5.8. DODATNE TEME

5.8.1. POINCARÉOVE NEJEDNAKOSTI

<u>TM3</u> u 5.6. ZA $W_0^{1,p}$ $p \in [1,n\rangle$ SMO IMALI:

$\exists C > 0 \quad \|u\|_{L^q(U)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)}, \quad u \in W_0^{1,p}(U)$

$q \in [1, p^*]$

<u>NAP:</u>
- ONDA VRIJEDI I ZA $q = p$
- $W_0^{1,p}$ VAŽNO.
- ZA KONSTANTE NE VRIJEDI
- MOŽE SE OSLABITI DO ZAHTJEVA DA JE NEGDJE NA RUBU FUNKCIJA $= 0$ (DOVOLJNO VELIKI SKUP)
- ŠTO AKO SMO NA CIJELOM $W^{1,p}(U)$?

<u>TM1</u> (POINCARÉ)

NEKA JE $U \subseteq \mathbb{R}^n$ OTVOREN, OGRANIČEN, POVEZAN S C^1 RUBOM, $p \in [1,+\infty]$

TADA $\exists C > 0$ (OVISI O n, p, U) T.D.

$$\|u - \fint_U u\|_{L^p(U)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)}, \quad u \in W^{1,p}(U).$$

DOK: PRETPOSTAVIMO SUPROTNO:

$$\forall C>0 \quad \exists u_C \in W^{1,p}(U) \text{ T.D. } \|u_C - \fint_U u_C\|_{L^p(U)} > C\|Du_C\|_{L^p(U)}$$

SMISAO JE C KOLIKO GOD VELIK

ZATO UZMEMO $C = k,\ k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \exists u_k \in W^{1,p}(U) \text{ T.D. } \|u_k - \fint_U u_k\|_{L^p(U)} > k\,\|Du_k\|_{L^p(U)}$$

DEF:

$$v_k := \frac{u_k - \fint_U u_k}{\|u_k - \fint_U u_k\|_{L^p(U)}},\ k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \|v_k\|_{L^p(U)} = 1 \qquad (a)$$

$$\Rightarrow \fint_U v_k = 0 \qquad (b)$$

$$\Rightarrow Dv_k = \frac{Du_k}{\|u_k - \fint_U u_k\|_{L^p(U)}} \Rightarrow \frac{1}{k} > \|Dv_k\|_{L^p(U)} \qquad (c)$$

$$(a)\ \&\ (c) \Rightarrow \|v_k\|_{W^{1,p}(U)} \leq M < \infty$$

OGRANIČEN NIZ U $W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$

$$\underset{\substack{\text{PODNIZ} \\ \text{i } v \in L^p(U)}}{\Rightarrow \exists} \ v_{k_j} \longrightarrow v \quad L^p(U)$$

$$\Downarrow$$

$$\|v_{k_j}\|_{L^p(U)} \longrightarrow \|v\|_{L^p(U)} \overset{(a)}{\Rightarrow} \|v\|_{L^p(U)} = 1$$

$$\fint_U v_{k_j} \longrightarrow \fint_U v \overset{(b)}{\Rightarrow} \fint_U v = 1$$

DO SADA SMO ISKORISTILI SAMO OGRANIČENOST U (C)

NEKA JE $\phi \in C_c^\infty(U)$

$$\int_U u_{k_j} \phi_{x_i}\, dx = -\int_U (u_{k_j})_{x_i} \phi\, dx$$

$$\left| \int_U (u_{k_j})_{x_i} \phi\, dx \right| \le \|(u_{k_j})_{x_i}\|_{L^p(U)} \|\phi\|_{L^q(U)} \le \|Du_{k_j}\|_{L^p(U)} \|\phi\|_{L^q(U)} \to 0$$

$$\left| \int_U u_{k_j} \phi_{x_i}\, dx - \int_U u\, \phi_{x_i}\, dx \right| \le \|u_{k_j} - u\|_{L^p(U)} \|\phi_{x_i}\|_{L^q(U)} \longrightarrow 0$$

$$\int_U u\, \phi_{x_i}\, dx = 0$$

$\Rightarrow$ Du postoji i $Du = 0$ s.s.

$\Rightarrow$ $u \in W^{1,p}(U)$ i $Du = 0$ s.s.

$\Downarrow$

$u = \text{const}$ (ZBOG POVEZANOSTI)

ALI IMAMO $\int_U u = 0 \Rightarrow u = 0 \neq \|u\|_{L^p(U)} = 1$

NAP: KORISTILI SMO (I DOKAZALI)

$$v_k \to v \quad L^p(U) \Rightarrow \forall \phi \in C_c^\infty(U) \quad \int_U v_k \phi \to \int_U v \phi$$

ZAPRAVO SMO MOGLI POKAZATI I (ISTI DOKAZ)

$$\forall \phi \in L^q(U) \quad \int_U v_k \phi \to \int_U v \phi$$

SLABA KONVERGENCIJA U $L^p(U)$

DEF:

NEKA JE X REALAN BANACHOV PROSTOR.
NIZ $(v_k)_k \subset X$ KONVERGIRA SLABO K $v \in X$
I PIŠEMO

$$v_k \rightharpoonup v \quad u \ X$$

AKO

$$\forall v^* \in X^* \quad \langle v^*, v_k \rangle \to \langle v^*, v \rangle$$

(X^* JE SKUP NEPREKIDNIH (OGRANIČENIH) L.F. NA X).

TV: $v_k \to v$ u X $\Rightarrow$ $v_k \rightharpoonup v$ u X

DOK:

$$|\langle v^*, v_k \rangle - \langle v^*, v \rangle| = |\langle v^*, v_k - v \rangle| \le \|v^*\| \, \|v_k - v\| \to 0$$

MOŽE SE POKAZATI:

1) SVAKI SLABO KONV. NIZ JE OGRANIČEN

2) AKO $v_k \rightharpoonup v \Rightarrow \|v\| \le \liminf_k \|v_k\|$

TM (SLABA KOMPAKTNOST) (B-A-B)

NEKA JE X REFLEKSIVAN BANACHOV PROSTOR I $(v_k)_k \subset X$ OGRANIČEN. TADA $\exists$ PODNIZ $(v_{k_j})_j \subset X$ I $v \in X$ T.D.

$$v_{k_j} \rightharpoonup v$$

NAP: - OGRANIČENI NIZOVI U R.B.P. SU SLABO PREDKOMPAKTNI

- VAŽAN PRIMJER $L^p(U)$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$ REFLEKSIVNI

$L^q(U)$ DUAL $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

OGRANIČEN NIZ $(u_k)_k \subset L^p(U)$ IMA SLABO KONV. PODNIZ

$\exists (u_{k_j})_j \quad u_{k_j} \rightharpoonup u \quad L^p(U)$

- TA KONV. NE POVLAČI TOČKOVNU NI S.S. KONV.

NAP: DOKAZ POINCAREA: $\underset{(a)}{\|v_k\|_{L^p(U)} = 1}$, $\underset{(b)}{\int_U v_k = 0}$, $\underset{(c)}{\|Dv_k\|_{L^p(U)} \to 0}$

$(a) \;\&\; (c) \Rightarrow \|v_k\|_{W^{1,p}(U)} \leq M < \infty$

$\Rightarrow \exists (v_{k_j})_j$ i $v \in W^{1,p}(U)$ $\quad v_{k_j} \rightharpoonup v \quad W^{1,p}(U)$

& KAO I PRIJE $v_{k_j} \to v \quad L^p(U)$

$\Downarrow$

$Dv_{k_j} \rightharpoonup Dv \quad L^p(U)$

$(c) \Rightarrow Dv_{k_j} \to 0 \quad L^p(U)$

$Dv = 0$ s.s.

$\Downarrow$

$v = \text{const}$

$\|v\|_{L^p(U)} = 1$, $\int_U v = 0$

$v = 0$

TH2 (POINCARE ZA KUGLU)

NEKA JE $p \in [1,+\infty]$. TADA $\exists C>0$ T.D.

$$\| u - \fint_{B(x,r)} u \|_{L^p(B(x,r))} \leq C r \| Du \|_{L^p(B(x,r))}$$

ZA SVE $B(x,r)$, $u \in W^{1,p}(B(x,r))$

DOK: 1) ZA $B(0,1)$ IZ TH1.

2) ZA $B(x,r)$ DEF: $\quad v(y) := u(x+ry)$, $y \in B(0,1)$

$$1) \Rightarrow \quad \| v - \fint_{B(0,1)} v \|_{L^p(B(0,1))} \leq C \| Dv \|_{L^p(B(0,1))}$$

ZAMJENA VARIJABLI

$$\| u - \fint_{B(x,r)} u \|_{L^p(B(x,r))} = \left(\int_{B(x,r)} \left(u(z) - \fint_{B(x,r)} u(s)\,ds \right)^p dz \right)^{1/p}$$

$$= \left| z = x + ry \right| = \left(\int_{B(0,1)} \left(v(y) - \fint_{B(0,1)} v(s)\,ds \right)^p r^n \right)^{1/p}$$

$$= r^{\frac{n}{p}} \| v - \fint_{B(0,1)} v \|_{L^p(B(0,1))} \leq r^{\frac{n}{p}} C \| Dv \|_{L^p(B(0,1))}$$

$\uparrow$ VRATIM ZAMJENU

...

5.8.2. PODIJELJENE RAZLIKE

ZANIMA NAS ODNOS PODIJELJENIH RAZLIKA I DERIVACIJA

NEKA JE $u : U \to \mathbb{R}$, $V \subset\subset U$

DEF: (i) $D_i^h u(x) = \dfrac{u(x+he_i) - u(x)}{h}$, $i = 1, \dots, n$

$x \in V$, $h \in \mathbb{R}$, $0 < |h| < d(V, \partial U)$

(ii) $D^h u = (D_1^h u, \dots, D_n^h u)$

TM 3 (i) NEKA JE $p \in [1, +\infty)$ I $u \in W^{1,p}(U)$.

TADA $\forall V \subset\subset U$ $\exists C > 0$ $\forall h$, $0 < |h| < \frac{1}{2} d(V, \partial U)$

$$\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)}.$$

(ii) NEKA JE $p \in \langle 1, +\infty \rangle$, $u \in L^p(V)$ I $\exists C > 0$ T.D.

$$\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C, \quad \forall h \quad 0 < |h| < \tfrac{1}{2} d(V, \partial U).$$

TADA JE

$$u \in W^{1,p}(V) \quad \text{i} \quad \|Du\|_{L^p(V)} \leq C.$$

DOK: (i) u GLATKA. N-L

$$u(x+he_i) - u(x) = \int_0^1 \underbrace{u_{x_j}(x+the_i)\,h\,e_j}_{\frac{d}{dt}(u(x+the_i))}\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{|u(x+he_i) - u(x)|}{|h|} \leq \left| \int_0^1 |Du(x+the_i)|\, dt \right|^p \int_V$$

...

PROŠIRIM OCJENU NA $W^{1,p}$ PO GUSTOĆI

(ii) PRETP:

$$\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C \quad \forall h \quad 0<|h|\leq \frac{1}{2} d(V, \partial U)$$

NEKA JE $\phi \in C_c^\infty(V)$: VRIJEDI :

$$\int_V u(x)\left[\frac{\phi(x+he_i) - \phi(x)}{h}\right] dx = -\int_V \frac{u(x) - u(x-he_i)}{h} \phi(x)\, dx$$

ZAMJENA VARIJABLI

$$\Rightarrow \int_V u D_i^h \phi \, dx = -\int_V D_i^{-h} u \, \phi \, dx$$

(FORMULA P. I. ZA PODIJELJENE RAZLIKE)

$$\sup_h \|D_i^{-h} u\|_{L^p(V)} < \infty$$

OGRANIČENA FAMILIJA U $L^p(V)$

$\Rightarrow \exists$ PODNIZ h_k ~~...~~ I $v_i \in L^p(V)$ T.D.

$$D_i^{-h_k} u \rightharpoonup v_i \quad u \quad L^p(V), \quad i=1,\dots,n.$$

$$\int_V u D_i^h \phi \, dx = -\int_V D_i^{-h} u \, \phi \, dx$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_V u \, \phi_{x_i} dx = -\int_V v_i \, \phi \, dx$$

$\Rightarrow \exists$ SLABA DERIVACIJA $u_{x_i} = v_i \in L^p(V) \Rightarrow Du \in L^p(V)$

$\Rightarrow u \in W^{1,p}(V)$

OCJENA TAKOĐER LAGANO IZ SVOJSTAVA SL. KONV.

TM4 (KARAKTERIZACIJA $W^{1,\infty}$)

NEKA JE $U \subseteq \mathbb{R}^n$ OTVOREN, OGRANIČEN, S C^1 RUBOM.
TADA JE

$$u \in U \to \mathbb{R} \quad \text{LIPSCHITZOVA}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$u \in W^{1,\infty}(U)$$

NAP: MOŽE SE PROŠIRITI: u LOKALNO LIPSCHITZOVA $\Leftrightarrow$ $u \in W^{1,\infty}_{loc}(U)$

DOK: 1. KORAK: NEKA JE $U = \mathbb{R}^n$ i u IMA KOMPAKTAN NOSAČ.

$\boxed{\Leftarrow}$ $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. DEF: $u^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$

$\Rightarrow$ $u^\varepsilon \to u$ u $L^\infty(U)$

$\Rightarrow$ $\|Du^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ | SVOJSTVO IZGLAĐIVANJA

ZA $x, y \in \mathbb{R}^n$ $x \neq y$

N-L $$u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[u^\varepsilon(tx + (1-t)y)\right] dt$$

$$= \int_0^1 \underbrace{Du^\varepsilon(tx + (1-t)y)}_{\leq \|Du^\varepsilon\|_{L^\infty}}(x-y)\, dt$$

$\Rightarrow$ $|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| \leq \|Du^\varepsilon\|_{L^\infty} \|x-y\| \leq \|Du\|_{L^\infty} \|x-y\|$

PUSTIM $\varepsilon \to 0$ &

$\Rightarrow$ $|u(x) - u(y)| \leq \|Du\|_{L^\infty} \|x-y\|$

$\Rightarrow$ u JE LIPSCHITZOVA.

Lip(u)

2. KORAK: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ OGRANIČEN, OTVOREN, S C^1 RUBOM

$\boxed{\Leftarrow}$ $u \in W^{1,\infty}(U) \Rightarrow \bar{u} = Eu \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \bar{u}$ LIPSCHITZOVA NA $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow u$ LIPSCHITZOVA NA U

$\boxed{\Longrightarrow}$ NEKA JE u LIPSCHITZOVA NA U

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $|u(x) - u(y)| \leq \mathrm{Lip}(u)\, |x-y|$

u S KOMPAKTNIM NOSAČEM $\Rightarrow$ $u \in L^\infty(U)$.

$Du \in L^\infty(U)$?

~~$\|D_i^{-h} u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$~~ NEKA JE $x \in U$ (OTVOREN)

ZA h DOVOLJNO MALI

$$|D_i^{-h} u(x)| = \left| \frac{u(x - he_i) - u(x)}{h} \right|$$

$$\leq \frac{\mathrm{Lip}(u)\, |he_i|}{|h|} = \mathrm{Lip}(u)$$

$\Rightarrow$ $\|D_i^{-h} u\|_{L^\infty(V)} \leq \mathrm{Lip}(u) \Rightarrow \|D_i^{-h} u\|_{L^p(V)} \leq C\,\mathrm{Lip}(u)$

u IMA KOMPAKTAN NOSAČ U V & TM3 (ii)

$\Rightarrow$ $u \in W^{1,p}(V)$ $\forall p \in [1, +\infty)$

NISMO NAPRAVILI SLUČAJ $p = \infty$

$$\|D_i^{-h} u\|_{L^\infty(V)} < \infty$$

L^∞ NIJE REFLEKSIVAN

B-A-B $\Rightarrow$ $D_i^{-h_k} u \xrightarrow{*} v$ $L^\infty(V)$, $v \in L^\infty(V)$

TO ZNAČI

$$\int_V D_i^{-h_k} u\, \phi \longrightarrow \int_V v\, \phi, \quad \phi \in L^1(V)$$

~~NE~~ NA DUALU

ISTI RAČUN KAO ~~ZA~~ TM3 (ii)

$\Rightarrow$ $v_i = u_{x_i}$ $\Rightarrow$ $Du \in L^\infty(V)$.

~~2. KORAK ZA $U \subset \mathbb{R}^n$ PROSIZENO~~ $\Rightarrow$ $u \in W^{1,\infty}(V)$

$\Rightarrow$ $u \in W^{1,\infty}(U)$.

TM 5 (DIFERENCIJABILNOST S.S.)

NEKA JE $p \in \langle n, +\infty]$ I $u \in W^{1,p}_{loc}(U)$.

TADA JE u DIFERENCIJABILNA (JAKO) S.S,

A DIFERENCIJAL (JAKI) JEDNAK JE SLABOM D. S.S.

TM 6 (RADEMACHEROV TEOREM)

NEKA JE u LOKALNO LIPSCHITZOVA NA U.

TADA JE u DIFERENCIJABILNA S.S. U U.

NAP: SPOMINJALI SMO KARAKTERIZACIJU H^k PROSTORA KORIŠTENJEM FOURIEROVE TRANSFORMACIJE

TM 7: NEKA JE $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(i) $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ JE U $H^k(\mathbb{R}^n) \iff (1+|y|^k)\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$

(ii) NADALJE, $\exists\, C>0$ T.D. $\forall\, u \in H^k(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{1}{C}\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq \|(1+|y|^k)\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}$$

NAP: OVAJ PRISTUP OMOGUĆAVA I DEFINIRANJE $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s>0$

DEF: NEKA JE $s \in \langle 0, +\infty\rangle$, $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
TADA JE $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ AKO JE $(1+|y|^s)\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
ZA $s \notin \mathbb{N}$ DEF.

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \|(1+|y|^s)\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$