Metrički prostori

1 Metrički i topološki prostori

Definicija 1.1. **Metrika** ili **udaljenost** na skupu X je svako preslikavanje $d : X \times X \to \mathbb{R}$, za koje vrijedi:

(M1) $d(x, y) \geqslant 0$,

(M2) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$,

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetrija),

(M4) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (nejednakost trokuta).

Metrički prostor je par (X, d) skupa X i metrike d na X.

U svakom metričkom prostoru (X, d) vrijedi **nejednakost mnogokuta**

$$d(x_0, x_n) \leqslant d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n), \ x_0, x_1, \ldots, x_n \in X, \tag{1.1}$$

koja poopćuje (M4) i dokazuje se indukcijom po n.

Također vrijedi nejednakost

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leqslant d(x, x') + d(y, y'), \ x, x', y, y' \in X. \tag{1.2}$$

Zaista, prema (1.1) vrijedi

$$d(x, y) \leqslant d(x, x') + d(x', y') + d(y', y)$$

pa zbog (M3) vrijedi

$$d(x,y) - d(x',y') \leqslant d(x,x') + d(y,y').$$

Zamijenimo li x, y sa x', y' dobivamo

$$d(x',y') \leqslant d(x',x) + d(x,y) + d(y,y')$$

pa opet zbog (M3) vrijedi

$$d(x',y') - d(x,y) \leqslant d(x,x') + d(y,y'),$$

što dokazuje nejednakost (1.2).

Primjeri.

1. n**-dimenzionalan euklidski prostor** $(\mathbb{R}^n, d_2)$, gdje je
$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)^2},$$
$x = (x^1, \ldots, x^n), y = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n$, **euklidska metrika**.

2. $(\mathbb{R}^n, d_1)$, gdje je $d_1(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x^i - y^i|$.

3. $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$, gdje je $d_\infty(x,y) = \max\{|x^i - y^i| : i = 1, \ldots, n\}$.

4. Na proizvoljnom skupu X možemo definirati metriku d formulom
$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$
Metriku d zovemo **diskretna metrika**, a prostor (X,d) **diskretni prostor**.

5. Prostor $B(T)$ svih omeđenih realnih funkcija $x : T \to \mathbb{R}$ definiranih na proizvoljnom skupu T s metrikom $d(x,y) = \sup\{|x(t) - y(t)| : t \in T\}$. Za $T = \mathbb{N}$ imamo prostor $B(\mathbb{N})$ svih omeđenih realnih nizova, a za $T = \{1, \ldots, n\}$ prostor $B(1, \ldots, n) = (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ (primjer 3).

6. Neka je (X, d) metrički prostor, $Y \subseteq X$ i $d_Y = d|_{Y \times Y}$. Tada je (Y, d_Y) metrički prostor. Kažemo da je (Y, d_Y) **potprostor** prostora (X, d).

U metričkom prostoru (X, d) definira se **udaljenost točke** $x_0 \in X$ **od podskupa** $A \subseteq X$ formulom

$$d(x_0, A) = \inf\{d(x_0, a) : a \in A\}.$$

Skup $\{d(x_0, a) : a \in A\}$ omeđen je odozdo, jer je $d(x_0, a) \geqslant 0$ za svaki $a \in A$. Zato za svaki $A \neq \varnothing$ infimum postoji pa je $d(x_0, A)$ posve određen realan broj i vrijedi $d(x_0, A) \geqslant 0$.

Primijetimo da iz $x_0 \in A$ slijedi $d(x_0, A) = 0$. Obrnuto ne vrijedi: npr. za $X = \mathbb{R}$ i $A = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ vrijedi $d(0, \mathbb{R}^+) = 0$, ali $0 \notin \mathbb{R}^+$.

Za $x, y \in X$ i $A \subseteq X$ vrijedi nejednakost

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y). \tag{1.3}$$

Zaista, za svaki $a \in A$ vrijedi

$$d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a)$$

pa zato vrijedi

$$d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, a).$$

Budući da to vrijedi za svaki $a \in A$, zaključujemo da vrijedi

$$d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, A),$$

odnosno

$$d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y).$$

Zamjenom x i y i primjenom (M3) dobivamo

$$d(y, A) - d(x, A) \leqslant d(x, y),$$

što dokazuje (1.3).

U metričkom prostoru (X, d) definira se također **udaljenost između dva podskupa** $A, B \subseteq X$ formulom

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Očito je $d(A, B) \geqslant 0$. Nadalje, iz $A \cap B \neq \emptyset$ slijedi $d(A, B) = 0$. Obrnuto, iz $d(A, B) = 0$ ne mora slijediti $A \cap B \neq \emptyset$, kao što npr. pokazuju skupovi $\mathbb{R}^+$ i $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$.

Kaže se da je skup A iz metričkog prostora (X, d) **omeđen** ako je skup $\{d(a, a') : a, a' \in A\}$ omeđen u prostoru $\mathbb{R}$.

Za preslikavanje $f : T \to X$ skupa T u metrički prostor (X, d) kaže se da je **omeđeno** ako je $f(T) \subseteq X$ omeđen skup. Posljedično, za $T = \mathbb{N}$ omeđeno preslikavanje $f : \mathbb{N} \to X$ je **omeđen niz**.

Ako je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq X$ omeđen, onda postoji realan broj

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(a, a') : a, a' \in A\},$$

koji se zove **dijametar skupa** A. Ako je A neomeđen, definira se $\operatorname{diam}(A) = \infty$.

Pokazat ćemo da vrijedi formula

$$\operatorname{diam}(A \cup B) \leqslant \operatorname{diam}(A) + d(A, B) + \operatorname{diam}(B). \tag{1.4}$$

Pretpostavimo prvo da su $a \in A$ i $b \in B$. Po definiciji udaljenosti $d(A, B)$, za svaki $\varepsilon > 0$, postoje točke $a_\varepsilon \in A$ i $b_\varepsilon \in B$ takve da je

$$d(a_\varepsilon, b_\varepsilon) < d(A, B) + \varepsilon.$$

Zato za $a \in A$, $b \in B$ i svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$d(a, b) \leqslant d(a, a_\varepsilon) + d(a_\varepsilon, b_\varepsilon) + d(b_\varepsilon, b) \leqslant \operatorname{diam}(A) + d(A, B) + \operatorname{diam}(B) + \varepsilon$$

pa je i

$$d(a, b) \leqslant \operatorname{diam}(A) + d(A, B) + \operatorname{diam}(B).$$

Primijetimo sada da gornja nejednakost očigledno vrijedi i u slučaju $a, b \in A$ i u slučaju $a, b \in B$, što dokazuje nejednakost (1.4).

Iz formule (1.4) lako zaključujemo da je unija od konačno omeđenih skupova omeđen skup.

Definicija 1.2. Familija $\mathcal{S} = (S_\alpha : \alpha \in A)$ podskupova S_α skupa X zove se **pokrivač** skupa $Y \subseteq X$ ako je $Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$. Ako je $\mathcal{S}$ pokrivač od X onda je $X = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$. Pokrivač $\mathcal{S}$ je **konačan** ako je skup A konačan, a **prebrojiv** ako je A prebrojiv.

Definicija 1.3. Metrički prostor (X, d) je **potpuno omeđen** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan pokrivač od X čiji su elementi dijametra manjeg od ε. Podskup $A \subseteq X$ potpuno je omeđen ako je A, shvaćen kao potprostor od (X, d), potpuno omeđen.

Svaki podskup potpuno omeđenog prostora i sam je potpuno omeđen.

Ako je (X, d) potpuno omeđen prostor, onda je (X, d) i omeđen, što je posljedica formule (1.4). Obrat općenito ne vrijedi, tj. omeđen prostor ne mora biti i potpuno omeđen. Npr. ako je (X, d) beskonačan diskretan prostor, tada je $d(x, y) \leqslant 1$ za svaki $x, y \in X$ pa je $\operatorname{diam}(X) = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\} \leqslant 1$. Međutim, za $\varepsilon = 1$ ne postoji konačan pokrivač od X čiji su članovi dijametra < 1.

Ako je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ podskup euklidskog prostora, onda obrat vrijedi, što vidimo iz slijedećeg teorema.

Teorem 1.4. *Svaki omeđeni podskup A euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ potpuno je omeđen.*

Dokaz. Jer je A omeđen i skup $A \cup \{\mathbf{0}\}$, gdje je $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, je omeđen pa postoji realan broj $a = \operatorname{diam}(A \cup \{\mathbf{0}\})$. Označimo sa $I_a = [-a, a] \subset \mathbb{R}$. Za svaki $x = (x^1, \ldots, x^n) \in A$ i za svaki $i = 1, \ldots, n$ vrijedi

$$|x^i| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x^j)^2} = d(x, \mathbf{0}) \leqslant \operatorname{diam}(A \cup \{\mathbf{0}\}) = a$$

pa je $x \in I_a^n$ i posljedično $A \subseteq I_a^n$. Zato je dovoljno dokazati da je za svaki $a > 0$ n-dimenzionalna kocka stranice $2a$ potpuno omeđen skup.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $k > \frac{a\sqrt{n}}{\varepsilon}$. Podijelimo segment $I_a = [-a, a]$ na $2k$ segmenata

$$I(i) = [\frac{a}{k}(i-1), \frac{a}{k}i], \; i = -(k-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, k.$$

Kocke $I(i_1) \times \cdots \times I(i_n)$, $i_j = -(k-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, k$, čine konačan pokrivač od I_a^n i vrijedi

$$\mathrm{diam}(I(i_1) \times \cdots \times I(i_n)) = \frac{a}{k}\sqrt{n} < \varepsilon$$

pa je I_a^n potpuno omeđen skup te je i A potpuno omeđen. $\square$

U svakom metričkom prostoru (X, d) može se definirati **kugla** sa **središtem** u točki $x_0 \in X$ **radijusa** $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, kao skup

$$K(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}.$$

Za $r_1 \leqslant r_2$ vrijedi $K(x_0, r_1) \subseteq K(x_0, r_2)$. No može biti $r_1 < r_2$, a da je ipak $K(x_0, r_1) = K(x_0, r_2)$. Naime, u npr. diskretnom prostoru je $K(x_0, r) = \{x_0\}$ za $r \leqslant 1$ i $K(x_0.r) = X$ za $r > 1$.

Kugla i njezini podskupovi omeđeni su skupovi. Obrnuto, svaki omeđeni skup $A \subseteq X$ sadržan je u nekoj kugli.

Skup $A \subseteq X$ potpuno je omeđen ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji u X konačno kugala radijusa ε čija unija sadrži A.

Važnu klasu podskupova metričkog prostora (X, d) tvore otvoreni skupovi $U \subseteq X$, koje definiramo pomoću kugala.

Definicija 1.5. Skup $U \subseteq X$ iz metričkog prostora (X, d) je **otvoren** ako je unija neke familije kugala prostora (X, d).

Teorem 1.6. *Skup $U \subseteq X$ u metričkom prostoru (X, d) je otvoren ako i samo ako za svaku točku $x_0 \in U$ postoji broj $r > 0$ takav da je $K(x_0, r) \subseteq U$.*

Dokažimo najprije jednu lemu.

Lema 1.7. *Neka je $K(y_0, s)$ kugla u metričkom prostoru (X, d) i neka je $x_0 \in K(y_0, s)$. Tada postoji broj $r > 0$ takav da je $K(x_0, r) \subseteq K(y_0, s)$; takav je npr. broj $r = s - d(y_0, x_0)$.*

Dokaz. Budući da je $x_0 \in K(y_0, s)$, vrijedi $d(y_0, x_0) < s$ pa je $r = s - d(y_0, x_0) > 0$.

Pokažimo sada da za taj r vrijedi $K(x_0, r) \subseteq K(y_0, s)$. Neka je $x \in K(x_0, r)$. Tada je $d(x_0, x) < r = s - d(y_0, x_0)$ pa vrijedi

$$d(y_0, x) \leqslant d(y_0, x_0) + d(x_0, x) < s,$$

odnosno $x \in K(y_0, s)$. Dakle, $K(x_0, r) \subseteq K(y_0, s)$. □

Dokaz teorema 1.6. Pretpostavimo prvo da je skup $U \subseteq X$ otvoren, da je $x_0 \in U$ proizvoljna točka u U i dokažimo da postoji broj $r > 0$ takav da je $K(x_0, r) \subseteq U$.

Zaista, po definiciji otvorenog skupa postoji kugla $K(y_0, s) \subseteq U$ koja sadrži točku x_0, $x_0 \in K(y_0, s)$, a po lemi 1.7 postoji $r > 0$ za koji je $K(x_0, r) \subseteq K(y_0, s) \subseteq U$.

Dokažimo sada obrat. Pretpostavimo da je $U \subseteq X$ skup i da za svaku točku $x \in U$ postoji broj $r_x > 0$ takav da je $K(x, r_x) \subseteq U$ i dokažimo da je U otvoren.

Primijetimo da je

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in U} K(x, r_x).$$

S druge strane, jer je $K(x, r_x) \subseteq U$ za svaki $x \in U$, vrijedi $\bigcup_{x \in U} K(x, r_x) \subseteq U$. Dakle, skup $U = \bigcup_{x \in U} K(x, r_x)$ je unija kugala pa je po definiciji otvoren skup. □

Teorem 1.8. *U metričkom prostoru (X, d) množina $\mathcal{U}$ svih otvorenih skupova $U \subseteq X$ ima slijedeća svojstva:*

(T1) Unija svake familije članova iz $\mathcal{U}$ je clan iz $\mathcal{U}$.

(T2) Presjek konačno članova iz $\mathcal{U}$ je član iz $\mathcal{U}$.

(T3) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$.

Dokaz. (T1) Slijedi direktno iz definicije otvorenog skupa kao proizvoljne unije kugala.

(T2) Dovoljno je dokazati da je presjek dva otvorena skupa opet otvoren skup. Neka su, dakle, $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ otvoreni skupovi. Prema teoremu 1.6 dovoljno je dokazati da za svaku točku $x_0 \in U_1 \cap U_2$ postoji kugla oko x_0 sadržana u $U_1 \cap U_2$. Kako su skupovi U_i otvoreni i $x_o \in U_i$, $i = 1, 2$, po teoremu 1.6 postoje kugle $K(x_0, r_i) \subseteq U_i$, $i = 1, 2$. Zato za $r_0 = \min\{r_1, r_2\} > 0$ vrijedi $K(x_0, r_0) \subseteq U_1 \cap U_2$, što dokazuje tvrdnju.

(T3) Unija prazne familije kugala je prazan skup, a unija svih kugala iz $\mathcal{U}$ je cijeli X pa su $\emptyset$ i X otvoreni skupovi.

□

Familija $\mathcal{U}$ svih otvorenih skupova metričkog prostora (X, d) zove se **topološka struktura** ili **topologija** prostora (X, d).

Teorem 1.8 je povod da se pojam prostora još više poopći.

Definicija 1.9. Topološki prostor je par $(X, \mathcal{U})$ skupa X i množine $\mathcal{U}$ podskupova od X za koju vrijedi (T1), (T2) i (T3). Množina $\mathcal{U}$ se zove **topološka struktura** ili **topologija** prostora $(X, \mathcal{U})$, a njeni članovi **otvoreni skupovi** topološkog prostora $(X, \mathcal{U})$.

Ako je topologiju $\mathcal{U}$ topološkog prostora $(X, \mathcal{U})$ moguće dobiti iz neke metrike d na prije opisan način, onda kažemo da je topologija $\mathcal{U}$ **metrizabilna**, odnosno da je topološki prostor $(X, \mathcal{U})$ **metrizabilan**.

Ako je iz teksta jasno o kojoj se topologiji $\mathcal{U}$ radi, onda se često umjesto o topološkom prostoru $(X, \mathcal{U})$ kraće govori o topološkom prostoru X. Slično, ako je jasno o kojoj se metrici d radi, onda se često umjesto o metričkom prostoru (X, d) kraće govori o metričkom prostoru X.

Definicija 1.10. Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor. **Baza topologije** $\mathcal{U}$ je množina $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ otvorenih skupova koja ima svojstvo da se svaki otvoreni skup $U \in \mathcal{U}$ može prikazati kao unija neke familije elemenata iz $\mathcal{B}$.

U svakom metričkom prostoru množina svih kugala baza je topologije toga prostora.

Svaka baza $\mathcal{B}$ u topološkom prostoru X ima ova dva svojstva:

(B1) $\mathcal{B}$ je pokrivač za X.

(B2) Ako su $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ i $x_0 \in U_1 \cap U_2$, onda postoji $U \in \mathcal{B}$ takav da je $x_0 \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Zaista, jer je $X \in \mathcal{U}$, X je unija neke familije elemenata iz $\mathcal{B}$ pa je $\mathcal{B}$ pokrivač od X. Također, za $U_1, U_2 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ vrijedi $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ pa je $U_1 \cap U_2$ unija neke familije elemenata iz $\mathcal{B}$. Zato za svaki $x_0 \in U_1 \cap U_2$ postoji neki $U \in \mathcal{B}$ koji sadrži x_0 i koji je sadržan u $U_1 \cap U_2$.

Teorem 1.11. *Neka je X proizvoljan skup i $\mathcal{B}$ množina podskupova od X sa svojstvima (B1) i (B2). Tada postoji jedna jedina topologija $\mathcal{U}$ na X takva da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{U}$. Elementi topologije $\mathcal{U}$ su svi podskupovi od X koji su unije familija elemenata iz $\mathcal{B}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ množina čiji su elementi unije svih familija elemenata iz $\mathcal{B}$. Iz toga direktno slijedi (T1) i $\emptyset \in \mathcal{U}$, a iz (B1) slijedi $X \in \mathcal{U}$, što dokazuje (T3).

Dokažimo (T2). Neka su $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ i $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Tada postoje $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ takvi da je $x_0 \in V_i \subseteq U_i$, $i = 1, 2$. Po (B2) postoji $V \in \mathcal{B}$ takav da je

$$x_0 \in V \subseteq V_1 \cap V_2 \subseteq U_1 \cap U_2$$

pa se skup $U_1 \cap U_2$ može prikazati kao unija određene familije skupova $V \in \mathcal{B}$, odnosno $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$.

Da je $\mathcal{U}$ jedina topologija s bazom $\mathcal{B}$ slijedi direktno iz definicije baze topologije. $\square$

Topologija $\mathcal{U}$ na nekom skupu X najčešće se zadaje pomoću baze topologije tako da se zada neka množina $\mathcal{B}$ podskupova od X, koja zadovoljava uvjete (B1) i (B2).

Definicija 1.12. Neka su $(X,\mathcal{U})$, $(Y,\mathcal{V})$ topološki prostori i $f : X \to Y$ neko preslikavanje. Kažemo da je f **homeomorfizam** ako su ispunjeni slijedeći uvjeti:

(H1) $f : X \to Y$ je bijekcija,

(H2) $U \in \mathcal{U} \Rightarrow f(U) \in \mathcal{V}$,

(H3) $V \in \mathcal{V} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$.

Kažemo da su prostori X i Y **homeomorfni** ako postoji bar jedan homeomorfizam $f : X \to Y$.

Iz definicije slijedi da je kompozicija homeomorfizama homeomorfizam, da je za homeomorfizam f i f^{-1} homeomorfizam te da je identiteta $1_X : X \to X$ homeomorfizam. Zbog toga je homeomorfizam prostora relacija ekvivalencije, koja klasificira topološke prostore u klase međusobno homeomorfnih prostora. Svako svojstvo prostora koje je zajedničko svim prostorima iz iste klase zove se **topološko svojstvo** ili **topološka invarijanta**.

Definicija 1.13. Neka su d_1 i d_2 dvije metrike na istom skupu X. Kažemo da su metrike d_1 i d_2 **topološki ekvivalentne** ako se topologija $\mathcal{U}_1$ prostora (X, d_1) podudara s topologijom $\mathcal{U}_2$ prostora (X, d_2), $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$.

Primijetimo da je za metričke prostore (X, d_1) i (X, d_2) identiteta 1_X : $X \to X$ homeomorfizam ako i samo ako su metrike d_1 i d_2 topološki ekvivalentne.

Neka su d_1, d_2 dvije metrike na skupu X i neka je sa $K_i(x_0, r)$, $i = 1, 2$, označena kugla $\{x \in X : d_i(x_0, x) < r\}$ oko x_0 radijusa r s obzirom na metriku d_i. Tada vrijedi slijedeći teorem:

Teorem 1.14. *Da bi metrike d_1 i d_2 na skupu X bile topološki ekvivalentne nužno je i dovoljno da svaka kugla $K_1(x_0, r_1)$ oko proizvoljne točke $x_0 \in X$ s obzirom na metriku d_1, sadrži neku kuglu $K_2(x_0, r_2)$ oko x_0 s obzirom na metriku d_2 i obrnuto, tj. da vrijedi*

(i) $(\forall x_0 \in X)(\forall r_1 > 0)(\exists r_2 > 0) K_2(x_0, r_2) \subseteq K_1(x_0, r_1)$,

(ii) $(\forall x_0 \in X)(\forall r_2 > 0)(\exists r_1 > 0) K_1(x_0, r_1) \subseteq K_2(x_0, r_2)$.

Dokaz. □

Neka je (X, d) metrički prostor. Ako je X u metrici d omeđen, tj. ako je $\operatorname{diam} X \in \mathbb{R}$, onda kažemo da je metrika d **omeđena**. Za svaku metriku d na skupu X postoji topološki ekvivalentna metrika d', koja je omeđena. Takva je npr. metrika d' definirana formulom

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \; x, y \in X.$$

Definicija 1.15. Neka si d_1, d_2 dvije metrike na istom skupu X. Kažemo da su metrike d_1 i d_2 **ekvivalentne** (ili **uniformno ekvivalentne**) ako postoje brojevi $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ tako da vrijedi

(i) $(\forall x, y \in X)\; d_1(x, y) \leqslant \mu_1 d_2(x, y)$,

(ii) $(\forall x, y \in X)\; d_2(x, y) \leqslant \mu_2 d_1(x, y)$.

Iz teorema 1.14 slijedi da su svake dvije ekvivalentne metrike i topološki ekvivalentne.

Promatrajmo sada dva metrička prostora (X', d') i (X'', d''). Ima više prirodnih načina da se u direktni produkt $X = X' \times X''$ uvede metrika. Od posebnog su interesa tri metrike d_2, d_∞ i d_1.

Ako je $x = (x', x'')$, $y = (y', y'')$, onda metrike d_2, d_∞ i d_1 definiramo slijedećim formulama:

$$d_2(x,y) = \sqrt{d'(x',y')^2 + d''(x'',y'')^2},$$

$$d_\infty = \max\{d'(x',y'), d''(x'',y'')\},$$

$$d_1(x,y) = d'(x',y') + d''(x'',y'').$$

Aksiomi (M1) - (M4) lako se provjere u sva tri slučaja.

Metrike d_2, d_∞ i d_1 na direktnom produktu $X = X' \times X''$ međusobno su ekvivalentne pa su pogotovo topološki ekvivalentne. To se vidi iz slijedećih nejednakosti koje je lako provjeriti:

$$d_\infty(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant \sqrt{2} d_\infty(x,y),$$

$$d_\infty(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant 2 d_\infty(x,y),$$

$$d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant \sqrt{2} d_2(x,y).$$

Svaka od metrika d_2, d_∞ i d_1 definira, dakle, u direktnom produktu $X = X' \times X''$ istu topologiju $\mathcal{U}$ pa se kaže da je $\mathcal{U}$ **topologija direktnog produkta** $X = X' \times X''$ dvaju metričkih prostora.

U slučaju direktnog produkta $X = X^1 \times \cdots \times X^n$ od n metričkih prostora (X^i, d^i), $i = 1, \ldots, n$, metrike d_2, d_∞ i d_1 definiraju se analogno:

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d^i(x^i,y^i))^2},$$

$$d_\infty = \max\{d^i(x^i,y^i) : i = 1, \ldots, n\},$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d^i(x^i,y^i),$$

gdje su $x = (x^1, \ldots, x^n)$ i $y = (y^1, \ldots, y^n)$. I u ovom slučaju su metrike d_2, d_∞ i d_1 ekvivalentne, jer vrijede nejednakosti

$$d_\infty(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant \sqrt{n} d_\infty(x,y),$$

$$d_\infty(x, y) \leqslant d_1(x, y) \leqslant n d_\infty(x, y),$$

$$d_2(x, y) \leqslant d_1(x, y) \leqslant \sqrt{n} d_2(x, y).$$

Shvatimo li $\mathbb{R}^n$ kao direktni produkt od n primjeraka prostora $\mathbb{R}$, dobivamo na $\mathbb{R}^n$ metrike d_2, d_∞ i d_1 koje smo već vidjeli u primjerima 1, 2 i 3 sa samog početka. Zato vrijedi slijedeći teorem:

Teorem 1.16. *Metrike d_2, d_∞ i d_1 na $\mathbb{R}^n$ su ekvivalentne.*

Pomoću metrike d_∞ lako se dokazuje slijedeći teorem:

Teorem 1.17. *Neka su (X', d'), (X'', d'') dva metrička prostora, a $X' \times X''$ neka je njihov direktni produkt (s metrikama d_2, d_∞ ili d_1). Tada skupovi oblika $U' \times U''$, gdje je U' otvoren skup u X' i U'' otvoren skup u X'', tvore bazu topologije za $X' \times X''$.*

Dokaz. Pomoću metrike d_∞ pokazat ćemo da je skup $U' \times U''$ otvoren u $X' \times X''$, ako je U' otvoren skup u X' i U'' otvoren skup u X''. Zaista, ako je $x_0 = (x_0', x_0'') \in U' \times U''$, tj. $x_0' \in U'$ i $x_0'' \in U''$, onda postoji kugla $K(x_0', r')$ u X' sadržana u U' i kugla $K(x_0'', r'')$ u X'' sadržana u U''. Neka je $r = \min\{r', r''\}$. Za kuglu $K(x_0, r)$ u X u metrici d_∞ vrijedi

$$K(x_0, r) = K(x_0', r) \times K(x_0'', r) \subseteq U' \times U'',$$

što dokazuje tvrdnju te također dokazuje da skupovi $U' \times U''$ tvore bazu topologije prostora $X' \times X''$, jer već kugle $K(x_0, r)$ tvore bazu. □

Ovaj teorem pokazuje kako se definira topologija na direktnom produktu $X' \times X''$ dvaju topoloških prostora $(X', \mathcal{U}')$, $(X'', \mathcal{U}'')$: promatra se množina

$$\mathcal{B} = \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' = \{U' \times U'' : U' \in \mathcal{U}',\ U'' \in \mathcal{U}''\}.$$

Lako se vidi da množina $\mathcal{B}$ ima svojstva (B1) i (B2) iz teorema 1.11. $\mathcal{B}$ je pokrivač od $X' \times X''$, jer je $\mathcal{U}'$ pokrivač od X', a $\mathcal{U}''$ je pokrivač od X''. Pokažimo da vrijedi (B2). Ako je $U_1 = U_1' \times U_1'' \in \mathcal{B}$ i $U_2 = U_2' \times U_2'' \in \mathcal{B}$, onda je $U_1', U_2' \in \mathcal{U}'$ i $U_1'', U_2'' \in \mathcal{U}''$ pa je $U_1' \cap U_2' \in \mathcal{U}'$ i $U_1'' \cap U_2'' \in \mathcal{U}''$. Zato vrijedi

$$U = U_1 \cap U_2 = (U_1' \cap U_2') \times (U_1'' \cap U_2'') \in \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' = \mathcal{B}$$

pa je (B2) ispunjeno. Dakle, na skupu $X' \times X''$ postoji jedna jedina topologija $\mathcal{U}$ kojoj je $\mathcal{B}$ baza.

Primijetiomo da općenito $\mathcal{B}$ nije topologija jer ne ispunjava uvjet (T1).

Definicija 1.18. Neka su $(X',\mathcal{U}')$, $(X'',\mathcal{U}'')$ topološki prostori. Topološki prostor $(X,\mathcal{U})$ koji se sastoji od skupa $X = X' \times X''$ i jedinstvene topologije $\mathcal{U}$ na X kojoj je

$$\mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' = \{U' \times U'' : U' \in \mathcal{U}',\ U'' \in \mathcal{U}''\}$$

baza, zove se **direktni produkt topoloških prostora** X' i X'' i označava se također sa $X' \times X''$.

Teorem 1.17 pokazuje da je topologija direktnog produkta dvaju metrizabilnih prostora metrizabilna i da se može dobiti iz metrika d_2, d_∞ i d_1.

Definicija 1.18 i teorem 1.17 jednostavno se prenose i na direktni produkt od n faktora.

Odnos topologije metričkog prostora (X, d) i topologije njegovih potprostora (Y, d), $Y \subseteq X$, opisan je slijedećim teoremom:

Teorem 1.19. *Neka je (Y, d) potprostor metričkog prostora (X, d). Da bi skup $V \subseteq Y$ bio otvoren u prostoru (Y, d), nužno je i dovoljno da postoji skup $U \subseteq X$ otvoren u prostoru (X, d), za koji je $U \cap Y = V$.*

Dokaz. Nužnost. Neka je $V \subseteq Y$ otvoren skup u Y. Dokazat ćemo da postoji skup $U \subseteq X$ otvoren u X, za koji je $U \cap Y = V$.

Po teoremu 1.6 za svaki $x \in V$ postoji kugla

$$K_Y(x, r_x) = \{y \in Y : d(x, y) < r_x\}$$

u Y takva da je $K_Y(x, r_x) \subseteq V$. Za kuglu $K(x, r_x)$ u X očito vrijedi

$$K(x, r_x) \cap Y = K_Y(x, r_x).$$

Skup $U = \bigcup_{x \in V} K(x, r_x)$ je otvoren skup u X i vrijedi

$$U \cap Y = \bigcup_{x \in V} K_Y(x, r_x) = V.$$

Dovoljnost. Neka je $V \subseteq Y$ i neka postoji skup $U \subseteq X$ otvoren u X za koji je $V = U \cap Y$. Dokazat ćemo da je V otvoren u Y.

Jer je U otvoren u X, za svaki $x \in V \subseteq U$ postoji kugla $K(x, r_x)$ za koju je $x \in K(x, r_x) \subseteq U$ pa vrijedi

$$x \in K(x, r_x) \cap Y \subseteq U \cap Y = V.$$

Zato za svaki $x \in V$ vrijedi $x \in K_Y(x, r_x) \subseteq V$ pa je po teoremu 1.6 skup V otvoren u Y. $\square$

Teorem 1.19 pokazuje kako se definira topologija na podskupu $Y \subseteq X$ proizvoljnog topološkog prostora $(X, \mathcal{U})$: promatra se množina

$$\mathcal{U}_Y = \{Y \cap U : U \in \mathcal{U}\}.$$

Lako se vidi da $\mathcal{U}_Y$ ima svojstva (T1), (T2) i (T3) pa je $\mathcal{U}_Y$ topologija na Y.

Definicija 1.20. Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor i $Y \subseteq X$ podskup od X. Topološki prostor $(Y, \mathcal{U}_Y)$, gdje je

$$\mathcal{U}_Y = \{Y \cap U : U \in \mathcal{U}\},$$

zove se **potprostor** prostora X, a $\mathcal{U}_Y$ **relativna topologija** na Y.

Teorem 1.19 pokazuje da je topologija potprostora Y metrizabilnog prostota X metrizabilna i da je inducirana restrikcijom metrike.

Definicija 1.21. Nutrina ili **interior** $\operatorname{Int} A$ skupa $A \subseteq X$ u prostoru X je unija svih otvorenih skupova $U \subseteq X$ koji su sadržani u A.

$\operatorname{Int} A$ je najveći otvoreni skup u X koji je sadržan u A, tj. $\operatorname{Int} A$ je otvoreni podskup od A koji sadrži svaki otvoreni podskup od A.

Teorem 1.22. *Nutrina podskupova iz prostora X ima slijedeća svojstva:*

(i) $\operatorname{Int} A \subseteq A$,

(ii) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A)) = \operatorname{Int} A$,

(iii) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$,

(iv) $\operatorname{Int} X = X$,

(v) $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{Int} A \subseteq \operatorname{Int} B$,

(vi) *A je otvoren ako i samo ako $A = \operatorname{Int} A$.*

Dokaz. □

Teorem 1.23. *Neka je $A \subseteq X$ podskup metričkog prostora (X, d). Za točku $x_0 \in X$ je $x_0 \in \operatorname{Int} A$ ako i samo ako je udaljenost $d(x_0, X \setminus A) > 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $x_0 \in \operatorname{Int} A$ i dokažimo da je tada $d(x_0, X \setminus A) > 0$.

Kako je $\operatorname{Int} A$ otvoren skup, prema teoremu 1.6 za svaki $x_0 \in \operatorname{Int} A$ postoji $r > 0$ za koji je $K(x_0, r) \subseteq \operatorname{Int} A$. Zato za svaki $x \in X \setminus \operatorname{Int} A$ vrijedi $d(x_0, x) \geqslant r$. To pogotovo vrijedi za svaki $x \in X \setminus A \subseteq X \setminus \operatorname{Int} A$. Iz toga slijedi

$$d(x_0, X \setminus A) = \inf\{d(x_0, x) : x \in X \setminus A\} \geqslant r > 0.$$

Obrat, pretpostavimo da je $x_0 \in X$ takav da vrijedi $d(x_0, X \setminus A) = r > 0$ i dokažimo da je tada $x_0 \in \operatorname{Int} A$.

Iz pretpostavke slijedi da za svaki $y \in X \setminus A$ vrijedi $d(y, x_0) \geqslant r$ pa točka y ne može pripadati kugli $K(x_0, r)$, tj. $(X \setminus A) \cap K(x_0, r) = \emptyset$. Zato vrijedi $K(x_0, r) \subseteq A$ pa je $x_0 \in \operatorname{Int} A$. □

Definicija 1.24. **Okolina** točke $x_0 \in X$ u prostoru X je svaki skup $O \subseteq X$ sa svojstvom da je x_0 sadržan u nutrini od O, $x_0 \in \operatorname{Int} O$.

Teorem 1.25. *Množina $\mathcal{O}(x_0)$ svih okolina točke x_0 prostora X je neprazan skup sa slijedećim svojstvima:*

(O1) $O \in \mathcal{O}(x_0) \Rightarrow x_0 \in O$,

(O2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}(x_0) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}(x_0)$,

(O3) $O \in \mathcal{O}(x_0)$ & $O_1 \supseteq O \Rightarrow O_1 \in \mathcal{O}(x_0)$.

Dokaz. □

Teorem 1.26. *Skup $U \subseteq X$ iz prostora X je otvoren ako i samo ako je okolina svake svoje točke.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je U otvoren skup. Tada je $U = \operatorname{Int} U$ pa je U okolina za svaku točku $x_0 \in U = \operatorname{Int} U$. Obrnuto, pretpostavimo da je za svaku točku $x_0 \in U$, U okolina od x_0. Tada je $x_0 \in \operatorname{Int} U$ pa je $U \subseteq \operatorname{Int} U$ što dokazuje da je U otvoren skup. □

Svaka množina $\mathcal{B}(x_0) \subseteq \mathcal{O}(x_0)$ okolina točke $x_0 \in X$, koja ima svojstvo da za svaki $O \in \mathcal{O}(x_0)$ postoji $B \in \mathcal{B}(x_0)$ takav da je $B \subseteq O$, zove se **baza okolina točke** x_0.

Primjer baze okolona točke x_0 tvore sve otvorene okoline točke x_0, tj. svi otvoreni skupovi iz X, koji sadrže točku x_0.

U metričkom prostoru (X, d) jednu bazu okolina točke x_0 tvori i množina $\{K(x_0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ kugala sa središtem u točki x_0 i radijusom $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Prema tome, metrički prostori u svakoj točki x_0 dopuštaju prebrojivu bazu okolina. To svojstvo zovemo **prvi aksiom prebrojivosti**.

Definicija 1.27. Kaže se da je skup $A \subseteq X$ u prostoru X **zatvoren**, ako je $X \setminus A$ otvoren.

Teorem 1.28. *Množina svih zatvorenih skupova u prostoru X ima slijedeća svojstva:*

(T1)' Presjek svake familije zatvorenih skupova je zatvoren skup.

(T2)' Unija konačno zatvorenih skupova je zatvoren skup.

(T3)' $\emptyset$, X su zatvoreni skupovi.

Dokaz. □

Dualno pojmu nutrine $\operatorname{Int} A$ možemo definirati **zatvarač** $\operatorname{Cl} A$ podskupa $A \subseteq X$ prostora X.

Definicija 1.29. **Zatvarač** $\operatorname{Cl} A$ skupa $A \subseteq X$ iz prostora X je presjek svih zatvorenih skupova koji sadrža A.

Prema (T1)' $\operatorname{Cl} A$ je zatvoren skup i to najmanji zatvoren skup koji sadrži A.

Teorem 1.30. *Zatvarač podskupova iz prostora X ima slijedeća svojstva:*

(i) $\operatorname{Cl} A \supseteq A$,

(ii) $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$,

(iii) $\operatorname{Cl}(A \cup B) = (\operatorname{Cl} A) \cup (\operatorname{Cl} B)$,

(iv) $\operatorname{Cl} \emptyset = \emptyset$,

(v) $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{Cl} A \subseteq \operatorname{Cl} B$,

(vi) A je zatvoren ako i samo ako $A = ClA$.

Primijetimo da je razlika $U \setminus F$ otvorenog skupa U i zatvorenog skupa F uvijek otvoren skup, jer je $U \setminus F = U \cap (X \setminus F)$, a $X \setminus F$ je otvoren skup. Dualno $F \setminus U$ je zatvoren skup.

U metričkom prostoru (X, d) svaki jednočlan skup $\{x_0\}$, $x_0 \in X$, je zatvoren skup, jer je skup $U = X \setminus \{x_0\}$ otvoren, jer za svaki $x \in U$ vrijedi $x \neq x_0$ pa je $r = d(x, x_0) > 0$ i $x_0 \notin K(x, r)$ iz čeka slijedi da je $K(x, r) \subseteq U$. I svaki konačni podskup metričkog prostora (X, d) je zatvore, jer je unija konačno zatvorenih skupova zatvoreni skup.

Općenito, u topološkom prostoru točka ne mora biti zatvoren skup. Prostori u kojima je svaka točka zatvoren skup zovu se T_1**-prostori**. Metrički prostori su dakle primjeri T_1-prostora.

Teorem 1.31. *Neka je X prostor i $A \subseteq X$ proizvoljan podskup. Tada je* $\operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$.

Dokaz. $\operatorname{Int}(X \setminus A)$ je otvoren skup i vrijedi $\operatorname{Int}(X \setminus A) \subseteq X \setminus A$. Zato je $X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$ zatvoren skup, vrijedi $A \subseteq X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$ pa je i $\operatorname{Cl} A \subseteq X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$.

Obrnuto, $\operatorname{Cl} A$ je zatvoren skup i vrijedi $A \subseteq \operatorname{Cl} A$. Zato je $X \setminus \operatorname{Cl} A$ otvoren skup, vrijedi $X \setminus \operatorname{Cl} A \subseteq X \setminus A$ pa je $X \setminus \operatorname{Cl} A \subseteq \operatorname{Int}(X \setminus A)$. Iz toga slijedi $\operatorname{Cl} A \supseteq X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$. □

Teorem 1.32. *Neka je $A \subseteq X$ proizvoljan podskup metričkog prostora (X, d). Za točku $x_0 \in X$ je $x_0 \in \operatorname{Cl} A$ ako i samo ako je udaljenost $d(x_0, A) = 0$.*

Dokaz. Po teoremu 1.31 je $x_0 \in \operatorname{Cl} A$ ekvivalentno sa $x_0 \notin \operatorname{Int}(X \setminus A)$, a to je po teoremu 1.23 ekvivalentno sa $d(x_0, X \setminus (X \setminus A)) = d(x_0, A) = 0$. □

Korolar 1.33. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ neprazan odozdo omeđen skup. Tada je $a_0 = \inf A \in \operatorname{Cl} A$, a ako je skup A još i zatvoren, onda je $\inf A = \min A \in A$. Obrnuto, $a_0 \leqslant A$ i $a_0 \in \operatorname{Cl} A$ povlači $a_0 = \inf A$. Analogno vrijedi za odozgo omeđen skup $B \subseteq \mathbb{R}$, $\sup B$ i $\max B$.*

Teorem 1.34. *Neka je $A \subseteq X$ podskup prostora X. Tada je $x_0 \in \operatorname{Cl} A$ ako i samo ako svaka okolina U oko x_0 siječe A, tj. $U \cap A \neq \emptyset$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $x_0 \in \operatorname{Cl} A$. Želimo dokazati da svaka okolina od x_0 siječe A.

Dovoljno je tvrdnju dokazati za otvorene okoline U točke x_0, jer otvorene okoline čine bazu okolina točke x_0. Pretpostavimo da je $U \cap A = \emptyset$. Tada je $A \subseteq X \setminus U$ pa, jer je $X \setminus U$ zatvoren skup, vrijedi $\operatorname{Cl} A \subseteq \operatorname{Cl}(X \setminus U) = X \setminus U$, tj. $(\operatorname{Cl} A) \cap U = \emptyset$, što je kontradikcija s pretpostavkama $x_0 \in \operatorname{Cl} A$ i $x_0 \in U$. Dakle $U \cap A \neq \emptyset$, kao što smo i tvrdili.

Obrnuto, pretpostavimo da svaka okolina U od x_0 siječe A i dokažimo da je $x_0 \in \operatorname{Cl} A$. Kada bi vrijedilo suprotno, tj. $x_0 \in X \setminus \operatorname{Cl} A$, jer je $U = X \setminus \operatorname{Cl} A$ otvoren skup, U bi bila okolina od x_0 sa svojstvom $U \cap A \subseteq U \cap \operatorname{Cl} A = (X \setminus \operatorname{Cl} A) \cap \operatorname{Cl} A = \emptyset$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da svaka okolina U od x_0 siječe A. Dakle vrijedi $x_0 \in \operatorname{Cl} A$. $\square$

Definicija 1.35. Neka je A proizvoljan podskup prostora X. Za točku $x_0 \in X$ kažemo da je **točka gomilanja** ili **gomilište** skupa $A \subseteq X$ ako svaka okolina U od x_0 siječe $A \setminus \{x_0\}$. Točka $x_0 \in A$ je **izolirana točka** skupa A, ako nije gomilište skupa A, tj. ako postoji okolina U od x_0 u X za koju je $U \cap A = \{x_0\}$.

Skup svih točaka gomilanja skupa A označavat ćemo sa A'. Sada se teorem 1.34 može izraziti formulom $\operatorname{Cl} A = A \cup A'$.

Teorem 1.36. *Ako je A podskup T_1-prostora X i $x_0 \in A'$ gomilište skupa A, onda svaka okolina O točke x_0 sadrži beskonačno točaka skupa A.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji otvorena okolina U_0 od x_0 koja sadrži samo konačno mnogo točaka $x_1, \dots, x_n \in A$ različitih od x_0. Budući da je konačan skup $\{x_1, \dots, x_n\}$ zatvoren, skup $U_1 = U_0 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ je otvorena okolina točke x_0 koja ne siječe skup $A \setminus \{x_0\}$, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je $x_0 \in A'$. $\square$

Kako je svaki metrički prostor T_1 prostor vrijedi

Korolar 1.37. *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* $A \subseteq X$ *podskup od* X *i* $x_0 \in A'$ *gomilište skupa* A. *Tada svaka okolina* O *točke* x_0 *sadrži beskonačno točaka skupa* A.

Definicija 1.38. Neka je A podskup prostora X. **Granica** ili **fronta** skupa $A \subseteq X$ je skup $\operatorname{Fr} A = \operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Cl}(X \setminus A)$.

Primijetimo da je $\operatorname{Cl} A = A \cup \operatorname{Fr} A$ za svaki skup A. Nadalje, za otvoreni skup U je $\operatorname{Fr} U = (\operatorname{Cl} U) \setminus U$, a za zatvoreni skup F vrijedi $\operatorname{Fr} F = F \setminus \operatorname{Int} F$.

Teorem 1.39. *Neka je* $Y \subseteq X$ *potprostor prostora* X. *Tada vrijedi:*

(i) *Podskup* $A \subseteq Y$ *je zatvoren u* Y *ako i samo ako postoji skup* $F \subseteq X$ *zatvoren u* X *za koji je* $Y \cap F = A$.

(ii) *Skup* $O_Y \subseteq Y$ *je okolina točke* $y \in Y$ *u prostoru* Y *ako i samo ako postoji okolina* $O \subseteq X$ *točke* y *u prostoru* X *za koju je* $O_Y = O \cap Y$.

(iii) *Za zatvarač* Cl_Y, *odnosno nutrinu* Int_Y, *s obzirom na prostor* Y *vrijedi jednakost* $\operatorname{Cl}_Y A = Y \cap \operatorname{Cl} A$, *odnosno* $\operatorname{Int}_Y A = Y \cap \operatorname{Int}(A \cup (X \setminus Y))$.

Dokaz. □

Teorem 1.40. *Neka je* $Y \subseteq X$ *otvoren (zatvoren) podskup prostora* X. *Tada je svaki otvoren podskup* $V \subseteq Y$ *(zatvoren podskup* $F \subseteq Y$*) u prostoru* Y *otvoren (zatvoren) i u prostoru* X.

Dokaz. Pretpostavimo da je Y otvoren podskup od X. Za podskup V otvoren u Y postoji skup U otvoren u X tako da je $Y \cap U = V$. Kako je V presjek dva skupa otvorena u X, V je otvoren u X.

Pretpostavimo da je Y zatvoren podskup od X. Za podskup F zatvoren u Y postoji skup G zatvoren u X takav da je $Y \cap G = F$. Kako je F presjek dva skupa zatvorena u X, F je zatvoren u X, □

Definicija 1.41. Kažemo da je skup $D \subseteq X$ **gust** na prostoru X ako je $\operatorname{Cl} D = X$.

Skup $D \subseteq X$ je gust na X ako i samo ako siječe svaki neprazni otvoreni skup $U \subseteq X$ (teorem 1.34).

U metričkom prostoru (X, d) je skup $D \subseteq X$ gust na X ako i samo ako je $d(x, D) = 0$ za svaki $x \in X$ (teorem 1.32).

Definicija 1.42. Kažemo da je prostor X **separabilan** ako postoji prebrojiv podskup $D \subseteq X$ koji je gust u X.

Teorem 1.43. *Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ je separabilan.*

Dokaz. □

Teorem 1.44. *Svaki potpuno omeđen metrički prostor (X, d) je separabilan.*

Dokaz. Neka je X potpuno omeđen. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji konačan skup točaka $\{x_1^n, \ldots, x_{r_n}^n\} \subseteq X$ takav da kugle $K(x_i^n, \frac{1}{n})$, $i = 1, \ldots, r_n$, tvore pokrivač $\mathcal{U}_n$ skupa X. Neka je $D = \{x_i^n : i = 1, \ldots, r_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Skup D je prebrojiv pa će tvrdnja biti dokazana ako pokažemo da je D gust u X, tj. da je $d(x, D) = 0$ za svaki $x \in X$. Neka je, dakle, $x \in X$ i $\varepsilon > 0$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$. Jer je $\mathcal{U}_n$ pokrivač od X, postoji $i \in \{1, \ldots, r_n\}$ takav da je $x \in K(x_i^n, \frac{1}{n})$, tj. $d(x, x_i^n) < \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$. Budući da je $x_i^n \in D$ vrijedi $d(x, D) < \varepsilon$. Kako nejednakost vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$, zaključujemo da je $d(x, D) = 0$ pa je teorem dokazan. □

Teorem 1.45. *Metrički prostor (X, d) ima prebrojivu bazu ako i samo ako je separabilan.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $\mathcal{B} = \{U_a : a \in A\}$ prebrojiva baza od X. Želimo dokazati da je X separabilan.

Odaberimo za svaki $a \in A$ neku točku $x_a \in U_a$. Tada je $D = \{x_a : a \in A\} \subseteq X$ prebrojiv gust podskup od X pa je X separabilan.

Pretpostavimo sada da je X separabilan. Neka je D prebrojiv gust podskup od X, $\operatorname{Cl} D = X$. Želimo pokazati da X ima prebrojivu bazu.

Promatrajmo prebrojivu množinu kugala $\mathcal{B} = \{K(y, \frac{1}{n}) : y \in D,\ n \in \mathbb{N}\}$ i pokažimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije od X.

Neka je $x \in X$ i $U \subseteq X$ otvoren skup koji sadrži x. Želimo pokazati da postoji kugla $V \in \mathcal{B}$ takva da je $x \in V \subseteq U$. Jer je U otvoren, postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$ (teorem 1.6). Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{2}{n} < r$. Kako je D gust u X, vrijedi $D \cap K(x, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$ pa postoji $y \in D \cap K(x, \frac{1}{n})$ i zato je $d(x, y) < \frac{1}{n}$. Iz toga slijedi

$$\frac{1}{n} < \frac{2}{n} - d(x, y) < r - d(x, y)$$

pa je

$$x \in K(y, \frac{1}{n}) \subseteq K(y, r - d(x, y) \subseteq K(x, r) \subseteq U.$$

Ako izaberemo $V = K(y, \frac{1}{n})$ tada je $V \in \mathcal{B}$ i tvrdnja je dokazana. □

Korolar 1.46. *Ako je metrički prostor (X, d) separabilan, onda je i svaki potprostor (Y, d_Y), $Y \subseteq X$, separabilan.*

Dokaz. Prema teoremu 1.45 X ima prebojivu bazu $\mathcal{B} = \{U_a : a \in A\}$ pa je $\mathcal{B}_Y = \{Y \cap U_a : a \in A\}$ prebrojiva baza za Y pa je Y separabilan. □

2 Konvergencija

Definicija 2.1. **Niz** u skupu X je svako preslikavanje $x : \mathbb{N} \to X$ skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ u skup X. Vrijednost $x(n) \in X$ preslikavanja x na elementu $n \in \mathbb{N}$ zove se **n-ti član niza** i obično se označava sa x_n pa se govori o nizu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Najčešće ćemo umjesto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ upotrebljavati kraću oznaku (x_n), a ponekad i dužu oznaku $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.

Definicija 2.2. Neka je (x_n) niz u prostoru X i neka je $x_0 \in X$. Kažemo da niz (x_n) **konvergira** ili **teži** prema x_0 ako za svaku okolinu O točke x_0 postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geqslant n_0$ povlači $x_n \in O$.

Ako sa $\mathcal{O}(x_0)$ označimo skup svih okolina od x_0, taj se uvjet može zapisati kao

$$(\forall O \in \mathcal{O}(x_0))(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geqslant n_0 \implies x_n \in O. \tag{2.1}$$

Da niz (x_n) konvergira prema x_0, označava se sa $(x_n) \to x_0$, ili sa $\lim(x_n) = x_0$, ili kraće $\lim x_n = x_0$, ili $\lim\limits_n(x_n) = x_0$ da se naglasi indeks n. Za točku x_0 kaže se da je **limes** ili **granična vrijednost** niza (x_n).

Napomena 2.3. Neka je $\mathcal{B}(x_0)$ baza okolina točke x_0 u prostoru X. Iz definicije baze okolina je jasno da (2.1) vrijedi ako je ispunjen slijedeći formalno slabiji uvjet

$$(\forall O \in \mathcal{B}(x_0))(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geqslant n_0 \implies x_n \in O. \tag{2.2}$$

Od posebne je važnosti slučaj kada je $\mathcal{B}(x_0)$ množina svih otvorenih okolina od x_0. Za konvergenciju $(x_n) \to x_0$ dovoljno je, dakle, provjeriti uvjet (2.2) za svaku otvorenu okolinu točke x_0.

Teorem 2.4. *Niz (x_n) u metričkom prostoru (X, d) konvergira prema točki $x_0 \in X$ ako i samo ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geqslant n_0 \implies d(x_0, x_n) < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Dokaz. Nužnost. Pretpostavimo da $(x_n) \to x_0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je $K(x_0, \varepsilon)$ okolina točke x_0, iz (2.1) slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geqslant n_0$ povlači $x_n \in K(x_0, \varepsilon)$, tj. $d(x_0, x_n) < \varepsilon$, čime je nužnost dokazana.

Dovoljnost. Pretpostavimo da vrijedi (2.3). Po teoremu 1.6 za svaku okolinu O točke x_0 postoji kugla $K(x_0, \varepsilon) \subseteq O$. Po pretpostavci (2.3) postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ da za $n \geqslant n_0$ vrijedi $x_n \in K(x_0, \varepsilon) \subseteq O$, što dokazuje dovoljnost. $\square$

Napomena 2.5. U metričkom prostoru (X, d) niz (x_n) konvergira prema točki $x_0 \in X$ ako i samo ako $d(x_n, x_0) \to 0$ u prostoru $\mathbb{R}$ realnih brojeva.

Napomena 2.6. U metričkom prostoru (X, d) svaki je konvergentan niz omeđen.

Napomena 2.7. Neka su d i d' topološki ekvivalentne metrike na skupu X. Iz definicije konvergencije niza jasno je da konvergencija niza ovisi samo o topologiji prostora X. Prema tome, niz (x_n) konvergira prema točki x_0 u prostoru (X, d) ako i samo ako konvergira prema točki x_0 u prostoru (X, d').

Teorem 2.8. *Neka je $X = X' \times X''$ direktni produkt prostora X' i X''. Niz (x_n) iz X, $x_n = (x'_n, x''_n)$, konvergira prema točki $x_0 = (x'_0, x''_0) \in X$ ako i samo ako $(x'_n) \to x'_0$ u X' i $(x''_n) \to x''_0$ u X''.*

Dokaz. Bazu okolina $\mathcal{B}(x_0)$ točke x_0 tvore svi skupovi oblika $U' \times U''$ pri čemu je U' okolina od x'_0 u X', a U'' je okolina od x''_0 u X''. Prema napomeni 2.3, $(x_n) \to x_0$ ako i samo ako za svaki skup $U' \times U'' \in \mathcal{B}(x_0)$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geqslant n_0$ povlači $x_n = (x'_n, x''_n) \in U' \times U''$, tj. $x'_n \in U'$ i $x''_n \in U''$. No taj uvjet je ekvivalentan tvrdnji $(x'_n) \to x'_0$ i $(x''_n) \to x''_0$ pa je teorem dokazan. $\square$

Korolar 2.9. *U euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ niz (x_i), $x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n) \in \mathbb{R}^n$, konvergira prema točki $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ ako i samo ako $\lim_i (x_i^j) = x_0^j$ za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Teorem 2.10. *Ako u metričkom prostoru (X, d) niz (x_n) konvergira prema točki $x_0 \in X$ i prema točki $x'_0 \in X$, tada je $x_0 = x'_0$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno da je $x_0 \neq x'_0$. Tada je $d(x_0, x'_0) = \varepsilon > 0$. Iz nejednakosti trokuta zaključujemo da se kugle $K(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ i $K(x'_0, \frac{\varepsilon}{2})$ ne sijeku. Budući da $(x_n) \to x_0$ i $(x_n) \to x'_0$, po definiciji 2.2 postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geqslant n_0$ povlači $x_n \in K(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ i $x_n \in K(x'_0, \frac{\varepsilon}{2})$, što je u kontradikciji s činjenicom da su navedene kugle disjunktne. Dakle $x_0 = x'_0$. $\square$

Definicija 2.11. Topološki prostor X je **Hausdorffov** ili **T_2-prostor** ako za svaki par različitih točaka $x_0 \neq x'_0$ iz X postoje disjunktne okoline O od x_0 i O' od x'_0.

Metrički prostori primjeri su Hausdorffovih prostora.

Svaki Hausdorffov prostor je T_1 prostor, ali obrat ne vrijedi. Da bismo to pokazali, pretpostavimo prvo da je X Hausdorffov prostor i neka je $x_0 \in X$.

Tada za svaku točku $x \in X \setminus \{x_0\}$ postoje disjunktne otvorene okoline U_x od x i V_x od x_0. Zato je $U_x \subseteq X \setminus \{x_0\}$ pa je $X \setminus \{x_0\} = \bigcup_{x \in X \setminus \{x_0\}} U_x$ otvoren skup, tj. $\{x_0\}$ je zatvoren skup, odnosno X je T_1 prostor.

Da bismo pokazali da T_1 prostor općenito nije Hausdorffov prostor, razmotrimo slijedeći primjer. Neka je X beskonačan skup i $\mathcal{U}$ topologija na X koju tvore komplementi svih konačnih podskupova od X i prazan skup, $\emptyset$. Tada je za svaki $x \in X$ komplement od $\{x\}$ u X, $X \setminus \{x\}$, otvoren skup pa je $\{x\}$ zatvoren skup, odnosno X je T_1 prostor. S druge strane, neka su $x, y \in X$ dvije različite točke od X. Pretpostavimo da je X Hausdorffov prostor i neka su U_x, U_y disjunktne otvorene okoline od x, y redom. Tada postoje konačni skupovi $K_x, K_y \subset X$ takavi da je $U_x = X \setminus K_x$ i $U_y = X \setminus K_y$. No tada je npr. $U_y \subseteq K_x$, što je u kontradikciji s činjenicama da je U_y beskonačan, a K_x konačan skup. Dakle, $(X, \mathcal{U})$ nije Hausdorffov prostor.

Promotrimo sada niz $x : \mathbb{N} \to X$ koji je injekcija, tj. čiji su svi elementi niza različiti. Tvrdimo da taj niz konvergira prema svakoj točki $x_0 \in X$. Zaista, neka je $U \subseteq X$ proizvoljna okolina od x_0. Tada je $X \setminus U$ konačan skup i može sadržavati najviše konačno elemenata niza (x_n). Zato postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geqslant n_0$ povlači $x_n \in U$ pa $(x_n) \to x_0$.

Teorem 2.12. *Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq X$ podskup od X. Ako je (x_n) niz u A koji konvergira u X prema točki $x_0 \in X$, onda je $x_0 \in \operatorname{Cl} A$. Obrnuto, ako je $x_0 \in \operatorname{Cl} A$, onda postoji niz (x_n), $x_n \in A$, za koji je $\lim x_n = x_0$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $x_n \in A$ i $\lim(x_n) = x_0 \in X$. Tada $(d(x_n, x_0)) \to 0$ pa je $\inf\{d(x_n, x_0) : n \in \mathbb{N}\} = 0$ i zato ja $d(x_0, A) = 0$, odnosno, po teoremu 1.32 vrijedi $x_0 \in \operatorname{Cl} A$.

Obrnuto, $x_0 \in \operatorname{Cl} A$ povlači da je $d(x_0, A) = 0$ pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji neki $x_n \in A$ takav da je $d(x_0, x_n) < \frac{1}{n}$. Kako je $\lim \frac{1}{n} = 0$ vrijedi $(d(x_0, x_n)) \to 0$ pa $(x_n) \to x_0$. □

Korolar 2.13. *U metričkom prostoru (X, d) skup $A \subseteq X$ je zatvoren ako i samo ako za svaki niz (x_n), $x_n \in A$, takav da $(x_n) \to x_0$ vrijed $x_0 \in A$.*

Dokaz. Neka je A zatvoren skup u X, $x_n \in A$ i $(x_n) \to x_0$. Tada je po teoremu 2.12 $x_0 \in \operatorname{Cl} A = A$ pa je $x_0 \in A$.

Obrnuto, neka je $x_0 \in \operatorname{Cl} A$. Tada po teoremu 2.12 postoji niz (x_n), $x_n \in A$, koji konvergira prema x_0. No, jer taj niz konvergira prema x_0, po pretpostavci korolara vrijedi da je $x_0 \in A$ pa je $\operatorname{Cl} A \subseteq A$, tj. skup A je zatvoren. □

Korolar 2.14. *U metričkom prostoru (X, d) za svaku kuglu $K(x_0, r)$ vrijedi* $\operatorname{Cl} K(x_0, r) \subseteq \{x \in X : d(x_0, x) \leqslant r\}$.

Dokaz. Neka je $x \in \operatorname{Cl} K(x_0, r)$. Tada po teoremu 2.12 postoji niz (x_n) u $K(x_0, r)$ takav da $(x_n) \to x$. Zato vrijedi $(d(x_0, x_n)) \to d(x_0, x)$. Kako je $d(x_0, x_n) < r$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi $d(x_0, x) \leqslant r$, što dokazuje korolar. □

Primijetimo da se općenito $\operatorname{Cl} K(x_0, r)$ ne podudara sa $\{x \in X : d(x_0, x) \leqslant r\}$. Na primjer, u diskretnom metričkom prostoru X za $x_0 \in X$ vrijedi $\operatorname{Cl} K(x_0, 1) = \{x_0\} \neq X = \{x \in X : d(x, x_0) \leqslant 1\}$.

Primijetimo također da teorem 2.12 ne vrijedi u topološkim prostorima. Postoje primjeri gdje je $x_0 \in \operatorname{Cl} A$, ali ipak ne postoji niz (x_n) u A koji bi konvergirao prema x_0.

Definicija 2.15. Neka je $x : \mathbb{N} \to X$ neki niz u skupu X. **Podniz** niza $x = (x_n)$ je niz u X dobiven kompozicijom $x \circ n$ nekog strogo rastućeg preslikavanja $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i preslikavanja x. **k-ti član podniza** $x \circ n$ je $x(n(k)) = x_{n(k)} = x_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Primijetimo da je $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$ pa je za svaki $k \in \mathbb{N}$ $n_k \geqslant k$.

Podniz podniza nekog niza (x_n) je opet neki podniz niza (x_n), jer je $(x \circ n) \circ l = x \circ (n \circ l)$ i za strogo rastuća preslikavanja $n, l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je preslikavanje $n \circ l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuće.

Ako niz (x_n) konvergira prema točki x_0, onda i svaki podniz (x_{n_k}) konvergira prema x_0, jer za svaku okolinu V točke x_0 postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geqslant k_0$ povlači $x_n \in V$ pa za svaki $k \geqslant k_0$ iz $n_k \geqslant k \geqslant k_0$ slijedi $x_{n_k} \in V$.

Definicija 2.16. Neka je (x_n) niz točaka u prostoru X. Točka $x_0 \in X$ zove se **gomilište** niza (x_n) ako za svaku okolinu V oko x_0 i svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji barem jedan $n' \in \mathbb{N}$, $n' > n$, takav da je $x_{n'} \in V$.

Primijetimo da je za svaku okolinu V gomilišta x_0 skup $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$ beskonačan. Također, gomilište niza (x_n) uvijek pripada zatvaraču skupa $x(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, ali ne mora biti gomilište toga skupa. Npr. za niz $x_n = (-1)^n$ točke -1 i 1 su gomilišta niza (x_n), ali nisu gomilišta skupa $x(\mathbb{N}) = \{-1, 1\}$, jer je on konačan i nema gomilišta. Uz to gomilište x_0 podniza (x_{n_k}) ujedno je i gomilište niza (x_n), jer za okolinu V od x_0 i $n = k \in \mathbb{N}$ za koji postoji $k' > k$ takav da je $x_{n_{k'}} \in V$ i za $n' = n_{k'}$ također vrijedi $n' = n_{k'} \geqslant k' > k = n$ i $x_{n'} = x_{n_{k'}} \in V$.

Napomena 2.17. Ako je (x_n) niz u Hausdorffovom prostoru X i $\lim x_n = x_0$, onda je x_0 jedino gomilište niza (x_n).

Teorem 2.18. *Neka je (X, d) metrički prostor. Točka x_0 je gomilište niza (x_n) u X ako i samo ako postoji podniz $(x_{n_k})_k$ niza (x_n) koji konvergira prema x_0.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (x_{n_k}) podniz niza (x_n) koji konvergira prema x_0. Želimo pokazati da je x_0 gomilište niza (x_n).

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i V neka okolina od x_0. Budući da podniz (x_{n_k}) konvergira prema x_0, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $k \geqslant k_0$ vrijedi $x_{n_k} \in V$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k > n$ i $k \geqslant k_0$. Tada postoji n', $n' = n_k \geqslant k > n$ i $n' \geqslant k_0$ takav da je $x_{n'} \in V$ pa je x_0 gomilište niza (x_n).

Obrat. Pretpostavimo da je x_0 gomilište niza (x_n). Želimo pokazati da tada postoji podniz (x_{n_k}) niza (x_n) koji konvergira prema x_0.

Definirat ćemo induktivno strogo rastući niz (n_k) takav da je $x_{n_k} \in K(x_0, \frac{1}{k})$. Za n_1 uzmimo bilo koji prirodan broj za koji vrijedi $x_{n_1} \in K(x_0, 1)$. Pretpostavimo da su brojevi $n_1 < \cdots < n_k$ već definirani i da vrijedi $x_{n_i} \in K(x_0, \frac{1}{i})$, $i = 1, \ldots, k$. Jer je x_0 gomilište niza (x_n), za okolinu $V = K(x_0, \frac{1}{k+1})$ i za $n = n_k$, postoji $n' = n_{k+1} > n_k$ takav da je $x_{n_{k+1}} \in K(x_0, \frac{1}{k+1})$.

Na taj način dobivamo podniz (x_{n_k}) koji konvergira prema x_0, jer udaljenost $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{k}$ teži prema 0. $\square$

Teorem 2.19. *Neka je (x_n) niz točaka u prostoru X. Skup svih gomilišta niza (x_n) zatvoren je podskup od X.*

Dokaz. Označimo skup svih gomilišta niza (x_n) sa A. Pretpostavimo da je $y_0 \in \operatorname{Cl} A$. Želimo pokazati da je $y_0 \in A$.

Neka je V proizvoljna okolina od y_0. Po teoremu 1.34 postoji barem jedna točka $x_0 \in A \cap V$. Jer je $x_0 \in A$ gomilište niza (x_n), a V je i okolina točke x_0, postoji $n' \in \mathbb{N}$, $n' > n$, takav da je $x_{n'} \in V$. No to upravo pokazuje da je y_0 gomilište niza (x_n), tj. da je $y_0 \in A$. $\square$

Definicija 2.20. Neka je na skupu T definiran niz (x_n) realnih funkcija $x_n : T \to \mathbb{R}$ i funkcija $x_0 : T \to \mathbb{R}$. Kažemo da **niz funkcija** (x_n) **konvergira prema funkciji** x_0 **u točki** $t_0 \in T$ ako niz realnih brojeva $(x_n(t_0))_n$ konvergira prema broju $x_0(t_0)$.

Ako je $A \subseteq T$ neki podskup i niz funkcija (x_n) konvergira prema funkciji x_0 u svakoj točki $t \in A$, onda kažemo da (x_n) **konvergira po točkama** ili **obično prema** x_0 **na skupu** A.

Ako je $\lim x_n(t) = x_0(t)$ za svaki $t \in T$, onda kažemo da niz funkcija (x_n) konvergira obično prema funkciji x_0.

Obična konvergencija $(x_n) \to x_0$ na skupu T može se iskazati i na slijedeći način:

$$(\forall t \in T)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geqslant n_0 \implies |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Prirodno se postavlja pitanje da li se na skupu $\mathbb{R}^T$ svih funkcija $x : T \to \mathbb{R}$ može definirati takva topologija $\mathcal{U}$ da se konvergencija nizova u prostoru $(\mathbb{R}^T, \mathcal{U})$ u smislu (2.1) podudara sa običnom konvergencijom (2.4). Analogno pitanje postavlja se i za metriku.

Za točku $t \in T$ i otvoreni skup $V \subseteq \mathbb{R}$ označimo

$$U(t; V) = \{x \in \mathbb{R}^T : x(t) \in V\}. \tag{2.5}$$

Drugim riječima $x \in U(t;V)$ ako i samo ako je $x(t) \in V$. Označimo također

$$U(t_1,\dots,t_k;V_1,\dots,V_k) = U(t_1;V_1) \cap \dots \cap U(t_k;V_k), \tag{2.6}$$

odnosno

$$U(t_1,\dots,t_k;V_1,\dots,V_k) = \{x \in \mathbb{R}^T : x(t_i) \in V_i,\ i = 1,\dots,k\}. \tag{2.7}$$

Neka je $\mathcal{B}$ množina svih skupova oblika $U(t_1,\dots,t_k;V_1,\dots,V_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Lako se može provjeriti da $\mathcal{B}$ zadovoljava uvjete (B1) i (B2) za bazu topologije:

Ako je $x \in \mathbb{R}^T$, onda je $x \in U(t_1;V_1)$ za sve $t_1 \in T$ i $V_1 = \mathbb{R}$ pa je uvjet (B1) ispunjen. Jer vrijedi

$$U(t_1,\dots,t_k;V_1,\dots,V_k) \cap U(s_1,\dots,s_l;W_1,\dots,W_l) =$$

$$= U(t_1,\dots,t_k,s_1,\dots,s_l;V_1,\dots,V_k,W_1,\dots,W_l)$$

i uvjet (B2) je ispunjen. Zato je potpuno određena topologija $\mathcal{U}$ na $\mathbb{R}^T$ za koju bazu tvore svi skupovi oblika (2.7).

Teorem 2.21. *Neka je T neki skup, $\mathbb{R}^T$ skup svih funkcija $x : T \to \mathbb{R}$ i neka je $\mathcal{U}$ topologija na $\mathbb{R}^T$ kojoj bazu tvore svi skupovi oblika (2.7). Niz (x_n) funkcija $x_n \in \mathbb{R}^T$ konvergira obično prema funkciji $x_0 \in \mathbb{R}^T$ ako i samo ako (x_n) konvergira prema x_0 u topološkom prostoru $(\mathbb{R}^T,\mathcal{U})$. Uz to prostor $(\mathbb{R}^T,\mathcal{U})$ je Hausdorffov prostor.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da niz (x_n) konvergira prema x_0 u $(\mathbb{R}^T,\mathcal{U})$. Neka su $t \in T$ i $V \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni skup koji sadrži $x_0(t)$ proizvoljni. Vrijedi $x_0 \in U(t;V)$ i postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geqslant n_0$ povlači $x_n \in U(t;V)$, tj. $x_n(t) \in V$. No to dokazuje da je $\lim(x_n(t)) = x_0(t)$ za svaki $t \in T$, tj. (x_n) konvergira prema x_0 obično.

Obrnuto, pretpostavimo da niz (x_n) konvergira prema x_0 obično. Neka $U = U(t_1,\dots,t_k;V_1,\dots,V_k) \in \mathcal{B}$ sadrži x_0. Tada je $x_0(t_i) \in V_i$ za $i = 1,\dots,k$. Jer $(x_n(t_i)) \to x_0(t_i)$ za svaki $i = 1,\dots,k$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geqslant n_0$

povlači $x_n(t_i) \in V_i$, $i = 1, \dots, k$. No tada je $x_n \in U(t_1, \dots, t_k; v_1, \dots, V_k) = U$ za svaki $n \geqslant n_0$, što dokazuje da $(x_n) \to x_0$ s obzirom na topologiju $\mathcal{U}$.

Na kraju dokažimo da je $(\mathbb{R}^T, \mathcal{U})$ Hausdorffov prostor. Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^T$, $x_1 \neq x_2$. Tada postoji točka $t_0 \in T$ za koju je $x_1(t_0) \neq x_2(t_0)$. Zato postoje disjunktni otvoreni skupovi V_1, V_2 za koje je $x_1(t_0) \in V_1$ i $x_2(t_0) \in V_2$. Skupovi $U(t_0; V_1)$ i $U(t_0; V_2)$ su disjunktne okoline od x_1, odnosno x_2 pa je $(\mathbb{R}^T, \mathcal{U})$ Hausdorffov prostor. $\square$

Općenito nije moguće dobiti običnu konvergenciju nizova funkcija iz neke metrike d na $\mathbb{R}^T$.

Teorem 2.22. *Ako je T neprebrojiv skup onda ne postoji metrika d na $\mathbb{R}^T$ sa svojstvom da je konvergencija nizova u $(\mathbb{R}^T, d)$ obična konvergencija nizova funkcija.*

Dokažimo najprije jednu lemu.

Lema 2.23. *Neka je T proizvoljan skup, a d takva metrika na $\mathbb{R}^T$ da konvergencija nizova u $(\mathbb{R}^T, d)$ povlači običnu konvergenciju nizova funkcija. Tada topološka struktura $\mathcal{V}$ na prostoru $(\mathbb{R}^T, d)$ sadrži topologiju $\mathcal{U}$ iz teorema 2.21, $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{U}$.*

Dokaz. Pokažimo prvo da su skupovi $U(t; V) \in \mathcal{U}$ otvoreni u prostoru $(\mathbb{R}^T, d)$, tj. da su skupovi $\mathbb{R}^T \setminus U(t; V)$ zatvoreni u $(\mathbb{R}^T, d)$.

Prema korolaru 2.13 dovoljno je pokazati da $(x_n \in \mathbb{R}^T \setminus U(t; v))$ & $((x_n) \to x_0)$ povlači $x_0 \in \mathbb{R}^T \setminus U(t; v)$. Po pretpostavci $(x_n) \to x_0$ povlači običnu konvergenciju pa $(x_n(t)) \to x_0(t)$ za svaki $t \in T$. Budući da $x_n \notin U(t; V)$, vrijedi $x_n(t) \in \mathbb{R} \setminus V$ pa je i $x_0(t) \in \mathbb{R} \setminus V$, jer je $\mathbb{R} \setminus V$ zatvoren skup. Dakle, $x_0 \in \mathbb{R}^T \setminus U(t; V)$ pa je tvrdnja dokazana.

Iz $U(t; V) \in \mathcal{V}$ slijedi da je i $U(t_1, \dots, t_k; V_1, \dots, V_k) \in \mathcal{V}$, jer se radi o presjeku konačne familije skupova iz $\mathcal{V}$. Dakle, čitava baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{U}$ je sadržana u $\mathcal{V}$ pa je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. $\square$

Dokaz teorema 2.22. Pretpostavimo da je d metrika na $\mathbb{R}^T$ sa svojstvom da je konvergencija nizova u $(\mathbb{R}^T, d)$ obična konvergencija nizova funkcija. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}^T$ proizvoljna realna funkcija. Za svaki $t \in T$ promotrimo skup $V_t = \{x \in \mathbb{R}^T : |x(t) - x_0(t)| < 1\} \subseteq \mathbb{R}^T$. Po lemi 2.23 skup V_t je otvorena okolina od x_0 u $(\mathbb{R}^T, d)$, jer je oblika $U(t; V)$, pri čemu je V jedinična kugla u $\mathbb{R}$ oko točke $x_0(t)$. Kako kugle $K(x_0, \frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}^T$ tvore bazu okolina točke x_0 u $(\mathbb{R}^T, d)$, za svaki $t \in T$ postoji $n(t) \in \mathbb{N}$ takav da je $K(x_0, \frac{1}{n(t)}) \subseteq V_t$. Budući da je T neprebrojiv skup, postoji barem jedan $n_0 \in \mathbb{N}$ koji se javlja kao vrijednost $n(t)$ za beskonačno različitih točaka $t \in T$, tj. postoji niz (t_k) različitih točaka u T za koje je $n(t_k) = n_0$. Zato vrijedi $K(x_0, \frac{1}{n_0}) \subseteq V_{t_k}$ za sve $k \in \mathbb{N}$.

Sada za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je $x_n \in \mathbb{R}^T$ takva da vrijedi $x_n(t) = x_0(t)$ za sve $t \neq t_n$ i $|x_n(t_n) - x_0(t_n)| \geqslant 1$. Tada $x_n \notin V_{t_n}$ pa također $x_n \notin K(x_0, \frac{1}{n_0})$ za sve $n \in \mathbb{N}$, jer $K(x_0, \frac{1}{n_0}) \subseteq V_{t_n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Iz toga slijedi da niz (x_n) ne konvergira prema x_0 u $(\mathbb{R}^T, d)$.

Pokazat ćemo sada da niz (x_n) konvergira obično prema x_0, tj. da za svaki $t \in T$ vrijedi $\lim(x_n(t)) = x_0(t)$.

Znamo da za svaki $t \in T \setminus \{t_k : k \in \mathbb{N}\}$ vrijedi $x_n(t) = x_0(t)$. Također, za $t = t_k$, za sve $n > k$ vrijedi $t_n \neq t_k = t$ pa je $x_n(t) = x_0(t)$. Dakle, niz (x_n) konvergira obično prema x_0, ali ne konvergira prema x_0 u $(\mathbb{R}^T, d)$ pa smo dobili kontradikciju s pretpostavkom na početku dokaza, što dokazuje teorem. $\square$

Definicija 2.24. Neka je na skupu T definiran niz (x_n) realnih funkcija $x_n : T \to \mathbb{R}$ i funkcija $x_0 : T \to \mathbb{R}$. Kažemo da **niz funkcija** (x_n) **uniformno konvergira prema funkciji** x_0 **na skupu** T ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall t \in T)(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geqslant n_0 \implies |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Za niz (x_n) funkcija $x_n \in \mathbb{R}^T$ kaže se da uniformno konvergira prema funkciji $x_0 \in \mathbb{R}^T$ na skupu $A \subseteq T$ ako niz restrikcija $x_n|_A \in \mathbb{R}^A$ uniformno konvergira prema $x_0|_A \in \mathbb{R}^A$.

Jasno je da uniformna konvergencija povlači običnu konvergenciju. Obrat ne vrijedi, kao što pokazuje slijedeći primjer: Neka je $T = [0, 1]$, $x_n(t) = t^n$, $t \in [0, 1]$ i

$$x_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

Tada niz (x_n) konvergira obično prema x_0, no ta konvergencija nije uniformna.

Teorem 2.25. *Neka je T proizvoljan skup. Na skupu $\mathbb{R}^T$ svih realnih funkcija $x : T \to \mathbb{R}$ postoji metrika d sa svojstvom da niz funkcija (x_n) iz $\mathbb{R}^T$ uniformno konvergira prema funkciji $x_0 \in \mathbb{R}^T$ ako i samo ako niz (x_n) konvergira prema x_0 u smislu merike d.*

Metrika d definira se formulom

$$d(x, y) = \sup \left\{ \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} : t \in T \right\}, \ x, y \in \mathbb{R}^T.$$

Dokaz. □

Teorem 2.26. *Neka je T proizvoljan skup i $B(T)$ skup svih omeđenih realnih funkcija $x : T \to \mathbb{R}$. Tada je formulom*

$$d(x, y) = \sup\{|x(t) - y(t)| : t \in T\}$$

definirana metrika na skupu $B(T)$. Niz funkcija (x_n) iz $B(T)$ uniformno konvergira prema funkciji $x_0 \in B(T)$ ako i samo ako niz (x_n) konvergira prema x_0 u smislu merike d. Ta metrika se često naziva **metrika uniformne konvergencije**.

Dokaz. □

3 Potpuni metrički prostori

Teorem 3.1. *Neka je (x_n) konvergentan niz u metričkom prostoru (X, d). Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji takav $n_0 \in \mathbb{N}$ da $n \geqslant n_0$ povlači $d(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon$*

za svaki $k \in \mathbb{N}$, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) n \geqslant n_0 \implies d(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Dokaz. □

Svojstvo (3.1) niza (x_n) jako je važno pa nizovi s tim svojstvom imaju posebno ime.

Definicija 3.2. Neka je (x_n) niz u metričkom prostoru (X, d). Kažemo da je (x_n) **Cauchyjev** niz ako vrijedi (3.1).

Sada se teorem 3.1 može izreći na slijedeći način: Svaki konvergentni niz u metričkom prostoru je Cauchyjev niz. Uvjet (3.1) može se zapisati i u slijedećem ekvivalentnom obliku:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(m \geqslant n_0)\&(n \geqslant n_0) \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Općenito u metričkom prostoru Cauchyjevi nizovi nisu konvergentni. Npr., ako je $X = \langle 0, 1] \subset \mathbb{R}$, onda je niz (x_n), $x_n = \frac{1}{n} \in X$, Cauchyjev niz jer je (x_n) konvergentan u $[0, 1]$, ali u prostoru X niz (x_n) ne konvergira.

Teorem 3.3. *Neka je (x_n) Cauchyjev niz u metričkom prostoru (X, d). Ako neki podniz (x_{n_k}) niza (x_n) konvergira prema $x_0 \in X$, onda i niz (x_n) konvergira prema x_0.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada po pretpostavci postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ da $m, n \geqslant n_0$ povlači $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Budući da je $x_0 = \lim(x_{n_k})$, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $n_k \geqslant n_0$ i $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Neka je sada $n \geqslant n_0$. Tada je $d(x_n, x_0) \leqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ i teorem je dokazan. □

Općenito konvergencija nekog podniza ne povlači konvergenciju niza, što se može vidjeti npr. za niz $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$.

Prisjetimo se, niz (x_n) u metričkom prostoru (X, d) je omeđen ako je skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ omeđen.

Teorem 3.4. *Svaki Cauchyjev niz (x_n) u metričkom prostoru (X, d) je omeđen.*

Dokaz. Za $\varepsilon = 1$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geqslant n_0$ povlači $d(x_n, x_{n_0}) < 1$. Stoga je skup $\{x_n : n \geqslant n_0\}$ sadržan u kugli $K(x_{n_0}, 1)$ pa je omeđen. Kako je unija konačne familije omeđenih skupova omeđen skup, zaključujemo da je i skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ omeđen. □

Teorem 3.5. *U n-dimenzionalnom realnom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$ svaki Cauchyjev niz (x_k) konvergira prema nekoj točki $x_0 \in \mathbb{R}^n$, pri čemu se za d može uzeti euklidska metrika d_2, ili metrike d_1, d_∞.*

Dokaz. □

Svojstvo prostora $\mathbb{R}^n$ da je svaki Cauchyjev niz u tom prostoru konvergentan uzima se za definicijsko svojstvo važne klase metričkih prostora.

Definicija 3.6. Kažemo da je metrički prostor (X, d) **potpun** ako svaki Cauchyjev niz (x_n) u X konvergira prema nekoj točki $x_0 \in X$.

$(\mathbb{R}^n, d)$ je potpun za metrike $d = d_2, d_1$ ili d_∞.

Definicija 3.7. Potpun normiran vektorski prostor zove se **Banachov prostor**. Potpun unitaran vektorski prostor zove se **Hilbertov prostor**.

Korolar 3.8. *n-dimenzionalni realni prostor $\mathbb{R}^n$ s metrikom d_2, d_1 ili d_∞ je Banachov prostor, a n-dimenzionalni euklidski prostor $(\mathbb{R}^n, d_2)$ je Hilbertov prostor.*

Teorem 3.9. *Neka je (X, d) metrički prostor i Y zatvoreni podskup od X. Ako je prostor (X, d) potpun, onda je i (Y, d) potpun prostor.*

Dokaz. Neka je (y_n) Cauchyjev niz u prostoru (Y, d). Tada je (y_n) ujedno i Cauchyjev niz u prostoru (X, d) pa zbog potpunosti prostora (X, d) postoji točka $x_0 \in X$ takva da (y_n) konvergira prema x_0. Budući da je Y zatvoren skup u X, vrijedi $x_0 \in Y$ što dokazuje da niz (y_n) konvergira u (Y, d). □

Korolar 3.10. *Svaki zatvoreni skup iz* $(\mathbb{R}^n, d)$ *je potpun metrički prostor.*

Teorem 3.11. *Neka je* (Y, d) *potprostor metričkog prostora* (X, d)*. Ako je* (Y, d) *potpun prostor, onda je* Y *zatvoren skup u* (X, d)*.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in \operatorname{Cl} Y$. Po teoremu 2.12 postoji niz (y_n) u Y koji konvergira prema x_0. Po teoremu 3.1 niz (y_n) je Cauchyjev pa zbog potpunosti prostora (Y, d) postoji točka $y_0 \in Y$ prema kojoj konvergira niz (y_n). Zbog jedinstvenosti limesa vrijedi $x_0 = y_0$ pa je $x_0 \in Y$, tj. $\operatorname{Cl} Y = Y$. □

Potpunost prostora (X, d) nije topološko svojstvo, već bitno ovisi o metrici prostora. Može se dogoditi da na istom skupu X imamo topološki ekvivalentne metrike d i d' te da je (X, d) potpun prostor, a da (X, d') nije potpun.

Definicija 3.12. Neka je X proizvoljan skup i $f : X \to X$ preslikavanje. Za podskup $Y \subseteq X$ kažemo da je **invarijantan skup** za preslikavanje f ako je $f(Y) \subseteq Y$. Za točku $y \in X$ kažemo da je **fiksna točka** za preslikavanje f ako je $f(y) = y$.

Ako je jednočlan skup $\{y\} \subseteq X$ invarijantan skup od f, onda je y fiksna točka za f i obrnuto. Skup svih fiksnih točaka nekog preslikavanja je invarijantan skup tog preslikavanja.

Definicija 3.13. Neka je $f : X \to X$ preslikavanje metričkog prostora (X, d) u samog sebe. Kažemo da je preslikavanje f **kontrakcija** (ili **sažimanje**) ako postoji realan broj κ, $0 \leqslant \kappa < 1$, takav da za svaki $x, x' \in X$ vrijedi

$$d(f(x), f(x')) \leqslant \kappa d(x, x'). \tag{3.3}$$

Broj κ zove se **koeficijent kontrakcije** preslikavanja f.

Teorem 3.14 (Banachov teorem o fiksnoj točki)**.** *Neka je* (X, d) *potpun metrički prostor i* $f : X \to X$ *kontrakcija s koeficijentom* κ*. Tada vrijede slijedeće tvrdnje:*

(i) Postoji jedna i samo jedna fiksna točka $y \in X$ za preslikavanje f.

(ii) Za svaku točku $x_1 \in X$ niz (x_n), $x_n = f^{n-1}(x_1)$, konvergira prema fiksnoj točki y, pri čemu je $f^1 = f$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.

(iii) Vrijedi ocjena $d(x_n, y) \leqslant \frac{\kappa^{n-1}}{1-\kappa} d(x_1, f(x_1))$, $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Neka je $x_1 \in X$ proizvoljna točka. Neka je niz (x_n) u X definiran indukcijom $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, odnosno $x_{n+1} = f^n(x_1)$. Dokazat ćemo da je (x_n) Cauchyjev niz. Prvo ćemo pokazati indukcijom po n da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \kappa^{n-1} d(x_1, x_2). \tag{3.4}$$

Za $n = 1$ tvrdnja očito vijedi. Uz pretpostavku indukcije (3.4) i iz (3.3), za $n+1$ dobivamo

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leqslant \kappa d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \kappa^n d(x_1, x_2)$$

pa je nejednakost (3.4) dokazana.

Po nejednakosti mnogokuta (1.1) vrijedi

$$d(x_n, x_{n+k}) \leqslant d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k})$$

pa iz (3.4), za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d(x_n, x_{n+k}) \leqslant \kappa^{n-1}(1 + \kappa + \cdots + \kappa^{k-1}) d(x_1, x_2). \tag{3.5}$$

Budući da je

$$(1-\kappa)(1 + \kappa + \cdots \kappa^{k-1}) = 1 - \kappa^k \leqslant 1$$

vrijedi

$$1 + \kappa + \cdots \kappa^{k-1} \leqslant \frac{1}{1-\kappa}$$

pa iz (3.5) dobivamo

$$d(x_n, x_{n+k}) \leqslant \frac{\kappa^{n-1}}{1-\kappa} d(x_1, x_2). \tag{3.6}$$

Zbog pretpostavke $0 \leqslant \kappa < 1$ vrijedi $\lim \kappa^n = 0$ pa iz (3.6) dobivamo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$ povlači $d(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon$, što dokazuje da je niz (x_n) Cauchyjev.

Budući da je po pretpostavci prostor (X, d) potpun i niz (x_n) je Cauchyjev, niz (x_n) konvergira prema nekoj točia $y \in X$. Iz definicije niza (x_n) i nejednakosti (3.3) dobivamo

$$\begin{aligned} d(y, f(y)) &\leqslant d(y, x_n) + d(x_n, f(y)) = d(y, x_n) + d(f(x_{n-1}), f(y)) \\ &\leqslant d(y, x_n) + \kappa d(x_{n-1}, y). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Jer (x_n) konvergira prema y, nizovi $(d(y, x_n))$ i $(d(x_{n-1}, y))$ konvergiraju prema 0 pa iz (3.7) slijedi da je $d(y, f(y)) = 0$, odnosno $f(y) = y$, što dokazuje da je $y \in X$ fiksna točka za f.

Dokažimo jedinstvenost fiksne točke. Pretpostavimo da je $z \in X$ fiksna točka za f, tj. da je $f(z) = z$. Tada vrijedi

$$d(y, z) = d(f(y), f(z)) \leqslant \kappa d(y, z). \tag{3.8}$$

Kako je $\kappa < 1$, iz (3.8) slijedi da je $d(y, z) = 0$, tj $y = z$ pa je fiksna točka jedinstvena. Time su tvrdnj (i) i (ii) dokazane.

Primijetimo na kraju da je $\lim_k d(x_n, x_{n+k}) = d(x_n, y)$ pa iz (3.6) dobivamo

$$d(x_n, y) \leqslant \frac{\kappa^{n-1}}{1 - \kappa} d(x_1, f(x_1)), \tag{3.9}$$

te je i tvrdnja (iii) dokazana. □

Formula (3.9) daje ocjenu pogreške koja se dobiva n-tom aproksimacijom x_n tražene fiksne točke y. Iako fiksna točka y do koje dolazimo opisanim iterativnim postupkom ne ovisi o izboru početne aproksimacije x_1, broj koraka potrebnih da se postigne željena aproksimacija ovisi o x_1.

Pojam fiksne točke za dano preslikavane $f : X \to X$ ne ovisi o metrici d na X. Može se dogoditi da neko preslikavanje f nije kontrakcija u danoj metrici d, ali da je moguće na X definirati drugu metriku d' da je (X, d')

potpun metrički prostor i da je f u odnosu na metriku d' kontrakcija pa se onda ipak može zaključiti da f ima fiksnu točku.

Ako je (X, d) potpun metrički prostor i preslikavanje $f : X \to X$ ima svojstvo da je $d(f(x), f(x')) < d(x, x')$ za svaki $x, x' \in X$, $x \neq x'$, općenito se ne može zaključiti da postoji fiksna točka. To se može vidjeti na slijedećem primjeru: Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dano formulom $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Za $x \neq x'$ vrijedi $|f(x) - f(x')| = |\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + x'^2}| < \sqrt{(x - x')^2} = |x - x'|$, a f nema fiksnu točku ($\sqrt{1 + x^2} = x \implies 1 + x^2 = x^2$).

4 Neprekidna preslikavanja

Definicija 4.1. Neka su X, Y topološki prostori i $f : X \to Y$ preslikavanje. Kažemo da je preslikavanje f **neprekidno u točki** $x_0 \in X$ ako za svaku okolinu V točke $f(x_0)$ u Y postoji okolina U točke x_0 u X takva da je $f(U) \subseteq V$. U protivnom slučaju kažemo da f ima **prekid** u točki x_0.

Prisjetimo li se da sma sa $\mathcal{O}(x)$ označili skup svih okolina točke x u X, onda gornji uvjet možemo zapisati u slijedećem obliku:

$$(\forall V \in \mathcal{O}(f(x_0))(\exists U \in \mathcal{O}(x_0))f(U) \subseteq V. \tag{4.1}$$

Kako je nadskup okoline opet okolina, uvjet (4.1) može se zapisati i u slijedećem ekvivalentnom obliku:

$$(\forall V \in \mathcal{O}(f(x_0))f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(x_0). \tag{4.2}$$

Definicija 4.2. Neka su X i Y topološki prostori. Kažemo da je preslikavanje $f : X \to Y$ **neprekidno na skupu** $A \subseteq X$ ako je f neprekidno u svakoj točki $x \in A$. Ako je f neprekidno na X, onda kažemo kraće da je preslikavanje f **neprekidno**.

Teorem 4.3. *Neka su X, Y, Z topološki prostori i neka su dana preslikavanja $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$. Ako je preslikavanje f neprekidno u točki $x_0 \in X$*

i preslikavanje g neprekidno u točki $y_0 = f(x_0) \in Y$, onda je kompozicija $h = gf : X \to Z$ neprekidna u točki x_0.

Dokaz. Neka je W proizvoljna okolina točke $z_0 = h(x_0) = gf(x_0) = g(y_0)$. Jer je g neprekidna u točki y_0, postoji okolina V od y_0 za koju je $g(V) \subseteq W$. Budući da je f neprekidna u x_0, postoji okolina U od x_0 za koju je $f(U) \subseteq V$. Stoga je $h(U) = g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W$, što dokazuje tvrdnju. $\square$

Korolar 4.4. *Neka su X, Y, Z topološki prostori i $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ neprekidna preslikavanja. Tada je i kompozicija $h = gf : X \to Z$ neprekidno preslikavanje.*

Lako se vidi da je identiteta $\mathrm{Id}_X : X \to X$ neprekidno preslikavanje za svaki prostor X. Općenito, inkluzija $i : X \to Y$, $X \subseteq Y$, je neprekidno preslikavanje. I konstantno preslikavanje je uvijek neprekidno. Ako je X diskretan prostor, svako preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno.

Ako je preslikavanje $f : X \to Y$ neprekidno i $A \subseteq X$, onda je restrikcija $g = f|_A : A \to Y$ neprekidno preslikavanje. U tom slučaju za preslikavanje f kažemo da je **neprekidno proširenje** preslikavanja g.

Neka je $f : X \to Y$ preslikavanje, $A \subseteq X$, i $x_0 \in \operatorname{Int} A$. Ako je preslikavanje $g = f|_A : A \to Y$ neprekidno u točki x_0, onda je i preslikavanje $f : X \to Y$ neprekidno u točki x_0. Zato, ako je $U \subseteq X$ otvoren skup, onda neprekidnost preslikavanja $f|_U$ povlači neprekidnost preslikavanja $f : X \to Y$ na skupu U.

Teorem 4.5. *Neka su X, Y topološki prostori i $f : X \to Y$ preslikavanje. Tada su slijedeća svojstva međusobno ekvuvalentna:*

(i) *f je neprekidno preslikavanje.*

(ii) *Za svaki otvoreni skup $V \subseteq Y$ je i skup $f^{-1}(V)$ otvoren.*

(iii) *Za svaki zatvoreni skup $F \subseteq Y$ je i skup $f^{-1}(F)$ zatvoren.*

(iv) *Za svaki skup $A \subseteq X$ je $f(\operatorname{Cl} A) \subseteq \operatorname{Cl} f(A)$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je V otvoren skup u Y. Za svaku točku $x \in f^{-1}(V)$, V je okolina točke $f(x)$ te postoji okolina U točke x takva da je $f(U) \subseteq V$, tj. $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$. Dakle, x je nutarnja točka skupa $f^{-1}(V)$. Zato je $f^{-1}(V) \subseteq \operatorname{Int} f^{-1}(V)$, što dokazuje da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka je $F \subseteq Y$ zatvoren skup. Tada je $V = Y \setminus F$ otvoren skup pa je prema (ii) skup $f^{-1}(Y \setminus F)$ otvoren u X. Budući da je $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F)$, skup $f^{-1}(F)$ je zatvoren u X.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Neka je A proizvoljan podskup od X. Prema (iii) je $f^{-1}(\operatorname{Cl} f(A))$ zatvoren skup u X i vrijedi $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\operatorname{Cl} f(A))$. Budući da je $\operatorname{Cl} A$ najmanji zatvoren skup koji sadrži A, vrijedi $\operatorname{Cl} A \subseteq f^{-1}(\operatorname{Cl} f(A))$, tj. $f(\operatorname{Cl} A) \subseteq \operatorname{Cl} f(A)$.

$(iv) \to (i)$. Neka je V okolina točke $f(x)$ u Y. Promotrimo skup $A = f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$. Pokažimo prvo da točka x ne pripada skupu $\operatorname{Cl} A$. Ako bi $x \in \operatorname{Cl} A$, prema (iv) bi $f(x) \in f(\operatorname{Cl} A) \subseteq \operatorname{Cl} f(A) = \operatorname{Cl} f(f^{-1}(Y \setminus V)) = \operatorname{Cl}(Y \setminus V)$, što je nemoguće, jer je V okolina točke $f(x)$ pa je, prema teoremu, 1.31, $f(x) \in \operatorname{Int} V = Y \setminus \operatorname{Cl}(Y \setminus V)$. Dakle, $x \in X \setminus \operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{Cl}(X \setminus f^{-1}(V)) = \operatorname{Int} f^{-1}(V)$ pa je $U = f^{-1}(V)$ okolina točke x za koju je $f(U) \subseteq V$, tj. f je neprekidno preslikavanje. $\square$

Neka su X' i X'' topološki prostori. Tada su projekcije $p' : X' \times X'' \to X'$ i $p'' : X' \times X'' \to X''$ neprekidna preslikavanja, jer za svaki otvoreni skup $V' \subseteq X'$ je $(p')^{-1}(V') = V' \times X''$ otvoren skup i slično za p''.

Korolar 4.6. *Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna rastuća funkcija i $A \subset \mathbb{R}$ neprazan odozdo (odnosno odozgo) omeđen skup, onda je i $f(A)$ neprazan odozdo (odnosno odozgo) omeđen skup i vrijedi $f(\inf A) = \inf f(A)$ (odnosno $f(\sup A) = \sup f(A)$).*

Dokaz. $\square$

Napomena 4.7. Neka su $(X, \mathcal{U})$ i $(Y, \mathcal{V})$ topološki prostori. Svako preslikavanje $f : X \to Y$ inducira preslikavanje $F : 2^Y \to 2^X$ među partitivnim skupovima definirano formulom $F(V) = f^{-1}(V)$ za $V \in 2^Y$. Iz teorema 4.5 slijedi da je f neprekidno ako i samo ako je $F(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U}$.

Teorem 4.8. *Neka su X i Y topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je homeomorfizam ako i samo ako postoji preslikavanje $g : Y \to X$ takvo da je $gf = \mathrm{Id}_X$, $fg = \mathrm{Id}_Y$ te da su i f i g neprekidna preslikavanja.*

Dokaz. □

Lako se vidi da se uvjet neprekidnosti (4.1) može zamijeniti slijedećim ekvivalentnim uvjetom:

$$(\forall V \in \mathcal{B}(f(x_0)))(\exists U \in \mathcal{B}(x_0))f(U) \subseteq V. \tag{4.3}$$

U slučaju metričkih prostora (X, d_X), (Y, d_Y) za bazu okolina točke x možemo uzeti skup svih kugala $K(x, r) \subseteq X$, $r > 0$. Tada se uvjet $f(K(x_0, \delta)) \subseteq K(f(x_0), \varepsilon)$ može zapisati i u slijedećem obliku:

$$(\forall x \in X)\ d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Zato vrijedi slijedeći teorem:

Teorem 4.9. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Teorem 4.10. *Neka su X, Y topološki prostori i $f : X \to Y$ preslikavanje neprekidno u točki $x_0 \in X$. Ako niz (x_n) u X konvergira prema točki x_0, onda niz $(f(x_n))$ u Y konvergira prema točki $f(x_0)$.*

Dokaz. Neka je V proizvoljna okolina točke $f(x_0)$. Po definiciji neprekidnosti postoji okolina U točke x_0 za koju je $f(U) \subseteq V$. Jer je $x_0 = \lim(x_n)$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geqslant n_0$ povlači $x_n \in U$. Zato je $f(x_n) \in f(U) \subseteq V$ za $n \geqslant n_0$, što dokazuje tvrdnju. □

U metričkim prostorima vrijedi obrat teorema 4.10.

Teorem 4.11. *Neka su (X, d_X), (Y, d_Y) metrički prostori, $f : X \to Y$ preslikavanje i $x_0 \in X$ točka. Ako za svaki niz (x_n) u X koji konvergira prema x_0 niz $(f(x_n))$ konvergira prema $f(x_0)$, onda je f neprekidno u x_0.*

Dokaz. Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi, tj. da da f ima svojstva iz teorema, ali da nije neprekidna u x_0. Tada

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in X)\ d_X(x, x_0) < \delta \ \&\ d_Y(f(x), f(x_0)) \geqslant \varepsilon.$$

Odaberemo li za δ brojeve $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, dobivamo za svaki $n \in \mathbb{N}$ točku $x_n \in X$ takvu da je $d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ & $d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geqslant \varepsilon > 0$. Tako je dobiven niz (x_n) u X koji konvergira prema x_0 takav da niz $f(x_n)$ ne konvergira prema $f(x_0)$, što je u kontradikciji s pretpostavkom teorema. □

Teorem 4.11 ne vrijedi općenito u Hausdorffovim prostorima.

Teorem 4.12. *Neka su $f_1, f_2 : X \to Y$ neprekidna preslikavanja topološkog prostora X u Hausdorffov prostor Y. Tada je skup $A = \{x \in X : f_1(x) = f_2(x)\}$ zatvoren u X.*

Dokaz. Neka je $G = X \setminus A$. Dokazat ćemo da je G otvoren skup. Neka je $x \in G$, tj. $f_1(x) \neq f_2(x)$. Budući da je Y Hausdorffov prostor, postoje disjunktne okoline V_1 oko $f_1(x)$ i V_2 oko $f_2(x)$. Zbog neprekidnosti postoje okoline U_1 i U_2 točke x za koje je $f_1(U_1) \subseteq V_1$ i $f_2(U_2) \subseteq V_2$. Skup $U = U_1 \cap U_2$ je okolina točke x za koju su skupovi $f_1(U)$ i $f_2(U)$ disjunktni pa je $U \subseteq G$, što dokazuje da je G otvoren skup, tj. da je A zatvoren. □

Korolar 4.13. *Ako je Y Hausdorffov prostor i $f_1, f_2 : X \to Y$ neprekidna preslikavanja koja se podudaraju na skupu $D \subseteq X$ koji je gust u X, onda je $f_1 = f_2$.*

Dokaz. Neka je $A = \{x \in X : f_1(x) = f_2(x)\}$. Po pretpostavci je $D \subseteq A$, a po teoremu 4.12 vrijedi $X = \operatorname{Cl} D \subseteq \operatorname{Cl} A = A$. □

Korolar 4.13 kaže da ako je neprekidno preslikavanje $f : A \to Y$ nekog skupa $A \subseteq X$ u Hausdorffov prostor Y moguće proširiti do neprekidnog preslikavanja $g : \operatorname{Cl} A \to Y$, $g|_A = f$, onda je to moguće samo na jedan način.

Teorem 4.14. *Neka su $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ neprekidna preslikavanja. Tada su skupovi $A = \{x \in X : f_1(x) \leqslant f_2(x)\}$ i $B = \{x \in X : f_1(x) \geqslant f_2(x)\}$ zatvoreni u X.*

Dokaz. Neka je $G = X \setminus A$. Dokazat ćemo da je G otvoren skup. Neka je $x \in G$, tj. $f_1(x) > f_2(x)$. Postoje dovoljno maleni intervali V_1 oko $f_1(x)$ i V_2 oko $f_2(x)$ takvi da je $V_1 > V_2$. Kao u dokazu teorema 4.12, odaberimo okolinu U točke x za koju je $f_1(U) \subseteq V_1$ i $f_2(U) \subseteq V_2$. Tada je $f_1(U) > f_2(U)$, što dokazuje da je $U \subseteq G$. Tvrdnja za skup B dokazuje se analogno. □

Korolar 4.15. *Neka su $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ neprekidna preslikavanja. Neka je $D \subseteq X$ gust podskup od X. Ako je $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ ($f_1(x) \geqslant f_2(x)$) za svaki $x \in D$, onda je $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ ($f_1(x) \geqslant f_2(x)$) za svaki $x \in X$.*

Teorem 4.16. *Neka su (X', d'), (X'', d''), (Y, d) metrički prostori i $U \subseteq X' \times X''$. Preslikavanje $f : U \to Y$ je neprekidno u točki $x_0 = (x'_0, x''_0) \in U$ ako i samo ako vrijedi*

$$\begin{gathered}(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x = (x', x'') \in U)\\ (d'(x', x'_0) < \delta \ \&\ d''(x'', x''_0) < \delta) \implies d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.\end{gathered}$$

Dokaz. □

Teorem 4.17. *Neka su X, Y' i Y'' topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y' \times Y''$ je neprekidno ako i samo ako su neprekidna preslikavanja $p'f : X \to Y'$ i $p''f : X \to Y''$, gdje su $p' : Y' \times Y'' \to Y'$ i $p'' : Y' \times Y'' \to Y''$ projekcije.*

Dokaz. Projekcije p' i p'' su neprekidna preslikavanja pa ako je f neprekidno, onda su i kompozicije $p'f$, $p''f$ neprekidne.

Obrat. Pretpostavimo da su $p'f$ i $p''f$ neprekidna preslikavanja. Da bismo dokazali da je tada f neprekidno preslikavanje u proizvoljnoj točki $x \in X$, dovoljno je pokazati da za svaku okolinu V od $f(x)$ iz baze okolina za $f(x)$ postoji okolina U od x za koju je $f(U) \subseteq V$. Jednu bazu okolina točke $f(x)$ tvore svi skupovi oblika $V = V' \times V''$, $f(x) \in V$, gdje je V' otvoren skup u Y' i V'' otvoren skup u Y''. Budući da je $p'f$ neprekidno preslikavanje i da je $p'f(x) \in V'$, postoji okolina U' točke x u X za koju je $p'f(U') \subseteq V'$. Slično postoji okolina U'' točke x u X za koju je $p''f(U'') \subseteq V''$. Zato je $U = U' \cap U''$ okolina točke x u X za koju vrijedi $f(U) \subseteq V' \times V'' = V$, što dokazuje neprekidnos preslikavanja f. □

Definicija 4.18. Neka je X topološki prostor, Y Hausdorffov prostor, $x_0 \in X'$ gomilište od X, $y_0 \in Y$ i $f : X \to Y$ preslikavanje. Neka je $\overline{f} : X \to Y$ preslikavanje definirano sa $\overline{f}|_{X \setminus \{x_0\}} = f|_{X \setminus \{x_0\}}$ i $\overline{f}(x_0) = y_0$. Kažemo da je y_0 **limes** ili **granična vrijednost preslikavanja** f **u točki** x_0, ako je preslikavanje $\overline{f}$ neprekidno u točki x_0.

Iz definicije je jasno da je preslikavanje f neprekidno u točki x_0, ako i samo ako postoji $\lim_{x \to x_0} f$ i vrijedi $\lim_{x \to x_0} f = f(x_0)$. Također, preslikavanje $\overline{f}$ se definira neovisno o vrijednosti $f(x_0)$. Stoga definicija ima smisla i u slučaju kada je f definiran samo na $X \setminus \{x_0\}$. Ako je U neka okolina točke x_0, onda $\lim_{x \to x_0} f$ ovisi samo o $f|_{U \setminus \{x_0\}}$. Zato vrijedi slijedeći teorem:

Teorem 4.19. *Neka je X topološki prostor, Y Hausdorffov prostor, $x_0 \in X'$ gomilište od X, $y_0 \in Y$ i $f : X \to Y$ preslikavanje. Tada je $y_0 = \lim_{x \to x_0} f$ ako i samo ako za svaku okolinu V točke y_0, postoji okolina U točke x_0 za koju je $f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$.*

Iz teorema zaključujemo da je $\lim_{x \to x_0} f = y_0$ jedinstven ako postoji.

Teorem 4.20. *Neka su (X, d_X), (Y, d_Y) metrički prostori, $x_0 \in X'$ gomilište od X, $y_0 \in Y$ i $f : X \to Y$ preslikavanje. Tada su slijedeći uvjeti međusobno ekvivalentni:*

(i) $y_0 = \lim_{x \to x_0} f$.

(ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X \setminus \{x_0\})\ d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon$.

(iii) *Za svaki niz* (x_n) *u* $X \setminus \{x_0\}$, $((x_n) \to x_0) \implies ((f(x_n)) \to y_0)$.

Dokaz. □

Teorem 4.21. *Neka je* X *topološki prostor,* Y *i* Z *Hausdorffovi prostori,* $x_0 \in X'$ *gomilište od* X *i neka su* $f : X \to Y$ *i* $g : Y \to Z$ *preslikavanja. Ako je* $y_0 = \lim_{x \to x_0} f$ *i ako je preslikavanje* g *neprekidno u* y_0*, onda je*

$$\lim_{x \to x_0} (gf) = g(\lim_{x \to x_0} f) = g(y_0).$$

Dokaz. Neka je $\overline{f} : X \to Y$ preslikavanje koje se na $X \setminus \{x_0\}$ podudara sa f i za koje je $\overline{f}(x_0) = y_0$. Po pretpostavci je $\overline{f}$ neprekidno u točki x_0 pa je i preslikavanje $g\overline{f} : X \to Z$ neprekidno u x_0. Budući da je $g\overline{f}|_{X \setminus \{x_0\}} = gf|_{X \setminus \{x_0\}}$ i $g\overline{f}(x_0) = g(y_0)$, tvrdnja slijedi. □

Teorem 4.22. *Neka je* T *topološki prostor i* (x_n) *niz realnih funkcija* $x_n : T \to \mathbb{R}$ *koji uniformno konvergira prema funkciji* $x_0 : T \to \mathbb{R}$*. Ako je svaka od funkcija* x_n *neprekidna u točki* $t_0 \in T$*, onda je i funkcija* x_0 *neprekidna u točki* t_0*. Ako je svaka od funkcija* x_n *neprekidna na skupu* $A \subseteq T$*, onda je i funkcija* x_0 *neprekidna na skupu* A*.*

Dokaz. Prema definiciji uniformne konvergencije za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|x_n(t) - x_0(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ za svaki $t \in T$ i za svaki $n \geqslant n_0$. Za $n = n_0$ vrijedi, dakle,

$$(\forall t \in T)\ |x_{n_0}(t) - x_0(t)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.5}$$

Za $t = t_0$ iz (4.5) dobivamo

$$|x_{n_0}(t_0) - x_0(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.6}$$

Po pretpostavci, funkcija x_{n_0} je neprekidna u točki t_0 pa postoji okolina U točke t_0 takva da vrijedi

$$(\forall t \in U)\ |x_{n_0}(t) - x_{n_0}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.7}$$

Iz (4.5), (4.7) i (4.6) zaključujemo da za svaki $t \in U$ vrijedi

$$|x_0(t) - x_0(t_0)| \leqslant |x_0(t) - x_{n_0}(t)| + |x_{n_0}(t) - x_{n_0}(t_0)| + |x_{n_0}(t_0) - x_0(t_0)| < \varepsilon,$$

što dokazuje da je funkcija x_0 neprekidna u točki t_0. □

Definicija 4.23. Neka su (X, d_X), (Y, d_Y) metrički prostori. Kažemo da je preslikavanje $f : X \to Y$ **uniformno neprekidno** (ili **jednoliko neprekidno**) **na** X ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in X)\ d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon. \quad (4.8)$$

Svaka uniformno neprekidna funkcija je i neprekidna. Da obrat općenito ne vrijedi, pokazuje npr. funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dana formulom $f(x) = \frac{1}{x}$ koja je neprekidna, ali nije uniformno neprekidna.

Teorem 4.24. *Neka su (X, d_X), (Y, d_Y) metrički prostori i neka je $f : X \to Y$ uniformno neprekidno preslikavanje. Ako je niz (x_n) Cauchyjev u (X, d_X), tada je niz $(f(x_n))$ Cauchyjev u (Y, d_Y).*

Dokaz. Po pretpostavci, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da $d_X(x, x') < \delta$ povlači $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ za svaki $x, x' \in X$. Budući da je (x_n) Cauchyjev niz, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $m, n \geqslant n_0$ povlači $d_X(x_n, x_m) < \delta$ pa je $d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ i niz $(f(x_n))$ je Cauchyjev. □

Teorem 4.25. *Neka su (X, d_X), (Y, d_Y) metrički prostori, neka je $A \subseteq X$ gust podskup od X i neka je $f : A \to Y$ uniformno neprekidno preslikavanje. Ako je (Y, d_Y) potpun prostor, onda postoji jedno jedino neprekidno preslikavanje $g : X \to Y$ koje proširuje f, $g|_A = f$. Preslikavanje g je uniformno neprekidno.*

Dokaz. Jedinstvenost neprekidnog proširenja g, ako postoji, slijedi iz korolara 4.13. Dokažimo egzistenciju preslikavanja g.

Jer je skup A gust u X, za svaku točku $x \in X$ postoji niz (a_n) u A koji konvergira prema x. Budući da je (a_n) Cauchyjev niz, po teoremu 4.24 i niz $(f(a_n))$ je Cauchyjev u Y. Kako je Y potpun, postoji $\lim f(a_n) \in Y$.

Pokažimo prvo da $\lim f(a_n)$ ne ovisi o izboru niza (a_n), već samo o točki x. Neka je (a'_n) neki drugi niz u A koji konvergira prema x. Tada i niz $a_1, a'_1, \ldots, a_n, a'_n, \ldots$ konvergira prema x pa postoji limes y niza

$$f(a_1), f(a'_1), \ldots, f(a_n), f(a'_n), \ldots.$$

Kako svaki podniz konvergentnog niza konvergira prema limesu tog niza, vrijedi $\lim f(a_n) = y = \lim f(a'_n)$.

Sada definiramo $g(x) = \lim f(a_n)$, $a_n \in A$, $(a_n) \to x$. Ako je $x = a \in A$, možemo za niz (a_n) odabrati konstantni niz $a_n = a$ pa je očigledno $g(a) = \lim f(a_n) = f(a)$, što dokazuje da je $g|_A = f$.

Pokažimo na kraju da je $g : X \to Y$ uniformno neprekidno preslikavanje. Budući da je preslikavanje f uniformno neprekidno, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da $d_X(a, a') < \delta$, $a, a' \in A$, povlači da je $d_Y(f(a), f(a')) < \varepsilon$. Neka su $x, x' \in X$, $d_X(x, x') < \delta$ i neka su (a_n), (a'_n) nizovi u A koji konvergiraju prema x, x', redom. Tada je $\lim d_X(a_n, a'_n) = d_X(x, x') < \delta$. Zato postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi $d_X(a_n, a'_n) < \delta$ pa je $d_Y(f(a_n), f(a'_n)) < \varepsilon$ za $n \geqslant n_0$. Prelaskom na limes dobivamo $d_Y(g(x), g(x')) = d_Y(\lim f(a_n), \lim f(a'_n)) \leqslant \varepsilon$, što pokazuje da je preslikavanje g uniformno neprekidno. $\square$

Teorem 4.26 (Urysonova lema)**.** *Neka je (X, d) metrički prostor i neka su A, B neprazni, zatvoreni, disjunktni podskupovi od X. Tada postoji neprekidno preslikavanje $g : X \to I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$ takvo da je $g|_A = 0$ i $g|_B = 1$.*

Dokaz. Preslikavanja $x \mapsto d(x, A)$ i $x \mapsto d(x, B)$ su neprekidna za neprazne podskupove $A, B \subseteq X$. Budući da su skupovi A i B zatvoreni u X, vrijedi $d(x, A) = 0$ ako i samo ako je $x \in A$, odnosno $d(x, B) = 0$ ako i samo ako je $x \in B$, redom. Budući da je $A \cap B = \emptyset$, vrijedi $d(x, A) + d(x, B) > 0$ za svaki $x \in X$. Zato je formulom

$$g(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}, \; x \in X,$$

dobro definirana neprekidna funkcija $g : X \to I$ i vrijedi $g(x) = 0$ za $x \in A$ i $g(x) = 1$ za $x \in B$. □

Definicija 4.27. Za Hausdorffov prostor X kažemo da je **normalan** ako za svaki par nepraznih zatvorenih disjunktnih skupova $A, B \subset X$ postoji neprekidna funkcija $g : X \to [0, 1]$ takvo da je $g|_A = 0$ i $g|_B = 1$.

Urysonova lema, dakle, kaže da su metrički prostori normalni. Postoje, međutim, normalni prostori koji nisu metrički.

Primijetimo da je za svaka dva realna broja a, b, $a < b$, preslikavanje $\varphi : [0, 1] \to [a, b]$ dano formulom $\varphi(t) = (b - a)t + a$, $t \in [0, 1]$, homeomorfizam, $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$. Zato u definiciji 4.27 možemo segment $[0, 1]$ zamijeniti proizvoljnim segmentom $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Teorem 4.28. *Neka je (X, d) separabilan metrički prostor. Tada postoji prebrojiva familija neprekidnih funkcija $f_n : X \to [0, 1]$ takva da za svaki par različitih točaka $x, x' \in X$ postoji bar jedna funkcija f_n koja ima različite vrijednosti u tim točkama, $f_n(x) \neq f_n(x')$. Kaže se da familija (f_n)* **razlikuje točke** *prostora X.*

Dokaz. Neka je D prebrojiv gust podskup od X. Za svaki $a \in D$ i svaki par racionalnih brojeva $0 < q_1 < q_2$ postoji neprekidna realna funkcija $f := f_{(a,q_1,q_2)} : X \to [0, 1]$ takva da je $f|_{\mathrm{Cl}\, K(a,q_1)} = 1$ i $f|_{X \setminus K(a,q_2)} = 0$. Na taj način smo dobili prebrojivu familiju neprekidnih funkcija. Pokažimo još da ta familija razlikuje točke od X. Neka su $x, x' \in X$, $x \neq x'$. Tada postoji $a \in D$ i $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $0 < q_1 < q_2$, takvi da je $x \in K(a, q_1)$ i $x' \in X \setminus K(a, q_2)$ pa je $f_{(a,q_1,q_2)}(x) = 1 \neq 0 = f_{(a,q_1,q_2)}(x')$. □

Teorem 4.29. *Hausdorffov prostor X je normalan ako i samo ako vrijedi* **Tietzeov uvjet***:*

(T_4) *Za svaki zatvoreni skup $F \subseteq X$ i svaki otvoreni skup $V \subseteq X$, $F \subseteq V$, postoji otvoreni skup $U \subseteq X$ takav da je*

$$F \subseteq U \subseteq \mathrm{Cl}\, U \subseteq V. \tag{4.9}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je X normalan. Budući da je F zatvoren, V otvoren i $F \subseteq V$, skupovi F i $X \setminus V$ su disjunktni zatvoreni skupovi pa postoji neprekidno preslikavanje $g : X \to [0,1]$ takvo da je $g|_F = 0$ i $g|_{X \setminus V} = 1$. Zato otvoreni skup $U := g^{-1}[0, \frac{1}{2})$ zadovoljava (4.9), jer je $\operatorname{Cl} U = g^{-1}[0, \frac{1}{2}]$.

Obrat. Pretpostavimo da je X Hausdorffov prostor u kome vrijedi (T_4). Neka su $A, B \subset X$ neprazni zatvoreni disjunktni skupovi. Definirat ćemo za svaki $t \in [0,1]$ otvoreni skup $U_t \subset X$ tako da vrijedi:

$$A \subseteq U_0 \subseteq \operatorname{Cl} U_0 \subseteq U_1 = X \setminus B, \tag{4.10}$$

$$t < t' \implies \operatorname{Cl} U_t \subseteq U_{t'},\ 0 \leqslant t, t' \leqslant 1. \tag{4.11}$$

Označimo sa D skup svih brojeva $t \in I$ oblika $t = \frac{m}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}$. Definirajmo prvo indukcijom po n skupove U_t za $t \in D$. Za $n = 0$ neka je U_0 takav da vrijedi (4.10); to je moguće jer vrijedi (T_4). Pretpostavimo sada da smo već definirali otvorene skupove U_s za $s = \frac{m}{2^k} \in D$ za $k < n$ i u skladu sa (4.11). Koristeći (T_4) definiramo za svaki $i \in \{0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1\}$ otvoreni skup $U_{\frac{2i+1}{2^n}}$ takav da je

$$\operatorname{Cl} U_{\frac{i}{2^{n-1}}} \subseteq U_{\frac{2i+1}{2^n}} \subseteq \operatorname{Cl} U_{\frac{2i+1}{2^n}} \subseteq U_{\frac{i+1}{2^{n-1}}}. \tag{4.12}$$

Za proizvoljan $t \in I$ definiramo U_t formulom

$$U_t = \bigcup_{s \in D \cap [0,t]} U_s. \tag{4.13}$$

Definicija (4.13) u skladu je s prijašnjom definicijom skupova U_t za $t \in D$. Budući da je skup D gust u I, za svaki par $t, t' \in I$, $t < t'$, postoje $s, s' \in D$ takve da je $t \leqslant s < s' \leqslant t'$. Zato, prema (4.13) i prema (4.11) primijenjenoj na $s < s'$, vrijedi

$$U_t \subseteq U_s \subseteq \operatorname{Cl} U_s \subseteq U_{s'} \subseteq U_{t'} \tag{4.14}$$

pa vrijedi (4.11) za svaki $t < t'$ iz I.

Sada definiramo preslikavanje $f : X \to I$ formulom:

$$f(x) = \inf\{t \in [0,1] : x \in U_t\}, \tag{4.15}$$

a ako je $\{t \in [0,1] : x \in U_t\} = \emptyset$, definiramo $f(x) = 1$. Primijetimo da iz (4.10) i (4.11) slijedi da je $f(x) = 0$ za $x \in A$ i $f(x) = 1$ za $x \in B$.

Dokažimo na kraju da je f neprekidna. Ako je $x \in U_s$, $s \in I$, tada je $f(x) \leqslant s$, jer je $s \in \{t \in [0,1] : x \in U_t\}$, a $f(x) = \inf\{t \in [0,1] : x \in U_t\}$. Zato je

$$f(U_s) \subseteq [0,s], \ s \in I. \tag{4.16}$$

Nadalje, $f(x) < s$ povlači $x \in U_s$, jer prema (4.15) postoji $t < s$ takav da je $x \in U_t$, a prema (4.11) je $U_t \subseteq U_s$. Zato je

$$f(X \setminus \operatorname{Cl} U_s) \subseteq f(X \setminus U_s) \subseteq [s,1], \ s \in I. \tag{4.17}$$

Primijetimo da skupovi $[s,s']$ za $s < s'$ tvore bazu okolina svake točke iz I, te da su skupovi $U_{s'}$ i $X \setminus \operatorname{Cl} U_s$ otvoreni u X. Zato iz (4.16), (4.17) i (4.11) slijedi da za svaki $x \in X$ i za svaki par $s, s' \in I$ takav da $s < f(x) < s'$, postoji otvorena okolina U od x, $U = U_{s'} \cap (X \setminus \operatorname{Cl} U_s)$, takva da $f(U) \subseteq [s,s']$. Dakle, preslikavanje f je neprekidno u svakoj točki $x \in X$ te je teorem dokazan. $\square$

Teorem 4.30 (Tietzeov teorem)**.** *Neka je X normalan prostor, $A \subseteq X$ zatvoren podskup od X i $f : A \to [-1,1] \subset \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Tada postoji neprekidno preslikavanje $g : X \to [-1,1]$ koje proširuje f, tj. $g|_A = f$.*

Da bismo dokazali Tietzeov teorem treba nam slijedeća lema.

Lema 4.31. *Neka je X normalan prostor, $A \subseteq X$ zatvoren podskup od X, $\gamma > 0$ i neka je $h : A \to [-\gamma,\gamma] \subseteq \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Tada postoji neprekidno preslikavanje $h' : X \to \mathbb{R}$ takvo da je $h'(X) \subseteq [-\frac{\gamma}{3}, \frac{\gamma}{3}]$, $|h(a) - h'(a)| \leqslant \frac{2}{3}\gamma$, $a \in A$.*

Dokaz. Neka je $A_0 = h^{-1}[-\gamma, -\frac{\gamma}{3}] \subseteq A$, $A_1 = h^{-1}[\frac{\gamma}{3}, \gamma] \subseteq A$. Skupovi A_0, A_1 su zatvoreni u A, dakle i u X, jer je $h : A \to [-\gamma,\gamma]$ neprekidno preslikavanje. Budući da je $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, postoji neprekidno preslikavanje $h' : X \to [-\frac{\gamma}{3}, \frac{\gamma}{3}]$

takvo da je $h'(A_0) = -\frac{\gamma}{3}$, $h'(A_1) = \frac{\gamma}{3}$. Očigledno h' zadovoljava uvjet $h'(X) \subseteq [-\frac{\gamma}{3}, \frac{\gamma}{3}]$. Pokažimo da h' zadovoljava i uvjet $|h(a) - h'(a)| \leqslant \frac{2}{3}\gamma$, $a \in A$. Neka je $a \in A_0$. Tada vrijedi $h'(a), h(a) \in [-\gamma, -\frac{\gamma}{3}]$ pa je $|h(a) - h'(a)| \leqslant \frac{2}{3}$. Slično je u slučaju $a \in A_1$. Ako je $a \in A \setminus (A_0 \cup A_1)$, onda je $h'(a), h(a) \in [-\frac{\gamma}{3}, \frac{\gamma}{3}]$ pa je uvjet opet zadovoljen. □

Dokaz Tietzeovog teorema. Neka je X normalan prostor, $A \subseteq X$ zatvoren podskup i $f : A \to [-1, 1]$ neprekidna funkcija. Pokazat ćemo da se f može proširiti do neprekidne funkcije $g : X \to [-1, 1]$.

Indukcijom po n definirat ćemo niz neprekidnih funkcija $g_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, tako da je

$$|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \ x \in X, \tag{4.18}$$

$$|f(a) - \sum_{i=0}^{n} g_i(a)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \ a \in A. \tag{4.19}$$

Preslikavanje $g_0 : X \to \mathbb{R}$ dobivamo primjenom leme 4.31 na $h = f$ i $\gamma = 1$ te vrijedi $|g_0(x)| \leqslant \frac{1}{3}$ za $x \in X$ i $|f(a) - g_0(a)| \leqslant \frac{2}{3}$, za $a \in A$.

Pretpostavimo da smo funkcije $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ već definirali u skladu sa (4.18) i (4.19). Primjenom leme 4.31 na $h = f - \sum_{i=0}^{n-1}(g_i|_A) : A \to \mathbb{R}$ i $\gamma = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ dobivamo preslikavanje $h' = g_n : X \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi (4.18) i (4.19).

Kako geometrijski red $\sum (2/3)^n$ konvergira, zbog (4.18) red funkcija $\sum g_n$ uniformno konvergira na X pa je formulom $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$, $x \in X$, dobro definirana neprekidna realna funkcija $g : X \to \mathbb{R}$. Osim toga je

$$|g(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |g_n(x)| \leqslant \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1,$$

pa g preslikava X u $[-1, 1]$. Graničnim prijelazom $n \to \infty$ u (4.19) dobivamo da je $f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a) = g(a)$ za svaki $a \in A$, jer je $\lim(2/3)^n = 0$. Preslikavanje $g : X \to [-1, 1]$ je zato neprekidno proširenje preslikavanja f. □

Korolar 4.32. *Neka je X normalan prostor, $A \subseteq X$ zatvoren podskup od X i $f : A \to (-1,1) \subset \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Tada postoji neprekidno preslikavanje $g : X \to (-1,1)$ koje proširuje f, tj. $g|_A = f$.*

Korolar 4.33. *Neka je X normalan prostor, $A \subseteq X$ zatvoren podskup od X i $f : A \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Tada postoji neprekidno preslikavanje $g : X \to \mathbb{R}$ koje proširuje f, tj. $g|_A = f$.*

5 Povezani prostori

Prototip prostora koji nije povezan je prostor $\{0,1\}$ koji se sastoji samo od dvije izolirane točke. Zato taj prostor koristimo u općoj definiciji povezanosti prostora.

Definicija 5.1. Kažemo da je topološki prostor X **povezan** ako je svako neprekidno preslikavanje $f : X \to \{0,1\}$ konstantno. U protivnom slučaju, tj. ako postoji neprekidna surjekcija $g : X \to \{0,1\}$, kažemo da je X **nepovezan**. Za podskup $Y \subseteq X$ kažemo da je povezan (nepovezan) ako je Y povezan (nepovezan) kao potprostor od X.

Teorem 5.2. *Neka je X topološki prostor. Tada su slijedeća svojstva međusobno ekvivalentna:*

(i) *X je povezan.*

(ii) *Ako je podskup $U \subseteq X$ istodobno otvoren i zatvoren, onda $U = \emptyset$ ili $U = X$.*

(iii) *Ne postoje otvoreni skupovi $U_1, U_2 \subseteq X$ za koje vrijedi $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $U_1 \cup U_2 = X$.*

(iv) *Ne postoje zatvoreni skupovi $F_1, F_2 \subseteq X$ za koje vrijedi $F_1 \neq \emptyset$, $F_2 \neq \emptyset$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, $F_1 \cup F_2 = X$.*

Dokaz. $(i) \implies (ii)$. Neka je X povezan prostor i $U \subseteq X$ skup koji je otvoren i zatvoren. Pretpostavimo $U \neq \varnothing$ i $U \neq X$. Definiramo preslikavanje $f : X \to \{0,1\}$ tako da je $f|_U = 0$ i $f|_{X \setminus U} = 1$. Preslikavanje f je neprekidno, jer su skupovi $f^{-1}(0) = U$ i $f^{-1}(1) = X \setminus U$ otvoreni. Dakle, f je neprekidna surjekcija sa X na $\{0,1\}$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je X povezan. Zato je $U = \varnothing$ ili $X \setminus U = \varnothing$, tj. $U = X$.

$(ii) \implies (iii)$. Pretpostavimo da su $U_1, U_2 \subseteq X$ otvoreni skupovi za koje je $X = U_1 \cup U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Tada je skup $U_1 = X \setminus U_2$ i zatvoren pa iz (ii) slijedi $U_1 = \varnothing$ ili $U_1 = X$, tj. $U_2 = \varnothing$.

$(iii) \implies (iv)$. Pretpostavimo da su $F_1, F_2 \subseteq X$ zatvoreni skupovi za koje je $X = F_1 \cup F_2$ i $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Tada je skup $F_1 = X \setminus F_2$ i otvoren pa iz (iii) slijedi $F_1 = \varnothing$ ili $F_1 = X$, tj. $F_2 = \varnothing$.

$(iv) \implies (i)$. Kada bi postojala neprekidna surjekcija $f : X \to \{0,1\}$, bili bi skupovi $F_1 = f^{-1}(0)$ i $F_2 = f^{-1}(1)$ neprazni zatvoreni skupovi od X i vrijedilo bi $X = F_1 \cup F_2$ i $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, što je u kontradikciji s (iv). □

Teorem 5.3. *Prostor $\mathbb{R}$ realnih brojeva je povezan.*

Dokaz. □

Teorem 5.4. *Neka je X povezan topološki prostor i $f : X \to Y$ neprekidna surjekcija. Tada je i prostor Y povezan.*

Dokaz. Kada bi postojala neprekidna surjekcija $g : Y \to \{0,1\}$, onda bi kompozicija $fg : X \to \{0,1\}$ također bila neprekidna surjekcija, što je protivno pretpostavci da je X povezan. □

Korolar 5.5. *Ako su X i Y homeomorfni prostori te je jedan od njih povezan, onda je i drugi povezan.*

Korolar pokazuje da je povezanost topološko svojstvo.

Teorem 5.6. *Neka je $(X_a, a \in A)$ familija nepraznih podskupova $X_a \subseteq X$ prostora X za koju je $X = \bigcup_{a \in A} X_a$ i $\bigcap_{a \in A} X_a \neq \varnothing$. Ako je svaki od skupova X_a, $a \in A$, povezan, onda je i prostor X povezan.*

Dokaz. Neka je $f : X \to \{0,1\}$ neprekidno preslikavanje. Treba pokazati da je f konstanta. Po pretpostavci $x_0 \in \bigcap_{a\in A} X_a$. Kako je za svaki $a \in A$ preslikavanje $f|_{X_a} : X_a \to \{0,1\}$ neprekidno, a X_a je povezan skup, $f|_{X_a}$ je konstanta. Stoga je $f(X_a) = f(x_0)$ za svaki $a \in A$. Zato je i $f(X) = \bigcup_{a\in A} f(X_a) = f(x_0)$. □

Put u prostoru X je svako neprekidno preslikavanje $\omega : [0,a] \to X$, $a \geqslant 0$. Točku $x_0 = \omega(0)$ zovemo **početak puta** ω, a točku $x_1 = \omega(a)$ **kraj puta** ω. Kažemo da put ω **povezuje** točku x_0 s točkom x_1.

Ako su dana dva puta ω i $\omega' : [0,a'] \to X$ takva da je kraj puta ω početak puta ω', definira se novi put $\omega'' : [0,a+a'] \to X$ formulom:

$$\omega''(t) = \begin{cases} \omega(t), & 0 \leqslant t \leqslant a, \\ \omega'(t-a), & a \leqslant t \leqslant a+a'. \end{cases}$$

Kažemo da je put ω'' **produkt putova** ω i ω', $\omega'' = \omega\omega'$. Ako su produkti $\omega\omega'$ i $\omega'\omega''$ definirani, onda su definirani i jednaki i slijedeći produkti: $(\omega\omega')\omega'' = \omega(\omega'\omega'')$.

Definicija 5.7. Kažemo da je topološki prostor X **povezan putovima** ako za svako par točaka $x_0, x_1 \in X$ postoji put ω koji povezuje x_0 sa x_1.

Teorem 5.8. *Svaki putovima povezan prostor je povezan.*

Dokaz. Odaberimo točku $x_0 \in X$. Po pretpostavci za svaku točku $x \in X$ postoji put $\omega_x : [0,a_x] \to X$ koji povezuje točku x_0 sa x. Kako je svaki segment $I_x = [0,a_x]$ povezan i skup $\omega_x(I_x)$ je povezan. Jer je $x_0 \in \omega_x(I_x)$ za svaki $x \in X$, zaključujemo da je i prostor $X = \bigcup_{x\in X} \omega_x(I_x)$ povezan. □

U normiranom vektorskom prostoru X svaki par točaka $x_0, x_1 \in X$ određuje **pravocrtni put** koji povezuje x_0 i x_1. To je put $\omega : [0,1] \to X$ definiran formulom $\omega(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$, $t \in [0,1]$.

Za skup K normiranog vektorskog prostora X kaže se da je **konveksan** ako za svaki par točaka $x_0, x_1 \in K$ pravocrtni put ω koji povezuje x_0 sa x_1

leži u K, $\omega(I) \subseteq K$. Primijetimo da je svaka kugla $K(y_0, r) \subseteq X$ konveksan skup. Zaista, neka je $x_0, x_1 \in K(y_0, r)$, tj. $\|x_0 - y_0\| < r$ i $\|x_1 - y_0\| < r$. Tada je $\|\omega(t) - y_0\| = \|(1-t)(x_0 - y_0) + t(x_1 - y_0)\| \leqslant (1-t)\|x_0 - y_0\| + t\|x_1 - y_0\| < (1-t)r + tr = r$, tj. $\omega(t) \in K(y_0, r)$.

Kako kugle tvore bazu topologije za X, normirani vektorski prostori imaju važno svojstvo da posjeduju bazu topologije koja se sastoji od konveksnih skupova. Topološki vektorski prostori s tim svojstvom zovu se **lokalno konveksni prostori**.

Svaki konveksni skup K u normiranom vektorskom prostoru X je povezan i sam prostor X je povezan. Posljedično, podskup $K \subseteq \mathbb{R}$ je povezan ako i samo ako je konveksan.

Neka je X topološki prostor. U X definiramo binarnu relaciju $\sim$ na slijedeći način: $x_1 \sim x_2$ ako i samo ako u X postoji povezan podskup $A \subseteq X$ koji sadrži x_1 i x_2. Lako se vidi da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Klase u koje se X raspada po relaciji $\sim$ zovu se **komponente povezanosti** ili kraće **komponente** prostora X. Iz teorema 5.6 slijedi da je komponenta $C(x)$ koja sadrži točku $x \in X$ povezan skup, a iz definicije slijedi da $C(x)$ sadrži svaki povezan skup od X koji sadrži x. Stoga se komponenta $C(x)$ može karakterizirati kao maksimalni povezan skup u X koji sadrži x.

Teorem 5.9. *Neka je X normiran vektorski prostor i $U \subseteq X$ otvoren skup. Tada je i svaka komponenta C skupa U otvoren podskup od X.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in C \subseteq X$. Tada postoji kugla $K(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, sadržana u U. Kako je skup $K(x_0, \varepsilon)$ povezan i sadrži x_0, zbog svojstva maksimalnosti komponenata vrijedi $K(x_0, \varepsilon) \subseteq C$, što dokazuje da je x_0 nutarnja točka skupa C. □

Teorem 5.10. *Svaki neprazni otvoreni skup $U \subseteq \mathbb{R}$ može se prikazati na jedan jedini način kao unija prebrojivo nepraznih disjunktnih skupova oblika (a, b), $(-\infty, b)$, (a, ∞), $\mathbb{R}$.*

Dokaz. □

Teorem 5.11. *Neka je X povezan prostor i $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Neka su $x_0, x_1 \in X$ i $\gamma \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) < \gamma < f(x_1)$. Tada postoji $x \in X$ za koji je $f(x) = \gamma$.*

Dokaz. Skup $f(X)$ je povezan podskup od $\mathbb{R}$ pa je konveksan. Budući da sadrži točke $f(x_0)$ i $f(x_1)$, sadrži i točke $\gamma \in [f(x_0), f(x_1)]$, što dokazuje tvrdnju. $\square$

Korolar 5.12. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Neka je $c \in \mathbb{R}$ takav da je $f(a) < c < f(b)$ ($f(a) > c > f(b)$). Tada postoji točka $x \in (a, b)$ za koju je $f(x) = c$.*

6 Kompaktni prostori

Definicija 6.1. Kažemo da je familija $\mathcal{S} = (S_a, a \in A)$ podskupova S_a skupa X **pokrivač** skupa X ako je $X = \bigcup_{a \in A} S_a$. Pokrivač je **konačan** (**prebrojiv**) ako je A konačan (prebrojiv) skup. Potfamilija $\mathcal{S}' = (S_{a'}, a' \in A')$, $A' \subseteq A$, je **potpokrivač** pokrivača $\mathcal{S}$ ako je i sama pokrivač skupa X.

Definicija 6.2. Kažemo da pokrivač $\mathcal{T} = (T_b, b \in B)$ skupa X **profinjuje** pokrivač $\mathcal{S} = (S_a, a \in A)$ ako za svaki $b \in B$ postoji $a \in A$ takav da je $T_b \subseteq S_a$ i pišemo $\mathcal{T} \preceq \mathcal{S}$. U tom slučaju još kažemo i da je pokrivač $\mathcal{T}$ **upisan** u pokrivač $\mathcal{S}$.

Svaki potpokrivač $\mathcal{S}'$ od $\mathcal{S}$ profinjuje $\mathcal{S}$.

Definicija 6.3. Neka je X topološki prostor. Za pokrivač $\mathcal{U} = (U_a, a \in A)$ skupa X kažemo da je **otvoren pokrivač** prostora X ako je svaki od skupova U_a, $a \in A$, otvoren u X.

Teorem 6.4. *Neka je $\mathcal{B}$ baza topologije prostora X. Tada se u svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X može upisati otvoreni pokrivač $\mathcal{V}$ čiji su svi članovi elementi od $\mathcal{B}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U} = (U_a, a \in A)$ otvoreni pokrivač od X i neka je $\mathcal{B} = \{V_b : b \in B\}$ baza topologije prostora X. Neka je $B_0 = \{b \in B : \exists a \in A, V_b \subseteq U_a\}$. Pokazat ćemo da je $\mathcal{V} = (V_b, b \in B_0) \subseteq \mathcal{B}$ otvoreni pokrivač od X. Jer je $\mathcal{U}$ pokrivač od X, za svaki $x \in X$ postoji $a \in A$ takav da je $x \in U_a$. Kako je U_a otvore skup, a $\mathcal{B}$ baza topologije, postoji $b \in B$ takav da je $x \in V_b \subseteq U_a$ pa je $b \in B_0$. Dakle, $\mathcal{V}$ je otvoreni pokrivač od X, a iz definicije skupa B_0 slijedi da je $\mathcal{V}$ upisan u $\mathcal{U}$. □

Korolar 6.5. *Neka je X separabilan metrički prostor. Tada se u svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X može upisati otvoreni pokrivač $\mathcal{V}$ koji je prebrojiv.*

Dokaz. Budući da je X separabilan, dopušta prebrojivu bazu pa dokaz slijedi iz teorema 6.4. □

Definicija 6.6. Topološki prostor X je **kompaktan** ako se u svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X može upisati konačan otvoren pokrivač $\mathcal{V}$ prostora X. **Skup** $Y \subseteq X$ je **kompaktan** ako je Y kao potprostor prostora X kompaktan.

Iz definicije je jasno da je kompaktnost topološko svojstvo, tj. ako su prostori X i Y homeomorfni i ako je jedan od njih kompaktan, onda je i drugi kompaktan.

Teorem 6.7. *Prostor X je kompaktan ako i samo ako za svaki otvoreni pokrivač od X postoji konačan potpokrivač.*

Dokaz. Pretpostavimo da je X kompaktan. Neka je $\mathcal{U} = (U_a, a \in A)$ proizvoljan otvoren pokrivač od X. Tada postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_n)$ koji profinjuje $\mathcal{U}$, tj. za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ postoji $a_i \in A$ takav da je $V_i \subseteq U_{a_i}$. Tada je $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{a_i} \subseteq X$ pa je $(U_{a_1}, \ldots, U_{a_n})$ konačan potpokrivač pokrivača $\mathcal{U}$.

Obrnuta implikacija je očita, jer svaki potpokrivač $\mathcal{V}$ pokrivača $\mathcal{U}$ profinjuje $\mathcal{U}$. □

Teorem 6.8. *Svaki zatvoreni podskup F kompaktnog prostore X je kompaktan.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{V} = (V_a, a \in A)$ proizvoljan otvoren pokrivač prostora F. Pokazat ćemo da postoji konačan potpokrivač od $\mathcal{V}$. Jer je skup V_a otvoren u F, postoji skup $W_a \subseteq X$ otvoren u X takav da je $V_a = F \cap W_a$. Familija $\mathcal{W} = ((W_a, a \in A), X \setminus F)$ koja se sastoji od otvorenih skupova W_a, $a \in A$, i otvorenog skupa $X \setminus F$ je otvoreni pokrivač od X. Budući da je prostor X kompaktan, postoji konačan potpokrivač $(W_{a_1}, \dots W_{a_n}, X \setminus F)$ prostora X. Također vrijedi $F \subset \bigcup_{i=1}^n W_{a_i}$ pa je $F = F \cap F \subseteq F \cap (\bigcup_{i=1}^n W_{a_i}) = \bigcup_{i=1}^n (F \cap W_{a_i}) = \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$. S druge strane je $V_{a_i} = F \cap W_{a_i} \subseteq F$ pa je $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$, što dokazuje da je $(V_{a_1}, \dots, V_{a_n})$ konačan potpokrivač od $\mathcal{V}$ za prostor F. $\square$

Teorem 6.9. *Neka je X Hausdorffov prostor i $F \subseteq X$ kompaktan skup. Tada je skup F zatvoren.*

Dokazat ćemo nešto jaču tvrdnju.

Teorem 6.10. *Neka je X Hausdorffov prostor, $F \subseteq X$ kompaktan skup i $x_o \in X \setminus F$. Tada postoje otvoreni disjunktni skupovi U, V od X takvi da je $F \subseteq U$ i $x_0 \in V$.*

Dokaz. Kako je X Hausdorffov prostor, za svaki $x \in F$ postoje disjunktni otvoreni skupovi $U_x, V_x \subset X$ za koje je $x \in U_x$, $x_0 \in V_x$. Familija $(U_x \cap F, x \in F)$ je otvoren pokrivač od F pa zbog kompaktnosti od F postoji konačan skup $\{x_1, \dots, x_n\} \subset F$ takav da je $F = \bigcup_{i=1}^n (U_{x_i} \cap F) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Skup $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ je otvoren u X. I skup $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ je otvoren u X, jer je presjek od konačno otvorenih skupova. Također vrijedi $F \subseteq U$, $x_0 \in V$ i $U \cap V = \bigcup_{j=1}^n (U_{x_j} \cap (\bigcap_{i=1}^n V_{x_i})) \subseteq \bigcup_{j=1}^n (U_{x_j} \cap V_{x_j}) = \emptyset$, jer je $U_{x_j} \cap V_{x_j} = \emptyset$ za svaki j. $\square$

Dokaz teorema 6.9. Prema teoremu 6.10 za svaku točku $x_0 \in X \setminus F$ postoji otvoren skup V takav da je $x_0 \in V \subseteq X \setminus F$. Zato je $X \setminus F$ otvoren skup pa je F zatvoren skup. $\square$

Teorem 6.11. *Svaki Hausdorffov kompaktni prostor X je normalan.*

Dokaz. Dokazat ćemo da X zadovoljava Tietzeov uvjet (T_4), tj. da za svaki zatvoren skup F i otvoren skup V, $F \subseteq V$, postoji otvoren skup U takav da je $F \subseteq U \subseteq \operatorname{Cl} U \subseteq V$.

Promotrimo disjunktne zatvorene skupove F i $F' = X \setminus V$. Po teoremu 6.8, F i F' su kompaktni pa po teoremu 6.10, za svaku točku $y \in F'$ postoje disjunktni otvoreni skupovi U_y, U'_y za koje je $F \subseteq U_y$, $y \in U'_y$. Kako je $(U'_y \cap F', y \in F')$ otvoren pokrivač za F', postoji konačan skup $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq F'$ takav da je $(U'_{y_1} \cap F', \ldots, U'_{y_n} \cap F')$ pokrivač za F'. Skupovi $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$, $U' = \bigcup_{i=1}^n U'_{y_i}$ su otvoreni disjunktni skupovi za koje vrijedi $F \subseteq U$, $X \setminus V = F' \subset U'$, tj. $X \setminus U' \subseteq V$. Kako je $X \setminus U'$ zatvoren skup i $U \subseteq X \setminus U'$, vrijedi i $\operatorname{Cl} U \subseteq X \setminus U' \subseteq V$ pa je tvrdnja dokazana. □

Teorem 6.12. *Skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktan ako i samo ako je omeđen i zatvoren.*

Da bismo dokazali teorem, treba nam slijedeća lema.

Lema 6.13. *Neka je (X, d) metrički prostor sa svojstvom da svaki niz (x_n) točaka u X ima bar jedno gomilište. Tada za svaki prebrojivi otvoreni pokrivač $\mathcal{U} = (U_n, n \in \mathbb{N})$ postoji konačan potpokrivač.*

Dokaz. Dokazat ćemo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$. Kada to ne bi vrijedilo, mogli bismo za svaki $n \in \mathbb{N}$ izabrati točku $x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$, $n \in \mathbb{N}$. Po pretpostavci niz (x_n) ima gomilište $x_0 \in X$. Kako je $\mathcal{U}$ pokrivač od X, postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x_0 \in U_i$. Skup U_i je okolina točke x_0 pa postoji prirodan broj $n \geqslant i$ takav da je $x_n \in U_i$, što je u kontradikciji s definicijom niza (x_n), tj. $x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$. □

Dokaz teorema 6.12. Pretpostavimo prvo da je $K \subset \mathbb{R}^n$ zatvoren omeđen skup. Neka je $\mathcal{U} = (U_a, a \in A)$ otvore pokrivač od K. Budući da je $\mathbb{R}^n$ separabilan prostor i K je separabilan. Zato možemo u $\mathcal{U}$ upisati neki prebrojivi otvoreni pokrivač $\mathcal{V}$. Nadalje, svaki niz (x_n) u K je omeđen niz u $\mathbb{R}^n$ pa ima gomilište x_0 koje leži u K, jer je K zatvoren skup. Zato, po lemi 6.13, postoji konačan potpokrivač $\mathcal{W}$ pokrivača $\mathcal{V}$. Jer $\mathcal{W} \preceq \mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$, K je kompaktan.

Obrnuto, neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan. Po teoremu 6.9 K je zatvoren. Pokažimo da je K omeđen. Neka je $x_0 \in K$. Tada kugle $K(x_0, r)$, $r > 0$, tvore pokrivač od K. Zbog kompaktnosti postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n K(x_0, r_i)$ pa je K sadržan u konačnoj uniji omeđenih skupova i zato omeđen. $\square$

Teorem 6.14. *Ako su X i Y kompaktni prostori, onda je i direktni produkt $X \times Y$ kompaktan prostor.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{W} = (W_a : a \in A)$ otvoreni pokrivač prostora $X \times Y$. Po teoremu 6.4 bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su članovi pokrivača $\mathcal{W}$ oblika $W_a = U_a \times V_a$, pri čemu je U_a otvoren u X, a V_a otvoren u Y, jer takvi skupovi tvore bazu topologije prostora $X \times Y$.

Neka je $x \in X$ proizvoljna točka. Kako je prostor $\{x\} \times Y$ homeomorfan prostoru Y, $\{x\} \times Y$ je kompaktan. Također,

$$\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{a \in A} (U_a \times V_a)$$

pa postoji konačan skup $\{a_1(x), \ldots a_{n(x)}(x)\} \subseteq A$ takav da je

$$\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n(x)} (U_{a_i(x)} \times V_{a_i(x)}).$$

Pri tome, bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da za svaki $i \in \{1, \ldots, n(x)\}$ vrijedi

$$(\{x\} \times Y) \cap (U_{a_i(x)} \times V_{a_i(x)}) \neq \emptyset.$$

Skup $U_x = \bigcap_{i=1}^{n(x)} U_{a_i(x)}$ je otvorena okolina točke x u X, a $\mathcal{V}_x = (V_{a_1(x)}, \ldots, V_{a_{n(x)}(x)})$ je konačan otvoreni pokrivač od Y, tj. $Y = \bigcup_{i=1}^{n(x)} V_{a_i(x)}$. Osim toga, za svaki $V = V_{a_i(x)} \in \mathcal{V}_x$ postoji $a = a_i(x) \in A$ takav da je $U_x \times V \subseteq W_a$.

Jer je $x \in U_x$, familija $(U_x, x \in X)$ je otvoren pokrivač od X pa iz kompaktnosti prostora X slijedi da postoji konačan skup $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset X$ takav da je $(U_{x_1}, \ldots, U_{x_r})$ pokrivač od X.

Tvrdimo da je $\mathcal{W}' = (U_{x_i} \times V,\ i \in \{1, \dots, r\},\ V \in \mathcal{V}_{x_i})$ konačan otvoreni pokrivač prostora $X \times Y$ koji profinjuje $\mathcal{W}$. Zaista, za svaku točku $(x, y) \in X \times Y$ postoji $i \in \{1, \dots, r\}$ takav da je $x \in U_{x_i}$ i postoji $V \in \mathcal{V}_{x_i}$ takav da je $y \in V$, tj. $(x, y) \in U_{x_i} \times V$ te postoji $a \in A$ takav da je $U_{x_i} \times V \subseteq W_a$. □

Teorem se indukcijom poopćuje na direktan produkt od konačno kompaktnih prostora. Vrijedi i općenitiji rezultat, Tihonovljev teorem, da je produkt $X = \prod_{a \in A} X_a$ od beskonačno kompaktnih prostora kompaktan.. Pri tome po definiciji bazu topologije prostora X tvore svi skupovi oblika

$$U_{a_1} \times \cdots \times U_{a_n} \times \prod_{a \in A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}} X_a,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$,, a $U_{a_i} \subseteq X_{a_i}$, $i = 1, \dots, n$, su otvoreni skupovi u X_{a_i}.

Teorem 6.15. *Neka je X kompaktan prostor i $f : X \to Y$ neprekidna surjekcija. Tada je i prostor Y kompaktan.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{V} = (V_a, a \in A)$ proizvoljan otvoren pokrivač prostora Y. Za svaki $a \in A$ skup $U_a = f^{-1}(V_a)$ je otvoren pa je $\mathcal{U} = (U_a, a \in A)$ otvoren pokrivač od X. Zbog kompaktnosti prostora X postoji konačan potpokrivač $(U_{a_1}, \dots, U_{a_n})$ pokrivača $\mathcal{U}$ prostora X. Kako je f surjekcija i jer je $f(U_a) = f(f^{-1}(V_a)) = V_a$, vrijedi $\bigcup_{i=1}^n V_{a_i} = \bigcup_{i=1}^n f(U_{a_i}) = f(\bigcup_{i=1}^n U_{a_i}) = f(X) = Y$, što pokazuje da je $(V_{a_1}, \dots, V_{a_n})$ konačan potpokrivač pokrivača $\mathcal{V}$ prostora Y pa je Y kompaktan. □

Teorem 6.16. *Neka je X kompaktan prostor i Y Hausdorffov prostor. Ako je $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija, onda je f homeomorfizam.*

Dokaz. Treba dokazati da je $g = f^{-1} : Y \to X$ neprekidno preslikavanje. Pokazat ćemo da je za svaki zatvoreni skup $F \subseteq X$, zatvoren i skup $g^{-1}(F) = f(F) \subseteq Y$. Budući da je X kompaktan i F zatvoren, po teoremu 6.8 F je kompaktan pa je po teoremu 6.15 i $f(F)$ kompaktan. Kako je Y Hausdorffov, po teoremu 6.9, $f(F)$ je zatvoren podskup od Y. □

Za Hausdorffov prostor X koji je kompaktan i povezan kažemo da je **kontinuum**.

Teorem 6.17. *Neka su (X, d), (Y, d) metrički prostori i $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Ako je prostor X kompaktan, onda je f uniformno neprekdno preslikavanje.*

Dokaz. Treba pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da $d(x', x'') < \delta$ povlači $d(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$ za sve $x', x'' \in X$. Po pretpostavci, za svaki $\varepsilon > 0$ i za svaku točku $x \in X$ postoji $\delta(x) > 0$ takav da

$$d(x', x) < \delta(x) \implies d(f(x'), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.1}$$

Kugle $K(x, \frac{1}{2}\delta(x))$, $x \in X$, tvore otvoreni pokrivač prostora X. Zbog kompaktnosti postoji konačan skup točaka $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ sa svojstvom da kugle $K(x_i, \frac{1}{2}\delta(x_i))$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, tvore pokrivač prostora X.

Neka je $\delta = \min\{\frac{1}{2}\delta(x_1), \ldots, \frac{1}{2}\delta(x_n)\} > 0$. Neka su $x', x'' \in X$ proizvoljne točke za koje je $d(x', x'') < \delta$. Tada postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $x' \in K(x_i, \frac{1}{2}\delta(x_i))$, tj. da je

$$d(x', x_i) < \frac{1}{2}\delta(x_i) < \delta(x_i). \tag{6.2}$$

S druge strane je

$$d(x'', x_i) \leqslant d(x'', x') + d(x', x_i) < \delta + \frac{1}{2}\delta(x_i) \leqslant \delta(x_i). \tag{6.3}$$

Prema (6.2), (6.3) i (6.1) zaključujemo da vrijedi

$$d(f(x'), f(x'')) \leqslant d(f(x'), f(x_i)) + d(f(x''), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

što dokazuje tvrdnju. □

Teorem 6.18 (Dinijev teorem)**.** *Neka je T Hausdorffov kompaktan prostor i (x_n) niz neprekidnih funkcija $x_n : T \to \mathbb{R}$ koji konvergira (obično) prema funkciji $x_0 : T \to \mathbb{R}$. Ako je niz (x_n) monoton i funkcija x_0 neprekidna, onda (x_n) konvergira prema x_0 uniformno.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da niz (x_n) raste, tj. da je za svaki $s \in T$ niz $(x_n(s))$ rastući niz realnih brojeva. Budući da je $\lim(x_n(s)) = x_0(s)$ za svaki $s \in T$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n(s) \in \mathbb{N}$ takav da je

$$0 \leqslant x_0(s) - x_{n(s)}(s) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.4}$$

Zbog neprekidnosti funkcija x_0 i $x_{n(s)}$ u točki s, postoji otvorena okolina točke $s \in T$ sa svojstvom

$$t \in U(s) \implies |x_0(t) - x_0(s)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{6.5}$$

$$t \in U(s) \implies |x_{n(s)}(t) - x_{n(s)}(s)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.6}$$

Iz (6.5), (6.4) i (6.6) slijedi

$$x_0(t) - x_{n(s)}(t) = |x_0(t) - x_{n(s)}(t)| < \varepsilon, \; t \in U(s). \tag{6.7}$$

Kako je po pretpostavci niz $(x_n(t))$ rastući, iz (6.7) dobivamo

$$|x_0(t)-x_n(t)| = x_0(t)-x_n(t) \leqslant x_0(t)-x_{n(s)}(t) < \varepsilon, \; n \geqslant n(s), \; t \in U(s). \tag{6.8}$$

Familija $(U(s), s \in T)$ je otvoreni pokrivač za T pa postoji konačan potpokrivač $(U(s_1), \ldots, U(s_r))$, $r \in \mathbb{N}$. Neka je $n_0 = \max\{n(s_1), \ldots, n(s_r)\}$. Za proizvoljnu točku $t \in T$ postoji $i \in \{1, \ldots, r\}$ takav da je $t \in U(s_i)$. Ako je $n \geqslant n_0$ onda je $n \geqslant n(s_i)$ pa iz (6.8) dobivamo

$$|x_0(t) - x_n(t)| < \varepsilon$$

pa niz (x_n) konvergira uniformno prema x_0.

Za silazan niz (x_n) zaključak se dobije promatranjem rastućeg niza $(-x_n)$.

$\square$

Lema 6.19. *Neka je (X, d) metrički prostor sa svojstvom da svaki niz (x_n) u X ima barem jedno gomilište. Tada je X potpuno omeđen.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da X nije potpuno omeđen. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da se X ne može pokriti s konačno kugala radijusa ε. Zato induktivno možemo konstruirati niz (x_n) u X takav da vrijedi $x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} K(x_i, \varepsilon)$. Po pretpostavci leme, niz (x_n) ima barem jedno gomilište, označimo ga x_0. Tada u okolini $K(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ postoje članovi niza x_j i x_k za neke $j, k \in \mathbb{N}$, $j < k$. Budući da je $d(x_j, x_k) \leqslant d(x_j, x_0) + d(x_0, x_k) < \varepsilon$, vrijedi $x_k \in K(x_j, \varepsilon)$, što je u kontradikciji s definicijom niza (x_n), jer je $j < k$. □

Teorem 6.20. *Metrički prostor (X, d) je kompaktan ako i samo ako svaki niz (x_n) u X ima barem jedno gomilište.*

Dokaz. Neka je X kompaktan. Pretpostavimo da postoji niz (x_n) koji nema niti jedno gomilište. Tada za svaku točku $y \in X$ postoji otvorena okolina $U(y)$ točke y koja sadrži samo konačno članova niza (x_n). Neka je $(U(y_1), \ldots, U(y_r))$ konačan potpokrivač otvorenog pokrivača $(U(y), y \in X)$ od X. Kako svaki od skupova $U(y_i)$ sadrži konačno članova niza (x_n) i $X = \bigcup_{i=1}^{r} U(y_i)$, dobivamo kontradikciju s činjenicom da je $\mathbb{N}$ beskonačan skup.

Pretpostavimo sada da svaki niz (x_n) u X ima barem jedno gomilište. Po lemi 6.19, X je potpuno omeđen pa ima prebrojivu bazu (jer je svaki potpuno omeđen metrički prostor separabilan te metrički prostor ima prebrojivu bazu ako i samo ako je separabilan). Stoga se u svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X može upisati prebrojiv otvoreni pokrivač $\mathcal{V}$. Po lemi 6.13, postoji konačan potpokrivač $\mathcal{W}$ pokrivača $\mathcal{V}$ pa iz $\mathcal{W} \preceq \mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$ slijedi da $\mathcal{W}$ profinjuje $\mathcal{U}$, tj. X je kompaktan. □

Korolar 6.21. *Metrički prostor (X, d) je kompaktan ako i samo ako za svaki niz (x_n) u X postoji podniz (x_{n_k}) koji konvergira u X.*

Dokaz. Za svaki niz (x_n) u X postoji podniz (x_{n_k}) koji konvergira u X ako i samo ako svaki niz (x_n) u X ima barem jedno gomilište. □

Teorem 6.22. *Za metrički prostor (X, d) slijedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) *Prostor* (X, d) *je kompaktan.*

(ii) *Za svaki otvoreni prebrojivi pokrivač prostora* X *postoji konačan potpokrivač.*

(iii) *Svaki silazni niz nepraznih zatvorenih podskupova* $F_n \subseteq X$, $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \ldots$, *ima neprazni presjek* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

(iv) *Svaki beskonačan skup* $A \subseteq X$ *ima barem jedno gomilište u* X.

(v) *Svaki niz* (x_n) *u* X *ima barem jedno gomilište u* X.

Dokaz. $(i) \implies (ii)$. Slijedi iz teorema 6.7.

$(ii) \implies (iii)$. Neka je $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$ padajući niz nepraznih zatvorenih skupova $F_n \subseteq X$. Pretpostavimo da je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Tada su skupovi $U_n = X \setminus F_n$ otvoreni i vrijedi $X = X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus F_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ pa je $(U_n, n \in \mathbb{N})$ prebrojiv otvoreni pokrivač prostora X. Prema (ii) postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $X = \bigcup_{n=1}^{k} U_n$ pa je $\bigcap_{n=1}^{k} F_n = \bigcap_{n=1}^{k}(X \setminus U_n) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{k} U_n = \emptyset$. Budući da je $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_k$, vrijedi $\bigcap_{n=1}^{k} F_n = F_k$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je F_k neprazan.

$(iii) \implies (iv)$. Neka je $A \subseteq X$ beskonačan skup. Tada postoji injekcija $n \mapsto x_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Neka je $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$. Dovoljno je pokazati da je skup B' svih gomilišta skupa B neprazan, jer je $B' \subseteq A'$ pa je tada i A' neprazan. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $B' = \emptyset$. Promotrimo podskupove $B_k = \{x_n : n \geqslant k\}$. Za svaki k vrijedi $B'_k \subseteq B' = \emptyset$ pa je $\operatorname{Cl} B_k = B_k \cup B'_k = B_k$ te su skupovi B_k zatvoreni. Kako je svaki $B_k \neq \emptyset$ i $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \supseteq B_k \supseteq \cdots$, prema (iii) vrijedi $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k \neq \emptyset$. Međutim, iz definicije skupova B_k vidimo da je $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcap_{k\in\mathbb{N}}\{x_n : n \geqslant k\} = \emptyset$.

$(iv) \implies (v)$. Neka je (x_n) niz u prostoru X. Ako je $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ konačan skup, onda se barem jedna od vrijednosti niza ponavlja beskonačno puta pa je to gomilište niza (x_n). Ako je $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beskonačan skup, onda po (iv) skup A ima bar jedno gomilište x_0 koje je ujedno i gomilište niza (x_n).

$(v) \implies (i)$. Slijedi iz teorema 6.20. $\square$

Korolar 6.23. *Svaki metrički kompaktni prostor (X, d) je potpuno omeđen separabilan.*

Dokaz. Da je X potpuno omeđen slijedi iz $(i) \implies (v)$ u teoremu 6.22 i leme 6.19 te je X i separabilan. $\square$

Za svaki kompaktni metrički prostor X postoji neprekidna injekcija u Hibertov kvadar $f : X \to I^\infty$ pa je $f : X \to f(X) \subseteq I^\infty$ homeomorfizam. Dakle, svaki metrički kompakt dopušta homeomorfno smještenje u Hilbertov kvadar i to kao zatvoren podskup. Vrijedi i obrat, svaki zatvoren podskup od I^∞ je kompaktan metrički prostor.

Teorem 6.24. *Metrički prostor (X, d) je kompaktan ako i samo ako je potpun i potpuno omeđen.*

Dokazat ćemo najprije jednu lemu.

Lema 6.25. *Neka je (X, d) potpuno omeđen metrički prostor. Tada svaki niz (x_n) ima podniz (x_{n_k}) koji je Cauchyjev.*

Dokaz. Neka je (x_n) neki niz u potpuno omeđenom prostoru X. Za svaki $\varepsilon > 0$ skup X možemo pokriti s konačno podskupova dijametra manjeg od ε pa barem jedan od tih podskupova sadrži beskonačno elemenata niza (x_n). To znači da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji beskonačan skup $N_\varepsilon \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $\operatorname{diam}\{x_n : n \in N_\varepsilon\} < \varepsilon$.

Induktivno ćemo definirati padajući niz beskonačnih skupova $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots \supseteq N_k \supseteq \cdots$ za koje vrijedi da je $\operatorname{diam}\{x_n : n \in N_k\} < \frac{1}{k}$: Skup N_{k+1} dobije se primjenom gore opisanog zaključka na niz $(x_n, n \in N_k)$ i $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$. Kako je svaki od skupova N_k beskonačan, možemo odabrati rastući niz $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ takav da je $n_k \in N_k$. Pokazat ćemo da je dobiveni podniz $(x_{n_k}, k \in \mathbb{N})$ Cauchyjev: Za svaki $p \in \mathbb{N}$ vrijedi $n_{k+p} \in N_{k+p} \subseteq N_k$ pa je $d(x_{n_k}, x_{n_{k+p}}) \leqslant \operatorname{diam}\{x_n : n \in N_k\} < \frac{1}{k}$, što dokazuje tvrdnju. $\square$

Dokaz teorema 6.24. Pretpostavimo prvo da je metrički prostor (X, d) potpun i potpuno omeđen. Po korolaru 6.21, dovoljno je pokazati da svaki niz (x_n) u X ima konvergentan podniz. Po lemi 6.25, niz (x_n) ima podniz (x_{n_k}) koji je Cauchyjev pa je zbog potpunosti prostora X taj podniz konvergentan.

Obrat, neka je (X, d) kompaktan metrički prostor. Tada je po korolaru 6.23 prostor X potpuno omeđen. Nadalje, neka je (x_n) Cauchyjev niz u X. Po korolaru 6.21 niz (x_n) ima konvergentni podniz, a kako je niz (x_n) Cauchyjev onda (x_n) konvergira, što dokazuje da je prostor (X, d) potpun. □