \in H \end{array} \Bigg| -$$

$v = u - \tilde{u} \Rightarrow B[u - \tilde{u}, u - \tilde{u}] = 0$

$$\ge$$

$$\beta \|u - \tilde{u}\|^2 \Rightarrow u = \tilde{u}$$

NAP: AKO JE B SIMETRIČNA B.F.

$$B[u,v] = B[v,u]$$

$\Rightarrow$ B JE EKVIVALENTNI SKALARNI PRODUKT

RIESZ $\Rightarrow$ ZA $f \in H'$ $\exists!$ $u \in H$ T.D.

$$\langle f, v \rangle_{H', H} = B[u,v], \quad v \in H$$

6.2.2. ENERGETSKE OCJENE

$$\begin{cases} Lu = f & u \ U \\ u = 0 & \text{na } \partial U \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{NAĆI } u \in H^1_0(U) \\ B[u,v] = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H^1_0}, \quad v \in H^1_0(U) \end{array}}$$

$$B[u,v] = \int_U A \nabla u \cdot \nabla v + b \cdot \nabla u \, v + c u v$$

TM 2 (ENERGETSKE OCJENE)

$\exists$ $\alpha, \beta > 0$ i $\gamma \geq 0$ T.D.

$$|B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{H^1_0(U)} \|v\|_{H^1_0(U)}, \quad u, v \in H^1_0(U)$$

$$\beta \|u\|^2_{H^1_0(U)} \leq B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)}, \quad u \in H^1_0(U)$$

DOK:

1) $$|B[u,v]| \le \int_U |A(x)|\,|\nabla u|\,|\nabla v| + |b(x)|\,|\nabla u|\,|v| + |c(x)|\,|u|\,|v|$$

$$\le \|\,|A(x)|\,\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|\,|b(x)|\,\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

$$+ \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

$$\le \underbrace{\left(\|\,|A|\,\|_{L^\infty} + \|\,|b|\,\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty} \right)}_{\alpha} \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}$$

2) UNIFORMNA ELIPTIČNOST DAJE:

$$\theta \int_U |\nabla u|^2 \le \int_U A \nabla u \cdot \nabla u$$

$$= B[u,u] - \int_U b \cdot \nabla u\, u + c u^2$$

$$\le B[u,u] + \|\,|b|\,\|_{L^\infty} \underbrace{\|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^2}}_{\substack{\forall \varepsilon > 0 \\ \le\, \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|u\|_{L^2}^2}} + \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}^2$$

$$\le B[u,u] + \varepsilon \|\,|b|\,\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \left(\frac{\|\,|b|\,\|_{L^\infty}}{4\varepsilon} + \|c\|_{L^\infty} \right) \|u\|_{L^2}^2$$

$\Longrightarrow$

$$\left(\theta - \varepsilon \|\,|b|\,\|_{L^\infty} \right) \|\nabla u\|_{L^2}^2 \le B[u,u] + \left(\frac{\|\,|b|\,\|_{L^\infty}}{4\varepsilon} + \|c\|_{L^\infty} \right) \|u\|_{L^2}^2$$

SAD BIRAM ε DOVOLJNO MALI T.D $\ge \frac{\theta}{2}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\theta}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \le B[u,u] + \gamma \|u\|_{L^2}^2$$

$$\ge$$

$$\frac{\theta}{2} \frac{1}{C_P^2} \|u\|_{H_0^1}^2$$

AKO JE $\gamma = 0$ U PRETP. SMO L-M.

($c=0$, $b=0$ JE DOVOLJNO)

$\Rightarrow$ EGZISTENCIJA & JEDINSTVENOST

IMAČE:

TM3 (1. TEOREM EGZISTENCIJE)

$\exists\, \gamma \geq 0$ T.D. $\forall \mu \geq \gamma$ i $f \in L^2(U)$

$\exists!$ SLABO RJEŠENJE $u \in H^1_0(U)$ ~~ZADAĆE~~

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \text{u } U \\ u = 0 & \text{na } \partial U \end{cases}$$

DOK: γ JE A TM2 (2. OCJENA)

DEF: $B_\mu[u,v] = B[u,v] + \mu(u,v)$, $u,v \in H^1_0(U)$

$\Rightarrow B_\mu[u,u] = B[u,u] + \mu(u,u) \geq B[u,u] + \gamma(u,u) \geq \beta \|u\|^2_{H^1_0}$

$\Rightarrow$ U UVJETIMA SMO L-M.

$f \in L^2(U) \quad v \longmapsto \int_U f \cdot v$

$\left| \int_U f \cdot v \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1_0} \Rightarrow$ OGRANIČEN

$\Rightarrow$ EGZ & JED

NAP:

- IDE I ZA $f \in H^{-1}(U)$
- TO ZNAČI DA $L_\mu = L + \mu I$ ZA $\mu \geq \gamma$

  $\forall f \in H^{-1}(U) \ \exists! \ u \in H^1_0(U)$ T.D. $L_\mu u = f$

  $\Rightarrow L_\mu$ JE BIJEKCIJA

  $L_\mu : H^1_0(U) \to H^{-1}(U)$

  IZOMORFIZAM

- $Lu = -\operatorname{div}(A \nabla u) + cu$, $c \geq 0$ ZADOVOLJAVA UVJETE ZA $\gamma = 0$

NAIME:

$u \in H^1_0(U) \Rightarrow L_\mu u \in H^{-1}(U)$

$$\langle L_\mu u , v \rangle_{H^{-1}, H^1_0} := B_\mu [u, v] \leq \alpha \|u\|_{H^1_0} \|v\|_{H^1_0}$$

$\Rightarrow L_\mu u$ JE OGRANIČEN L.F. NA $H^1_0(U)$

$\Rightarrow \in H^{-1}(U)$