

Programiranje 2

2. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- **Funkcije** (kraj):
 - **Rekurzivne funkcije** (nastavak):
 - **Particije**.
 - **Hanojski tornjevi**.
- **Struktura programa** (prvi dio):
 - **Blokovska struktura jezika**.
 - **Doseg varijable** — lokalne i globalne varijable.
 - **Vijek trajanja varijable, memorijske klase**.
 - **Program smješten u više datoteka**. Vanjski simboli.

Informacije — odrada 5. predavanja

U petak, 5. 4., **nema predavanja** u redovitom terminu.

- Održava se **Dan i noć na PMF-u**, pa **nema nastave**.

Odrada 5. predavanja je sljedeći tjedan — za **3** dana, u:

- **ponedjeljak, 18. 3.**, od **16–18** sati u **(003)**.

Rekurzivne funkcije

Sadržaj

- **Funkcije** (kraj):
 - **Rekurzivne funkcije** (nastavak):
 - **Particije.**
 - **Hanojski tornjevi.**

Particije prirodnog broja

Particije — definicija

Particija (ili rastav) prirodnog broja $n \in \mathbb{N}$ je bilo koji **rastav** zadanog broja

- u **zbroj pribrojnika** koji su, također, **prirodni brojevi**,
- pri čemu **poredak** pribrojnika **nije bitan**.

Dakle, particija od n ima oblik

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m,$$

gdje je

- $m \in \mathbb{N} =$ **broj** pribrojnika u rastavu,
- $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$ su **pribrojnici**.

Particije — zapis i broj

Obzirom na to da **poredak** pribrojnika **nije bitan**, tj.,

- dva rastava smatramo **istim** ako imaju **iste** pribrojnike, bez obzira na njihov **poredak**,

onda u **zapisu** možemo smatrati da su pribrojnici **poredani** — recimo, **nepadajuće** (ili **nerastuće**)

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m, \quad a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m.$$

Zanimljivo je pronaći na **koliko** (različitih) načina se n može ovako zapisati (rastaviti).

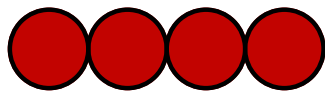
- **Broj particija** od n označavamo s $p(n)$.

Uočite da **broj** pribrojnika m može biti **bilo koji** (nije zadan).

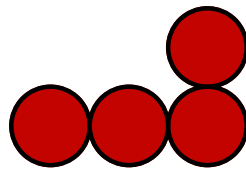
Broj particija — zadatak

Primjer. Napišimo program koji učitava prirodni broj n i ispisuje broj particija $p(n)$ = broj rastava broja n u zbroj nepadajućih prirodnih brojeva.

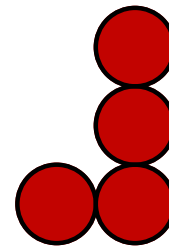
Pokažimo koliko je takvih particija za $n = 4$.



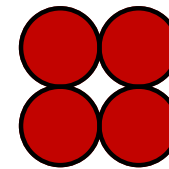
$$1 + 1 + 1 + 1$$



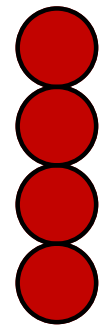
$$1 + 1 + 2$$



$$1 + 3$$



$$2 + 2$$



$$4$$

Dakle, broj particija je $p(4) = 5$.

Broj particija — ideja za rješenje

Trenutno, osim definicije, **ne znamo** ništa više o $p(n)$. Stoga je prirodna ideja za rješenje:

🔴 **generiraj**, nekim redom, **sve** particije od n i **izbroji** ih.

Napomena. Ako tražimo samo **broj** particija $p(n)$, onda postoje i **puno bolji** načini za njegovo nalaženje (rekurzivne relacije i sl.).

Bez obzira na to, idemo **realizirati** gornju ideju, kao da je zadatak upravo

🔴 **generiranje** svih particija od n .

Generiranje particija — razrada

Kako ćemo generirati sve particije od n ?

☛ Pa, ..., nekim redom, jednu po jednu.

A kako bismo generirali jednu (neku) particiju od n ?

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m, \quad a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m.$$

To je već lakše:

☛ pribrojnik po pribrojnik, jedan za drugim,

☛ pazeći da pribrojnici ne padaju, tj. $a_\ell \geq a_{\ell-1}$, za $\ell \geq 2$.

Dakle, “izaberi” a_1 , pa a_2 , i tako redom.

Ako još pojedine pribrojnice a_ℓ “vrtimo” u petlji (po dozvoljenim vrijednostima), dobit ćemo i sve particije od n .

Generiranje particija — razrada (nastavak)

Ima samo jedan **problem**:

- broj pribrojnika m može **varirati** od 1 do n , pa **nema šanse** da to napravimo “hrpom petlji” — jedna u drugoj (“**broj petlji**” **varira**).

Taj problem možemo riješiti **rekurzivnom** funkcijom. **Ideja**:

- Svaki poziv funkcije “**vrti**” samo **jednu** petlju — za svaki **pojedini** pribrojnik (onaj a_ℓ).

Rekurzivni pozivi realiziraju “petlje u petlji”.

Naravno, **nije** baš očito kako bismo to trebali **napraviti**. Zato,

- krenimo od **početka** — **prvog** pribrojnika a_1 ,
- a onda — **korak po korak** (kao u **indukciji**).

Generiranje particija — prvi pribrojnik

Kako izabrati i “vrtiti” prvi pribrojnik a_1 ?

Zapišimo prvi korak u obliku:

$$n = a_1 + \text{“preostala suma”},$$

gdje “preostala suma” predstavlja zbroj preostalih pribrojnika $a_2 + \dots + a_m$, ako ih ima.

- Pribrojnik a_1 možemo “vrtiti” u petlji od 1 do n — sve ove vrijednosti su dozvoljene.

Za svaku fiksnu vrijednost $a_1 = i$ znamo da mora biti

$$\text{“preostala suma”} = n - i,$$

zato da ukupna suma bude zadani n .

Generiranje particija — skica koraka

I što sad, kad smo izabrali $a_1 = i$?

- Preostaje nam problem da “preostala suma” $= n - i$ opet rastavimo u zbroj pribrojnika $(a_2 + \dots + a_m)$.

Dakle, **rekurzija** se nazire.

- Zadana** je **tražena suma** koju želimo dobiti — to će biti **ulazni** argument funkcije, zovimo ju **generiraj**.
- Na početku, u **prvom** koraku znamo (**tražimo**) da je **suma** $= n$. To će biti **stvarni** argument u **vanjskom** pozivu funkcije.
- Funkcija **generiraj(suma)** “vrti” **sljedeći** pribrojnik, zovimo ga **i**, u **petlji** od 1 do **suma**,
 - i** zove samu sebe u obliku **generiraj(suma - i)**.

Generiranje particija — greška u koraku

Ali, **oprez!** Ovo je **pogrešno**, jer **ne** osigurava da pribrojnici **ne padaju**. Na primjer,

☛ **fali** nam uvjet $a_1 = i \leq a_2$ u prvom koraku.

Gdje je **greška** u razmišljanju?

Vratimo se na **prvi** korak. Kad **izabremo** pribrojnik $a_1 = i$,

☛ preostaje nam problem da **suma** — **i opet** rastavimo u zbroj pribrojnika $(a_2 + \dots + a_m)$.

Ali, taj “**opet**” **nije** isti problem kao i polazni!

☛ Ovom “**novom**” problemu **moramo** reći (**zadati**) od koje vrijednosti **smije krenuti sljedeći** pribrojnik (to je a_2 u prvom koraku).

Nazovimo tu vrijednost **prvi**.

Generiranje particija — popravak koraka

Potpuno **isto** vrijedi i u **općem** koraku!

- Funkcija **generiraj** **mora** dobiti **još jedan** ulazni argument **prvi**. To je **polazna** vrijednost za **sljedeći** pribrojnik (a ne **1**).

Ovo je tzv. **parametrizacija** rekurzije.

Popravljen **rekurzija** ima sljedeći oblik:

- funkcija **generiraj**(**suma**, **prvi**) “vrti” **sljedeći** pribrojnik **i**, u **petlji** od **prvi** do **suma**,
 - **i** zove samu sebe u obliku **generiraj**(**suma - i**, **i**).

Pripadni problem je: “**generiraj** **sve** particije broja **suma**, u kojima **prvi** (najmanji) pribrojnik mora biti **veći ili jednak** broju **prvi**”.

Generiranje particija — popravak prvog poziva

Sad treba polazni problem “uložiti” u ovaj rekurzivni, tj. treba popraviti vanjski (prvi) poziv = podesiti stvarne argumente.

No, to je lako.

- U prvom koraku tražimo da je $\text{suma} = n$, a prvi pribrojnik smije početi od 1.

To će biti stvarni argumenti u vanjskom pozivu funkcije.

Dakle, vanjski poziv je `generiraj(n, 1)`.

Generiranje particija — kraj rekurzije

Ne zaboravimo: svaku rekurziju moramo nekako zaustaviti (prekinuti).

Naša rekurzija `generiraj(suma, prvi)` radi sljedeće:

- “generira sve particije broja `suma`, u kojima `prvi` pribrojnik mora biti veći ili jednak broju `prvi`”.

Stvarno, a kad smo gotovi?

Odgovor: onda kad više nemamo što rastaviti!

- Ako je `suma ≥ 1`, onda “ima posla”.
- Međutim, ako je `suma = 0`, onda smo gotovi — rastav je završen.

Ako još uočimo da uvijek vrijedi `suma ≥ 0`, sve je “čisto”.

Razlog: u petlji u rekurziji je `i ≤ suma`!

Generiranje particija — korektnost rekurzije

Preciznije, vrijedi i jača relacija:

$$1 \leq \text{prvi} \leq i \leq \text{suma}.$$

To izlazi direktno iz “kôda” funkcije:

- funkcija `generiraj(suma, prvi)` “vrti” sljedeći pribrojnik `i`, u petlji od `prvi` do `suma`,
 - `i` zove samu sebe u obliku `generiraj(suma - i, i)`.

Iz gornje relacije je očito

$$0 \leq \text{suma} - i < \text{suma}.$$

To znači da rekurzivni pozivi funkcije `generiraj` strogo smanjuju prvi argument `suma`, pa se rekurzija sigurno prekida kad `suma` padne na 0 (tzv. korektnost rekurzije).

Generiranje particija — brojanje

Vratimo se početnom problemu — brojanju particija.

No, to je sad lako. U generiraj treba samo dodati brojanje generiranih particija.

- Zamjena posla: generiraj \mapsto prebroji.

Pripadni problem je:

- “prebroji sve particije broja suma, u kojima prvi (najmanji) pribrojnik mora biti veći ili jednak broju prvi”.

Realizacija je funkcija particije(suma, prvi)

- koja vraća broj svih takvih particija!

Generiranje particija — brojanje (nastavak)

Što točno radi `particije(suma, prvi)`?

- Ima **brojač** takvih particija, zovimo ga **broj**, kojeg inicijaliziramo na **0**,
- “vrti” **sljedeći** pribrojnik **i**, u **petlji** od **prvi** do **suma**,
 - **i zbraja** vrijednosti koje vrata rekurzivni pozivi `particije(suma - i, i)`.

I sad **oprez!** Što **radimo** kad **prekidamo** rekurziju, tj. kad ulazna **suma** padne na **0**?

- **Vratimo** vrijednost **1**, jer to znači da smo **tog trena** “izgenerirali” **jednu** od traženih particija.

Generiranje particija — brojanje (nastavak)

Matematički rečeno, imamo **rekurzivne** relacije

$$\text{particije}(\text{suma}, \text{prvi}) = \sum_{i=\text{prvi}}^{\text{suma}} \text{particije}(\text{suma} - i, i).$$

s tim da je “**na dnu**”

$$\text{particije}(0, \text{prvi}) = 1, \quad \text{za bilo koji prvi},$$

a “**na vrhu**” (za vanjski poziv — ono što **tražimo**)

$$p(n) = \text{particije}(n, 1).$$

Ha!

Broj particija — funkcija

```
#include <stdio.h>

int particije(int suma, int prvi)
{
    int i, broj = 0;

    if (suma == 0) return 1;
        /* else */
    for (i = prvi; i <= suma; ++i)
        /* Sljedeci pribrojnik je i,
           rekurzivni poziv za suma - i. */
        broj += particije(suma - i, i);
    return broj;
}
```

Broj particija — glavni program

```
int main(void)
{
    int n;

    printf(" Upisi prirodni broj n: ");
    scanf("%d", &n);

    printf("\n Broj particija p(%d) = %d\n",
           n, particije(n, 1) );

    return 0;
}
```

Cijeli [program](#) je u [parts_1.c](#).

Broj particija — trag poziva

“Trag poziva” možemo dobiti tako da **na vrh** funkcije dodamo **ispis ulaznih** vrijednosti.

```
int particije(int suma, int prvi)
{
    int i, broj = 0;

    printf("    suma = %d,  prvi = %d\n", suma, prvi);
    if (suma == 0) return 1;
    for (i = prvi; i <= suma; ++i)
        broj += particije(suma - i, i);
    return broj;
}
```

Broj particija — trag poziva za $n = 4$

suma = 4,	prvi = 1	(vanjski, bez pribrojnika)
suma = 3,	prvi = 1	1
suma = 2,	prvi = 1	1 + 1
suma = 1,	prvi = 1	1 + 1 + 1
suma = 0,	prvi = 1	-> 1 + 1 + 1 + 1
suma = 0,	prvi = 2	-> 1 + 1 + 2
suma = 1,	prvi = 2	1 + 2
suma = 0,	prvi = 3	-> 1 + 3
suma = 2,	prvi = 2	2
suma = 0,	prvi = 2	-> 2 + 2
suma = 1,	prvi = 3	3
suma = 0,	prvi = 4	-> 4

Broj particija $p(4) = 5$

Particije — malo priče

Inače, broj particija $p(n)$ broja n može se dobiti i **analitički**.

U **formalnom** redu

$$\begin{aligned} & (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) \\ & \quad \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots) \\ & \quad \cdot (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots) \dots \\ & \quad \cdot (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \dots) \dots \\ & = 1 + p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3 + \dots + p(n)x^n + \dots \end{aligned}$$

očita se koeficijent uz x^n . Zato je dogovorno $p(0) = 1$.

Na primjer, za $n = 100$ je $p(100) = 190\,569\,292$.

Particije — ispis svih particija

Zadatak. Za zadani $n \in \mathbb{N}$ treba **ispisati** sve particije broja n .

Uputa za rješenje. Pribrojnike treba spremati u neko **polje** (idealno je globalno i dinamički alocirano). ■

Napomena. Postoje i **puno brži** algoritmi za računanje **broja particija** $p(n)$, zadanog prirodnog broja n .

Bazirani su na **rekurzivnim** relacijama za $p(n)$. Na primjer, **Eulerova** rekurzija ima oblik

$$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \left(p\left(n - \frac{m(3m-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{m(3m+1)}{2}\right) \right),$$

uz dogovor da je $p(n) = 0$ za sve $n < 0$. Potražite po webu!

Particije — varijacije problema

Do sada smo tražili broj particija $p(n)$, uz osnovni uvjet da u rastavu

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

pribrojnici ne moraju biti različiti. Tako smo došli do uvjeta

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m.$$

U rastavu

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m,$$

na pribrojnike možemo postavljati različite dodatne uvjete,

🔴 s tim da, i dalje, poredak pribrojnika nije bitan.

Particije — varijacije problema

Na primjer:

- Svi pribrojnici su međusobno **različiti**. Onda ih možemo **strogo rastuće** poredati

$$a_1 < a_2 < \dots < a_m.$$

- **Razlika susjednih** pribrojnika je **najmanje k**, tj. mora biti

$$a_\ell + k \leq a_{\ell+1}, \quad \text{za } \ell = 1, \dots, m - 1.$$

Za $k = 1$, ovo odgovara prethodnom uvjetu $a_\ell < a_{\ell+1}$.

- U rastavu ima **točno k** pribrojnika, tj. $m = k$ je **zadan**.

Što treba **promijeniti** u našoj funkciji da dobijemo **broj** svih odgovarajućih particija?

Particije — izazov

Prethodno rješenje za funkciju **particije** nije baš **efikasno**, slično kao kod Fibonaccijevih brojeva.

- Za $n = 4$, $p(n) = 5$, a imamo **12** poziva funkcije.
- Za $n = 100$, $p(n) = 190\,569\,292$, a imamo **1\,642\,992\,568** poziva funkcije.

Izazov. Promijenite funkciju tako da **nema** nepotrebnih rekurzivnih poziva, tj. tako da

- **svaki** rekurzivni poziv **garantira** da **postoji** barem **jedna** particija koju će taj poziv naći.

Uputa: Promjena je **jednostavna** — pogledajte **gornju** granicu granicu petlje po **i**, uz još malo opreza.

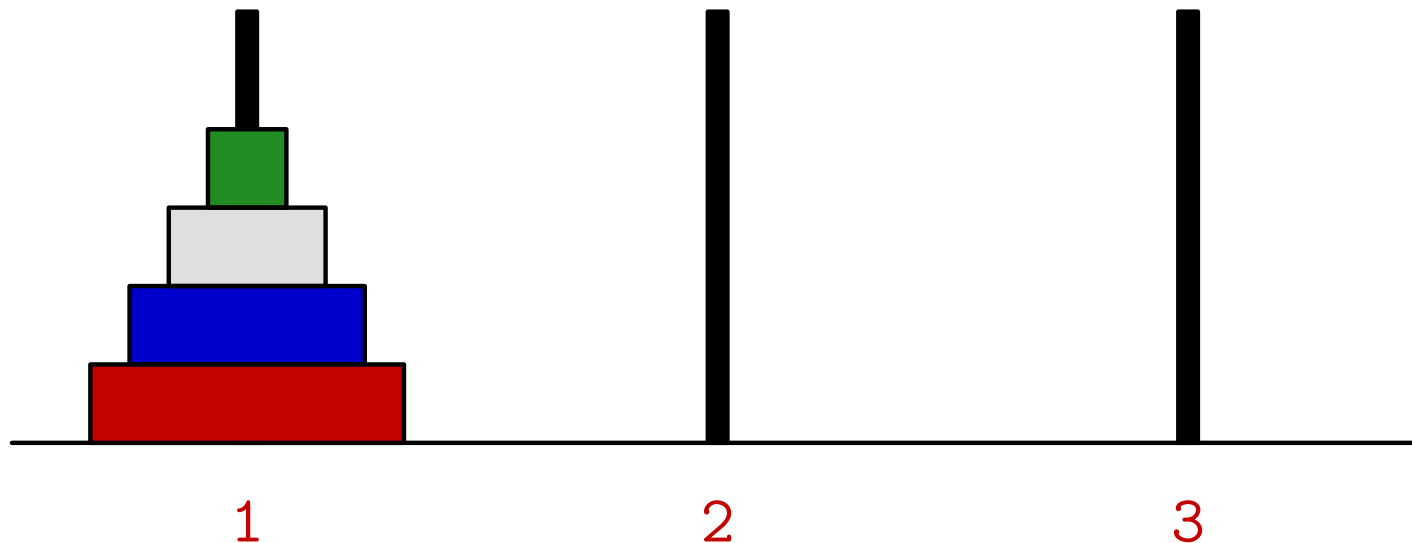
- Što treba staviti umjesto trenutne vrijednosti **suma**?

Hanojski tornjevi

Hanojski tornjevi

Primjer. Na štapu **1** nalazi se n **diskova** međusobno različite veličine, poslaganih **sortirano** od **najvećeg** prema **najmanjem** (**odozdo** prema **gore**). Imamo još dva prazna štapa **2** i **3**.

Na sljedećoj slici je primjer za $n = 4$.



Hanojski tornjevi — zadatak

Zadatak. Treba preseliti **svih n** diskova sa štapa **1** na štap **3**, u **minimalnom** broju **poteza**, korištenjem pomoćnog štapa **2**.

U **prebacivanju** diskova s **jednog** štapa na **drugi** treba poštovati sljedeća “**pravila igre**”:

- u svakom **potezu** može se prebaciti **samo jedan** disk (najgornji na nekom štapu, i to na vrh nekog drugog),
- veći** disk nikada se **ne smije** staviti **iznad manjeg** diska,
- manji** (najgornji) disk se **smije** preseliti iznad **bilo kojeg većeg** diska na nekom drugom štapu, ili na **prazan** štap.

Dakle, prebacujemo “**jedan po jedan**” disk i smije samo **manji** na **veći** (ili na “**ništa**”).

Hanojski tornjevi — razrada problema

Za početak, **nije** očito da problem uopće **ima** rješenje.

Uočiti da je prebacivanje **jednog** (najgornjeg) diska

- s **nekog** štapa (zovimo ga **odakle**),

- na neki **drugi** štap (zovimo ga **kamo**),

upravo = **osnovni potez**, kojeg uvijek **znamo** napraviti.

Ideja: svesti problem za n diskova

- na **isti** problem za **malo manje** diskova,

- koristeći **osnovni potez** za neki disk (ili neke diskove).

Dakle, želimo (rekurzivno) **smanjivati** n , dok ne dođemo do $n = 1$, a to opet **znamo** napraviti (osnovni potez).

Hanojski tornjevi — razrada (nastavak)

Traži se tzv. **parametrizacija** rekurzije — da zaista dobijemo više–manje **isti** problem s **manjim** brojem diskova.

Očito je da **štapove** treba uključiti u **parametrizaciju**, tj. da uloge štapova **odakle** i **kamo** moraju **varirati**.

Onda problem prebacivanja n diskova s **odakle** na **kamo** pišemo kao poziv funkcije

prebaci(n , **odakle**, **kamo**).

No, kad i n **varira**, zajedno sa štapovima, **ključno pitanje** je:

- 🔴 **kojih** n diskova treba uzeti za “**rekurzivna**” prebacivanja,
- 🔴 a na **koji** disk (ili diskove) treba primijeniti “**osnovni**” potez?

Hanojski tornjevi — razrada (nastavak)

Mogući izbor — izgleda dosta prirodno (na prvi pogled):

- makni **najmanjeg** s vrha štapa **odakle** na pomoćni štap, da “ne smeta”,
- prebaci **donjih $n - 1$** s **odakle** na **kamo** (“rekurzija”),
- makni **najmanjeg** s pomoćnog na vrh od **kamo**.

Dakle, za “osnovni” potez uzmemo **najgornji = najmanji** disk.

Međutim, to jednostavno **ne valja!**

- Ovaj **najmanji** “**blokira**” pomoćni štap, jer **ništa** ne možemo staviti na njega,
- tj., nešto moramo **vratiti** na polazni štap.

A, zatim, postaje još kompliciranije . . . i ne vidi se rekurzija.

Hanojski tornjevi — razrada (nastavak)

Pravi odgovor izlazi iz ograničenja “manji na veći”.

- Rekurzivna funkcija `prebaci` prebacuje najgornjih n diskova na polaznom štapu, s `odakle` na `kamo`.

Uočite:

- Ostali diskovi `ispod` tih n (ako ih ima) su sigurno `veći`, pa `ne mogu` “smetati” kod prebacivanja najgornjih n !
- Do tih najgornjih n možemo doći `bez dodatnih` poteza.

U realizaciji funkcije `prebaci`, ključni korak je

- prebaciti `najdonji` = `najveći` disk s `odakle` na `kamo`, na njegovo `pravo` mjesto — to je traženi “`osnovni`” potez!

Naravno, prvo treba doći do najdonjeg, a zatim sve ostale vratiti na njega — “`rekurzivna`” prebacivanja $n - 1$ diskova.

Hanojski tornjevi — razrada (nastavak)

Problem Hanojskih tornjeva za gornjih n diskova svodi se na:

- prebaci gornjih $n - 1$ diskova na pomoćni štap,
- prebaci jedan disk na odredišni štap — to je najdonji(!) disk od polaznih n ,
- prebaci onih gornjih $n - 1$ diskova s pomoćnog na odredišni štap.

Bitna stvar za korektnost algoritma:

- kod izvođenja rekurzivnih poziva za gornjih $n - 1$ diskova,
- ti diskovi su sigurno manji od n -tog (najdonjeg),
- pa uvijek mogu na njega, tj. on ne može “zasmetati”.

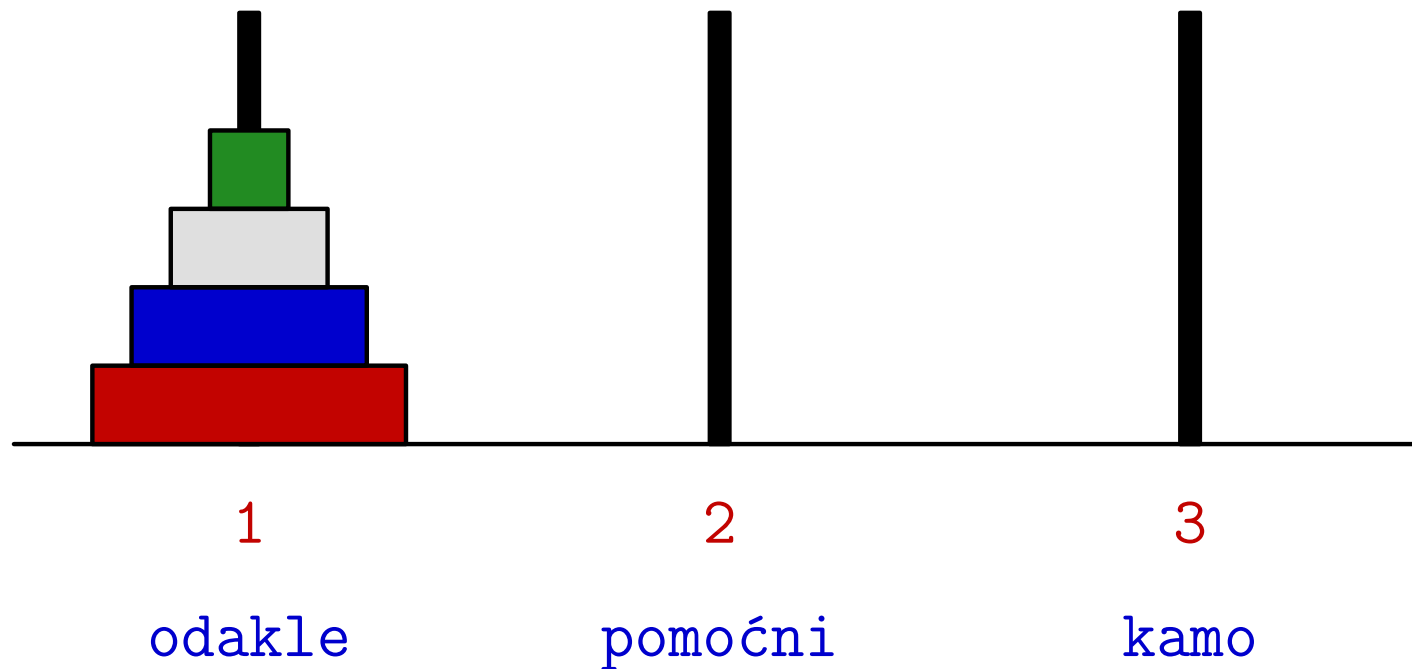
Dakle, sigurno ide “manji na veći”!

Hanojski tornjevi — razrada (nastavak)

Grafički, to izgleda ovako:

1. korak:

$n = 4$, prebaci gornja 3 na pomoćni

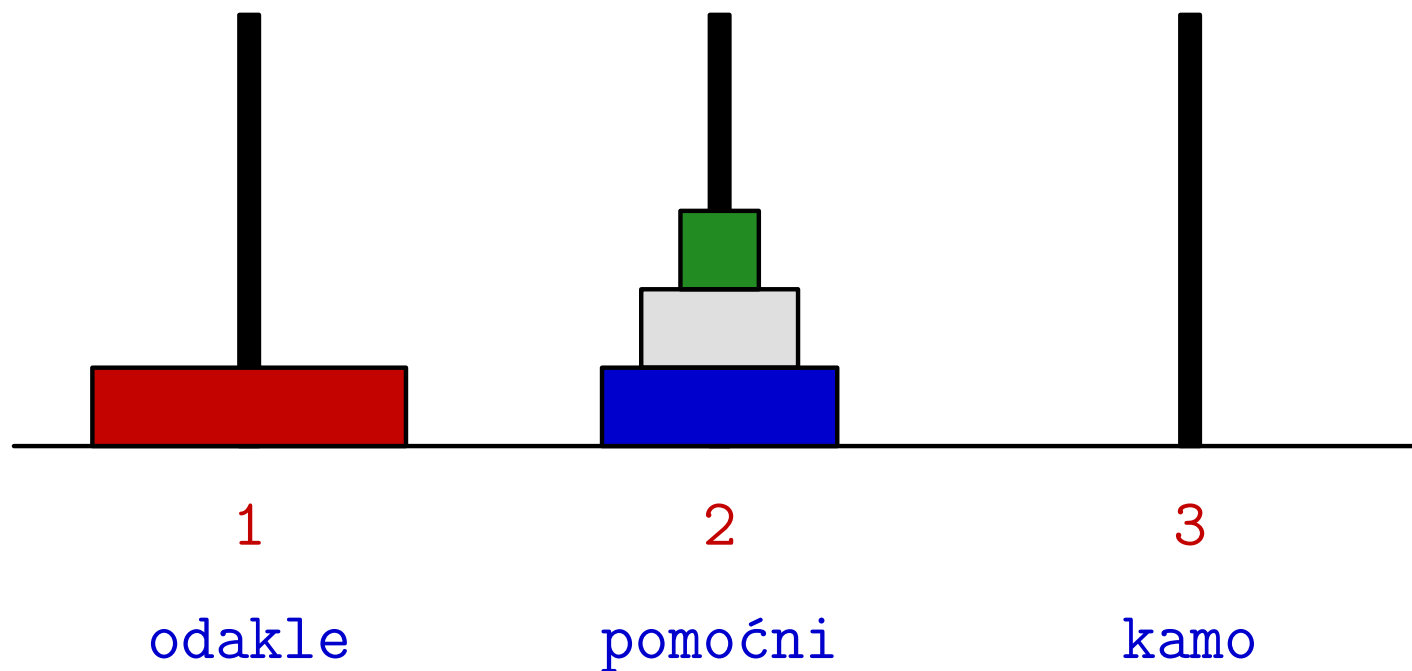


Hanojski tornjevi — razrada (nastavak)

Grafički, to izgleda ovako:

2. korak:

prebaci najveći na kamo

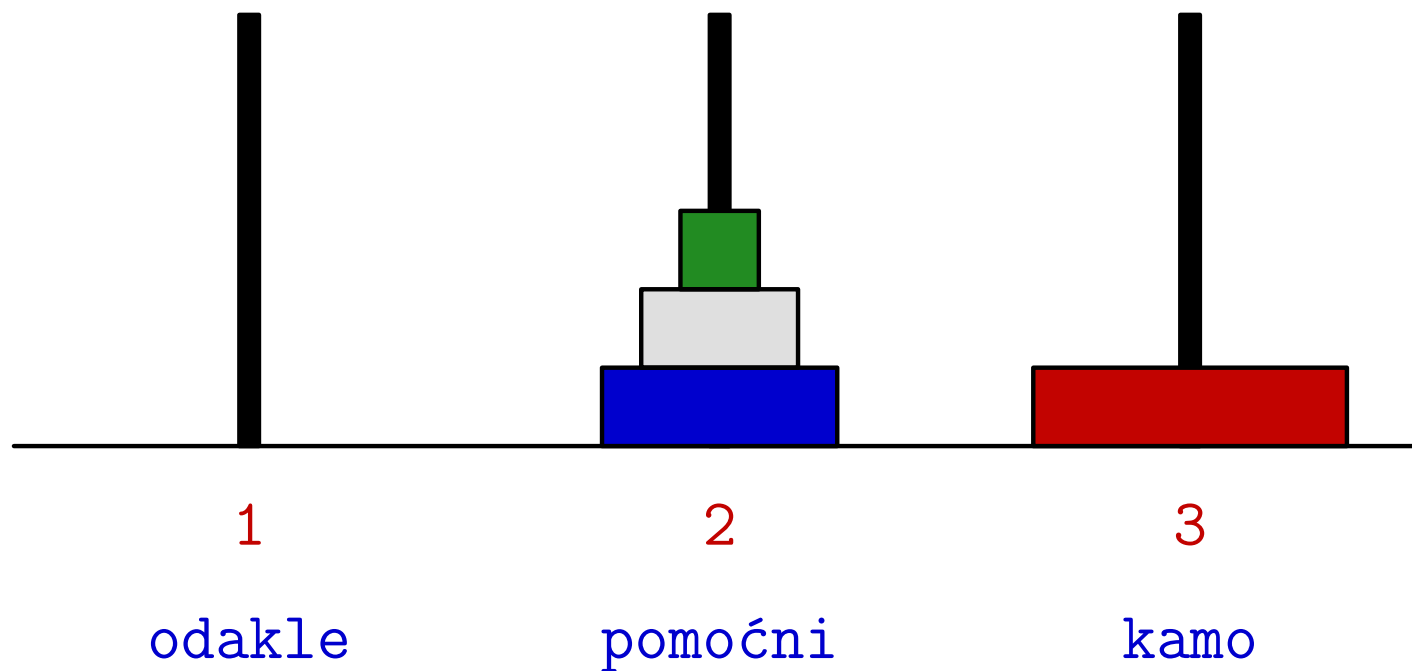


Hanojski tornjevi — razrada (nastavak)

Grafički, to izgleda ovako:

3. korak:

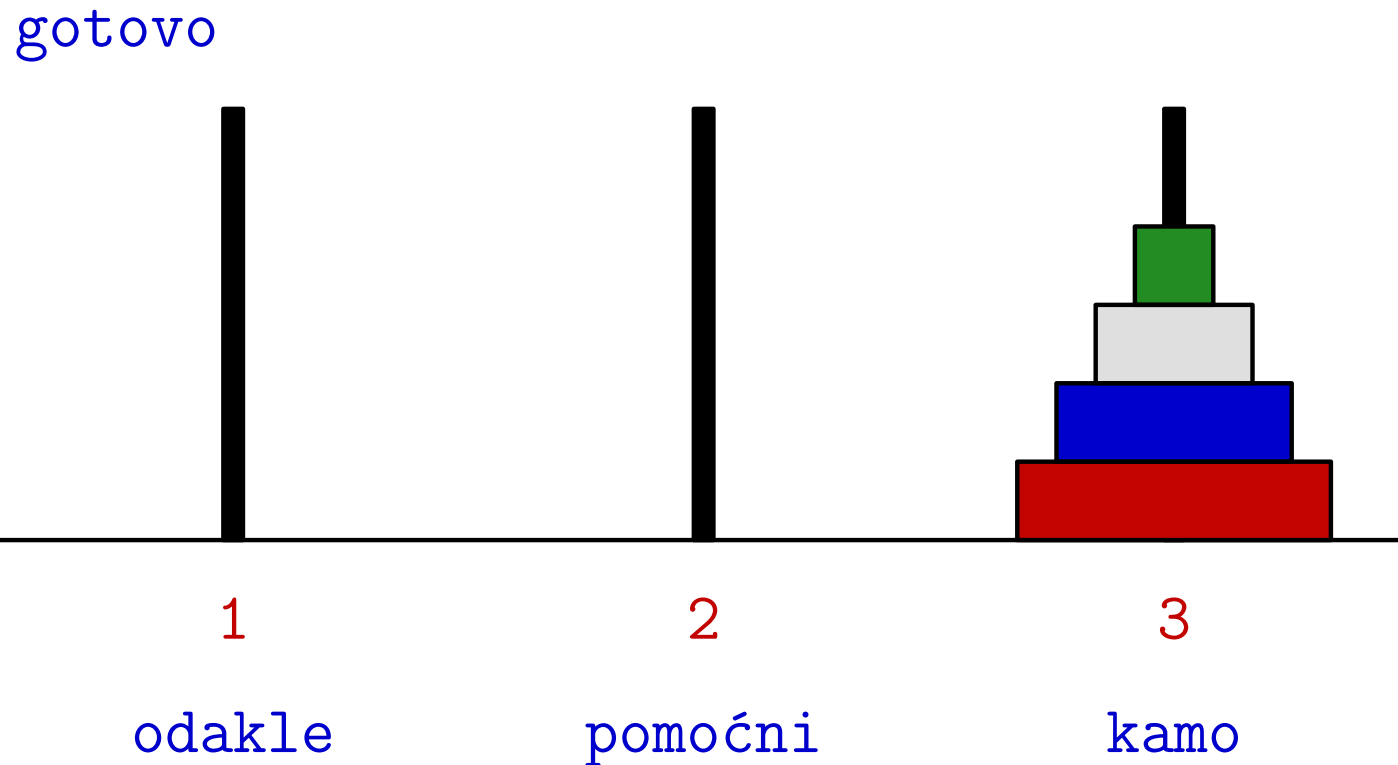
prebaci gornja 3 na kamo



Hanojski tornjevi — razrada (nastavak)

Grafički, to izgleda ovako:

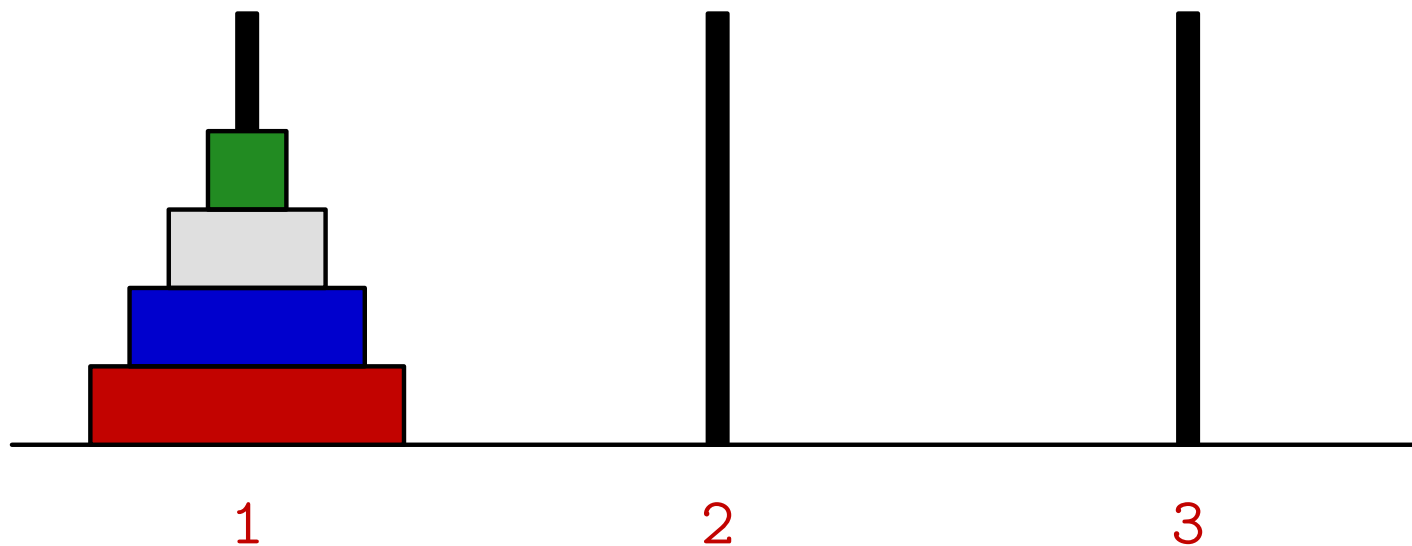
Nakon 3. koraka:



Hanojski tornjevi — potezi

Ovako izgleda prebacivanje *potez po potez*.

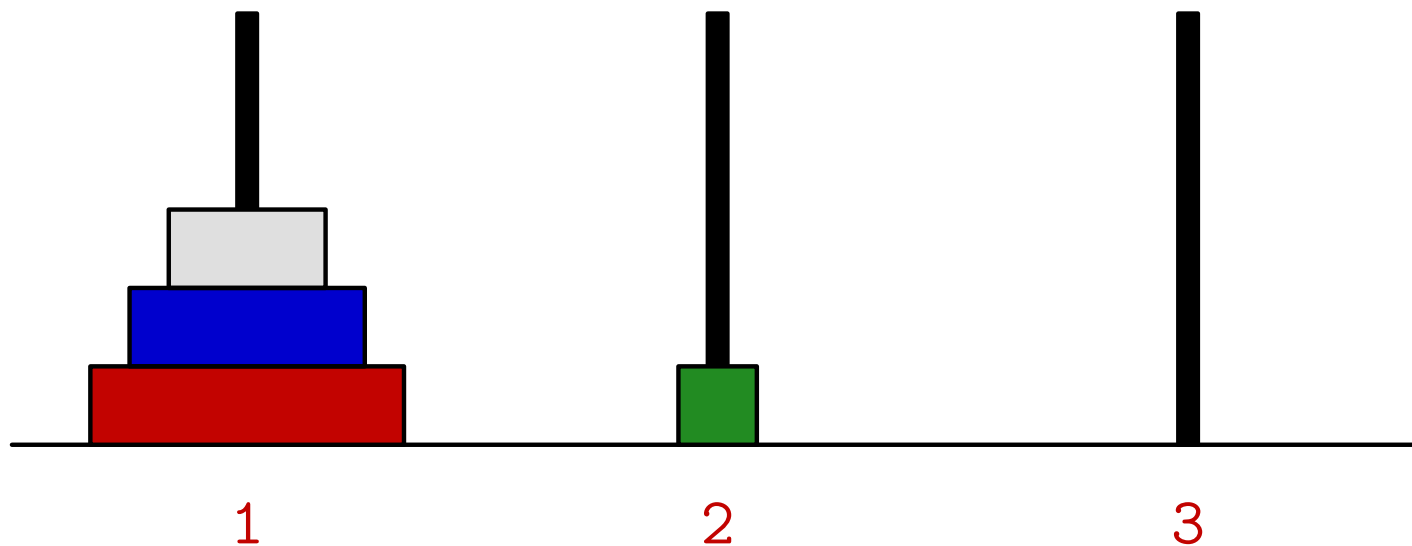
potez = 0



Hanojski tornjevi — potezi

Ovako izgleda prebacivanje *potez po potez*.

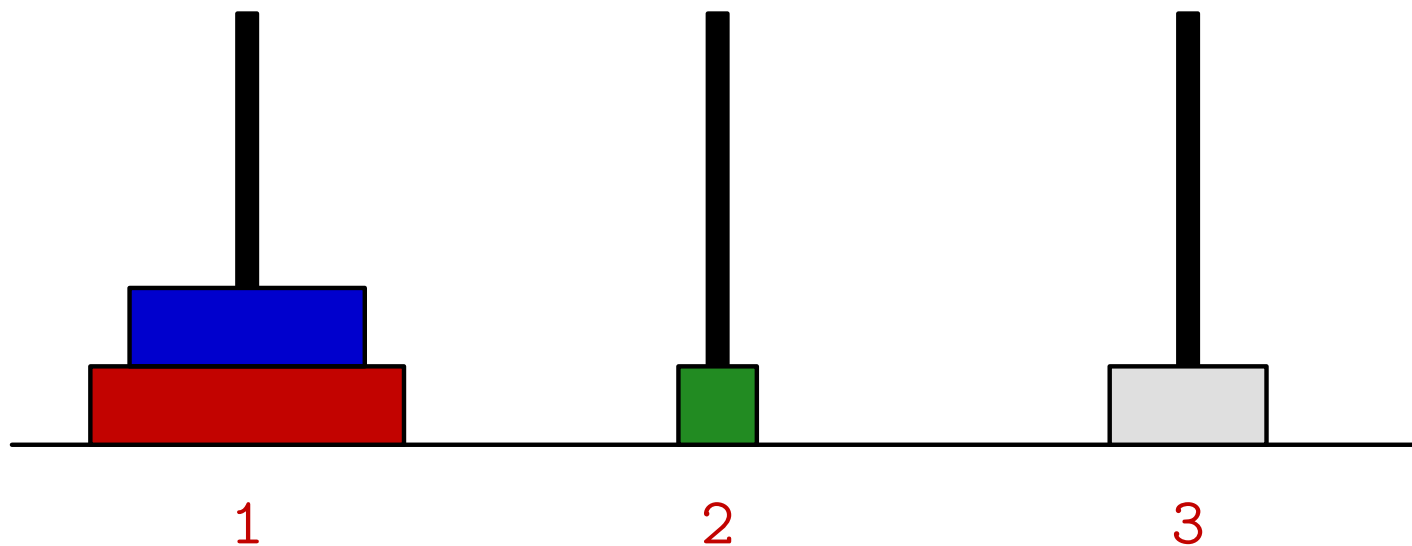
potez = 1



Hanojski tornjevi — potezi

Ovako izgleda prebacivanje *potez po potez*.

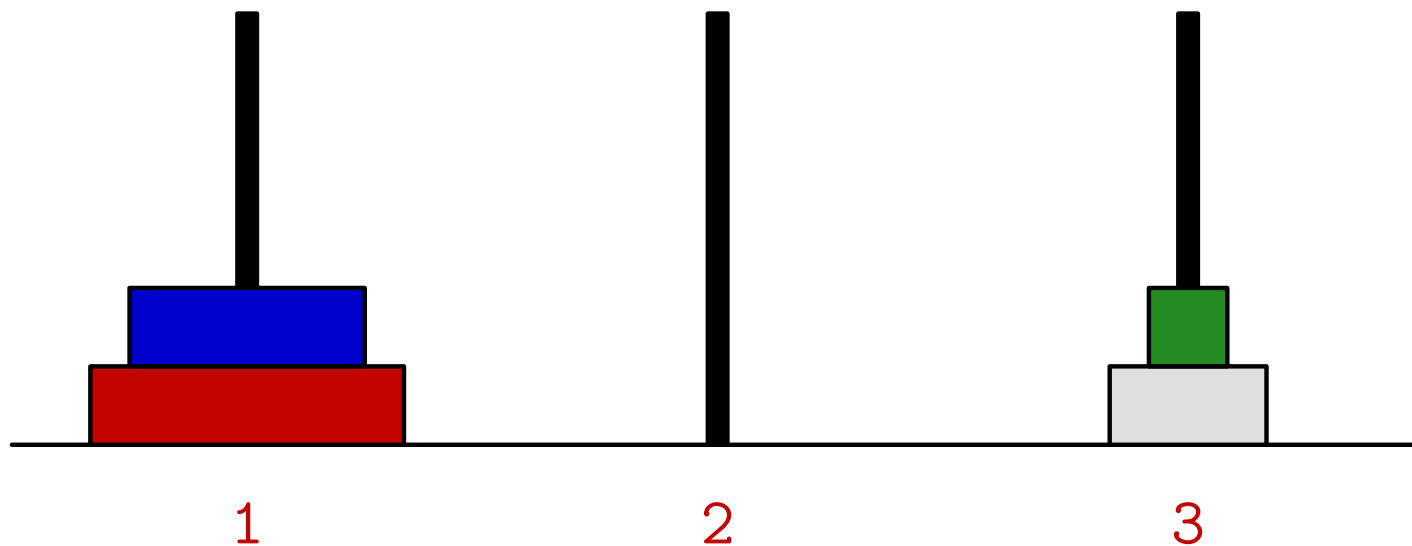
potez = 2



Hanojski tornjevi — potezi

Ovako izgleda prebacivanje *potez po potez*.

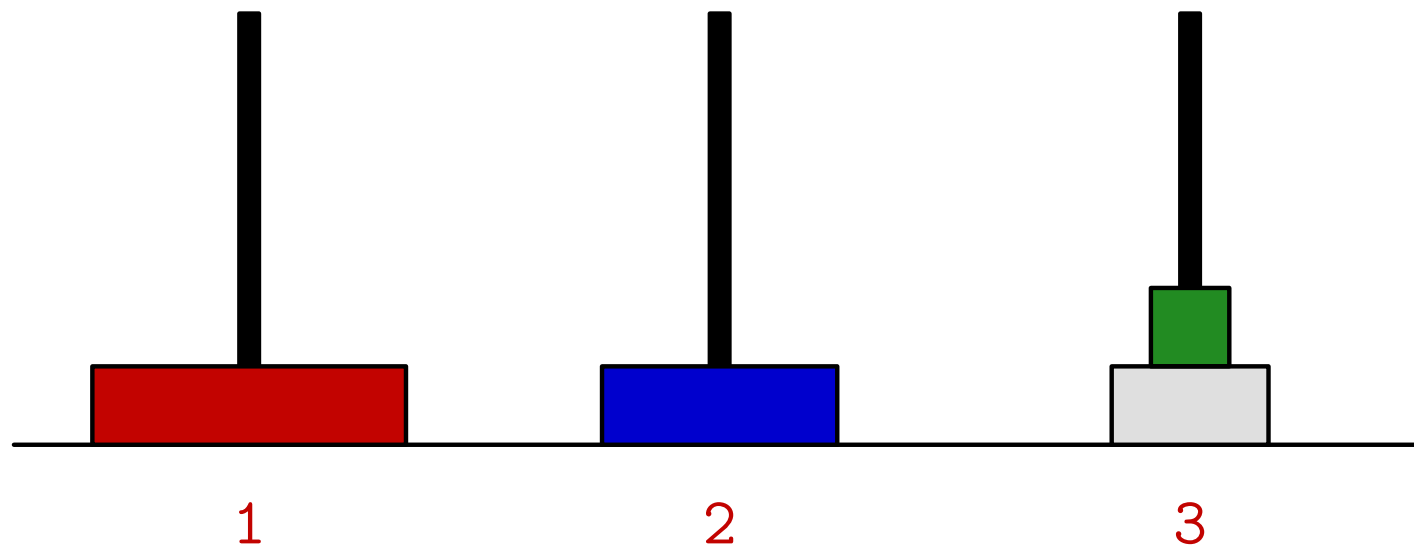
potez = 3



Hanojski tornjevi — potezi

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

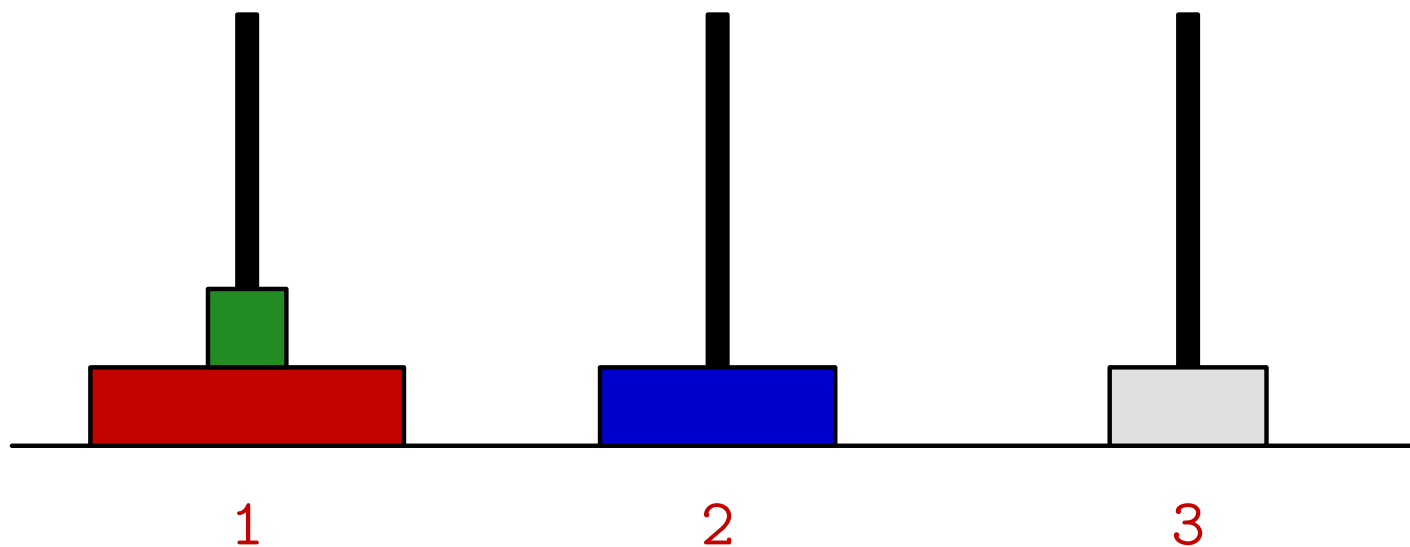
potez = 4



Hanojski tornjevi — potezi

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

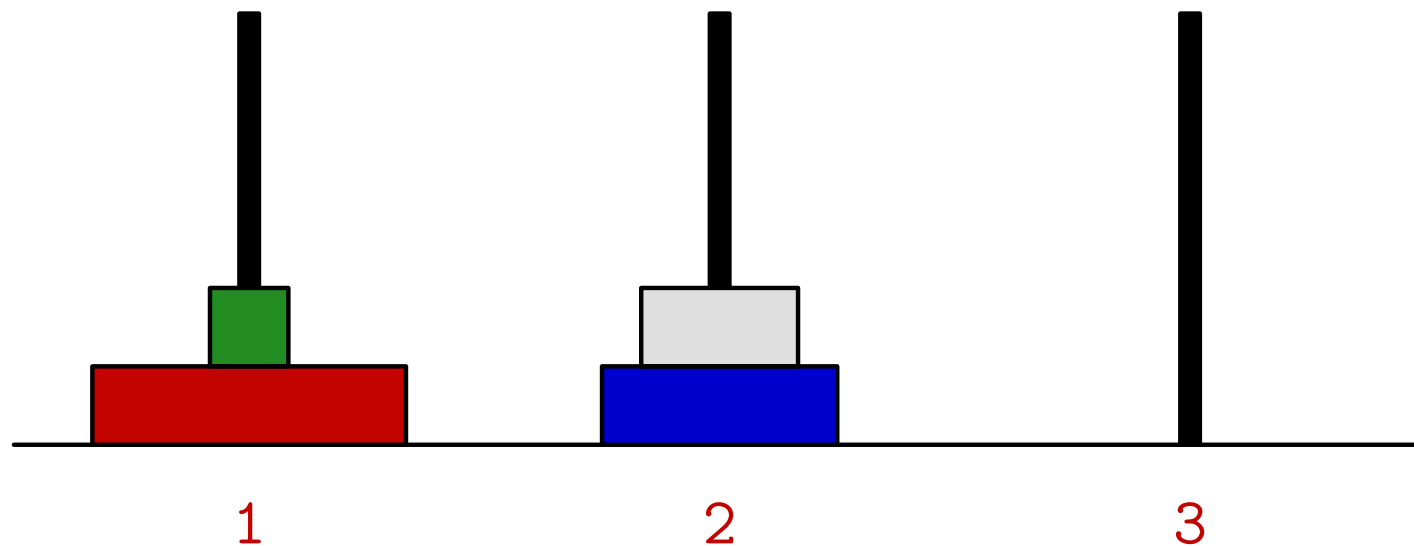
potez = 5



Hanojski tornjevi — potezi

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

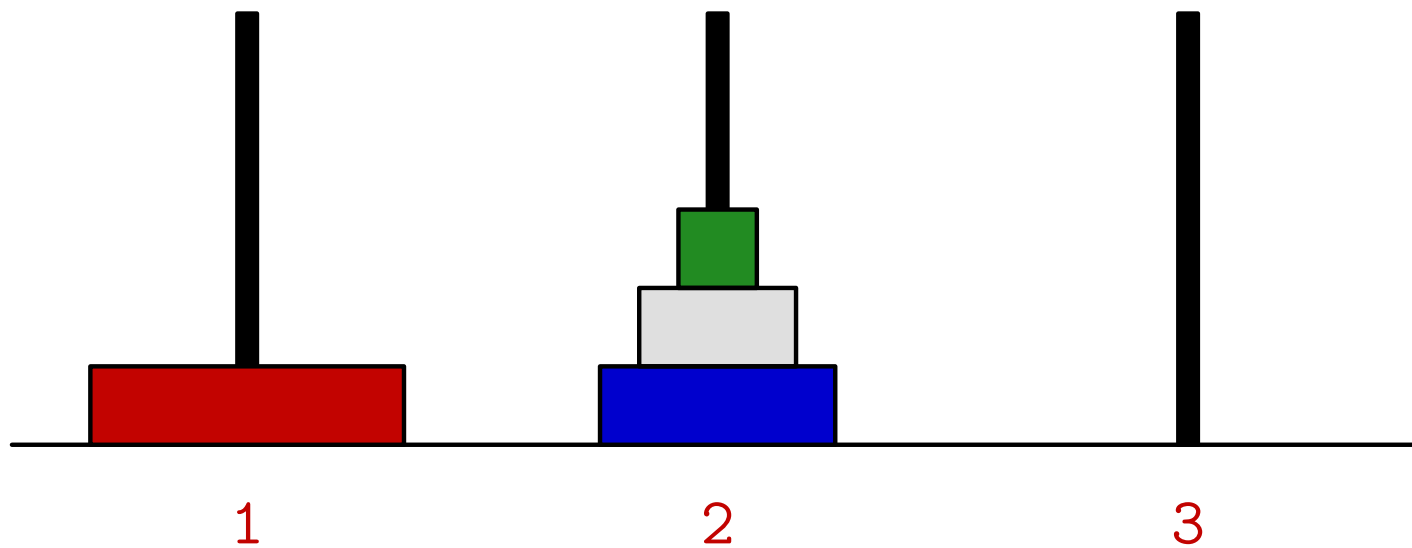
potez = 6



Hanojski tornjevi — potezi

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

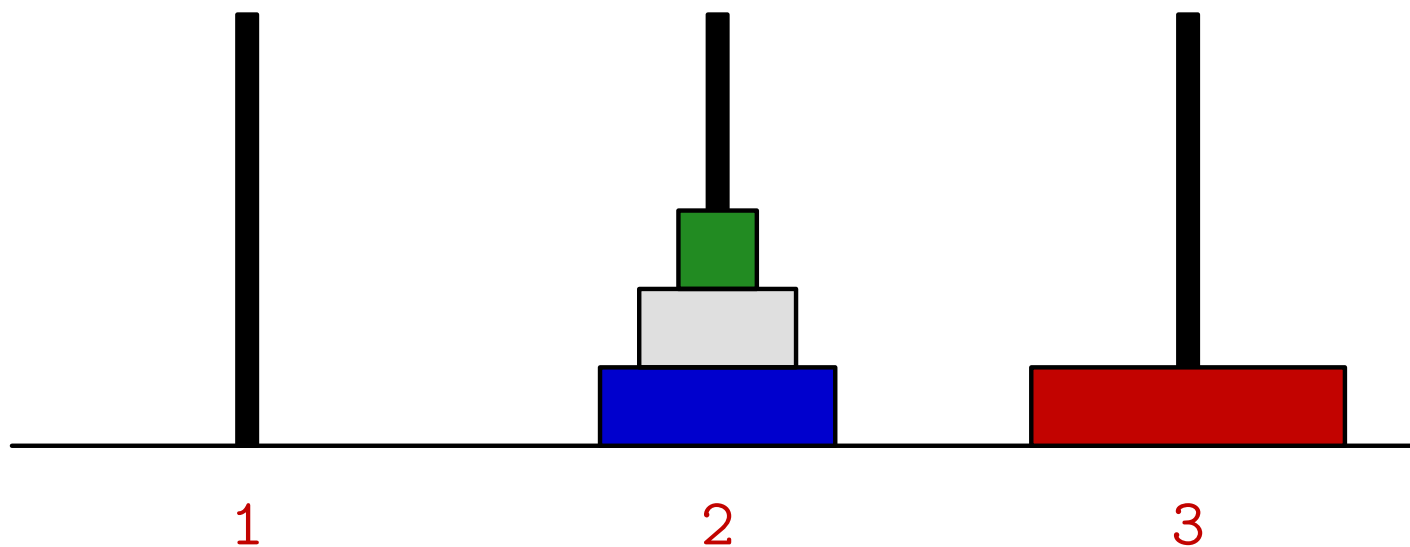
potez = 7



Hanojski tornjevi — potezi

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

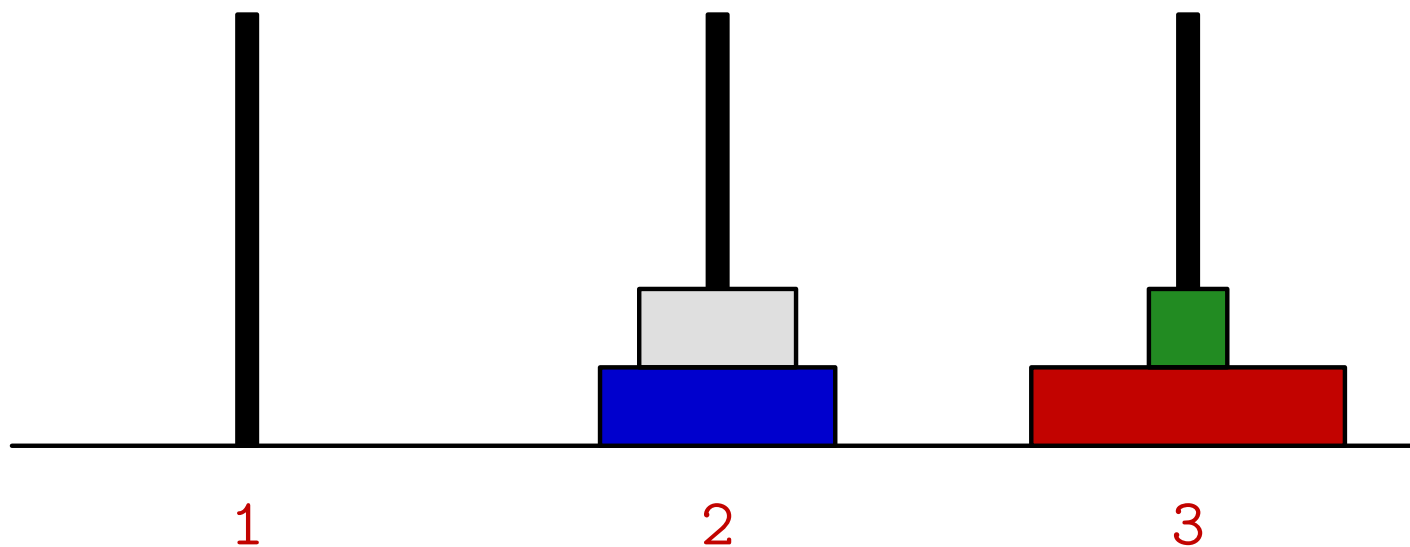
potez = 8



Hanojski tornjevi — potezi

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

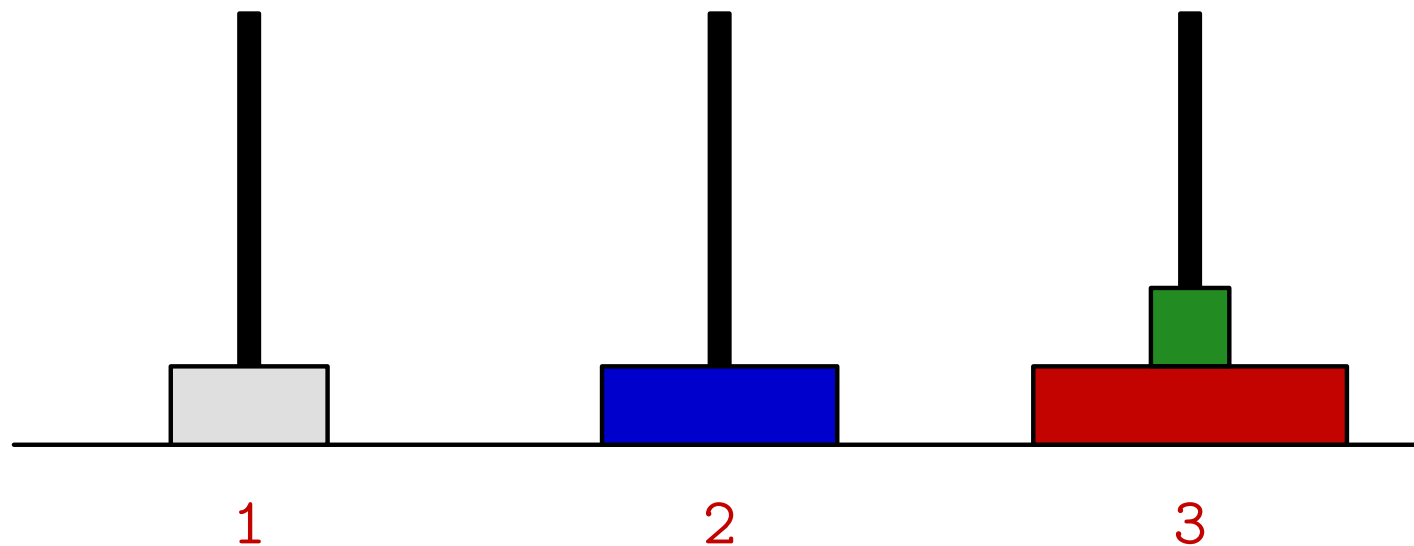
potez = 9



Hanojski tornjevi — potezi

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

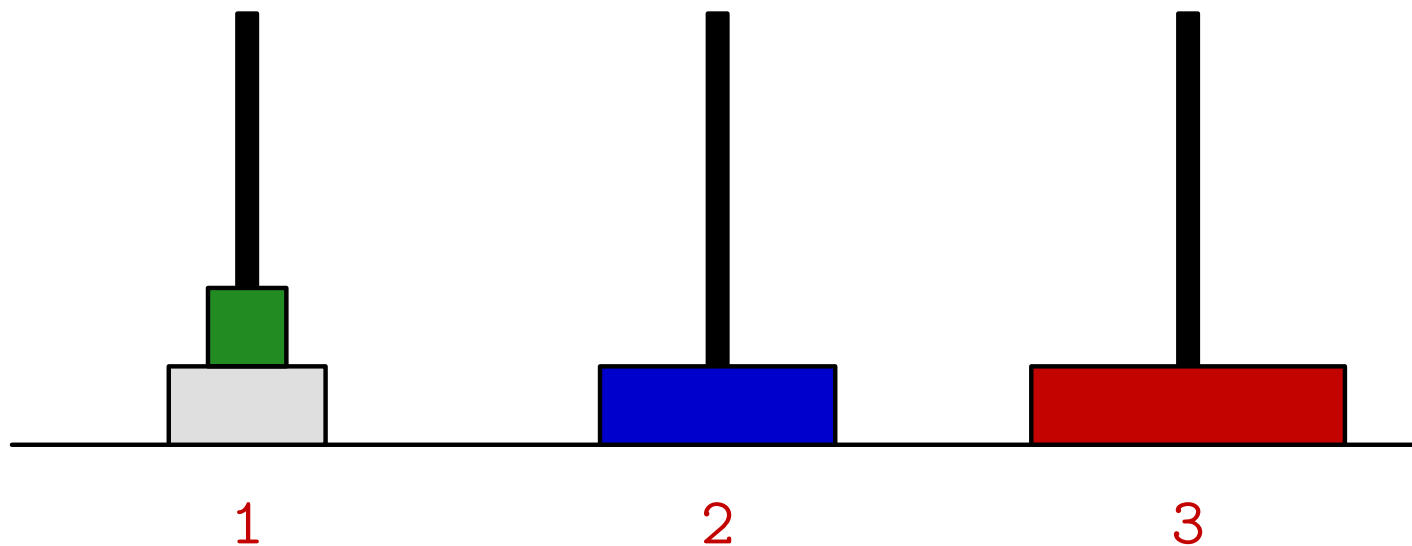
potez = 10



Hanojski tornjevi — potezi

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

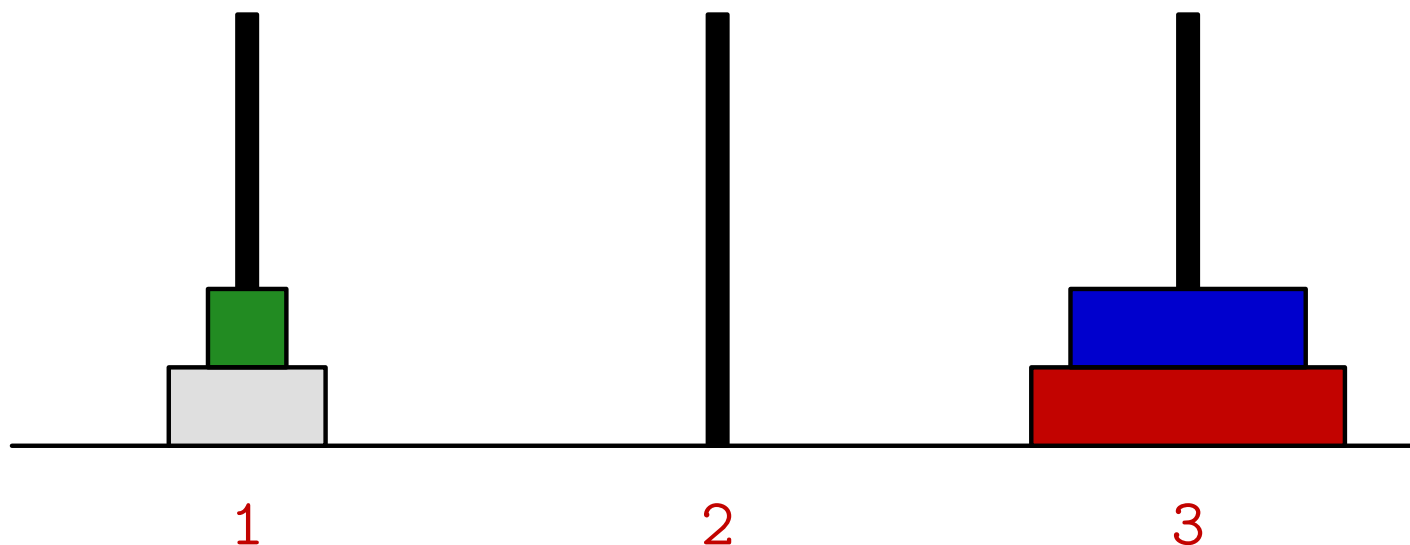
potez = 11



Hanojski tornjevi — potezi

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

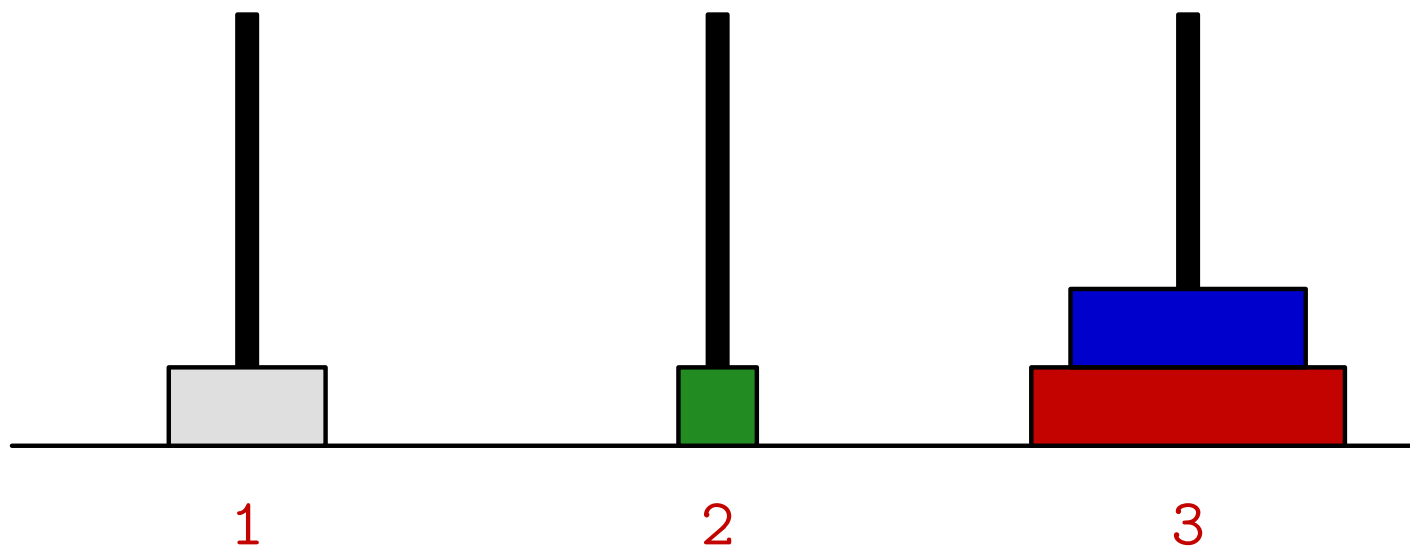
potez = 12



Hanojski tornjevi — potezi

Ovako izgleda prebacivanje *potez po potez*.

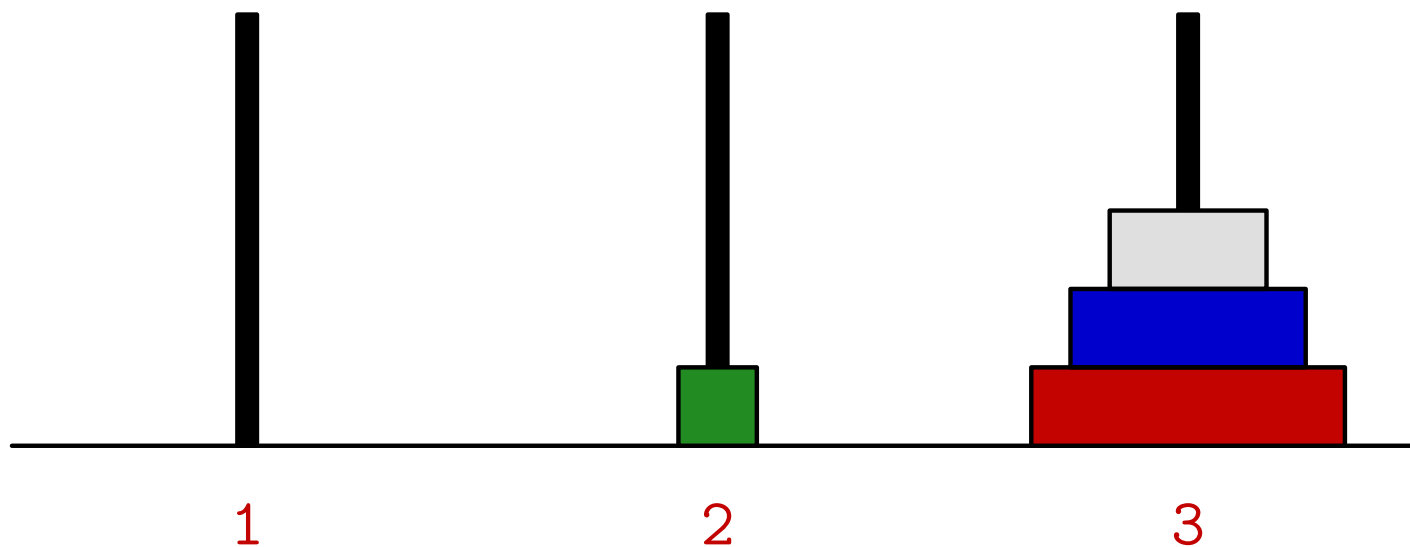
potez = 13



Hanojski tornjevi — potezi

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

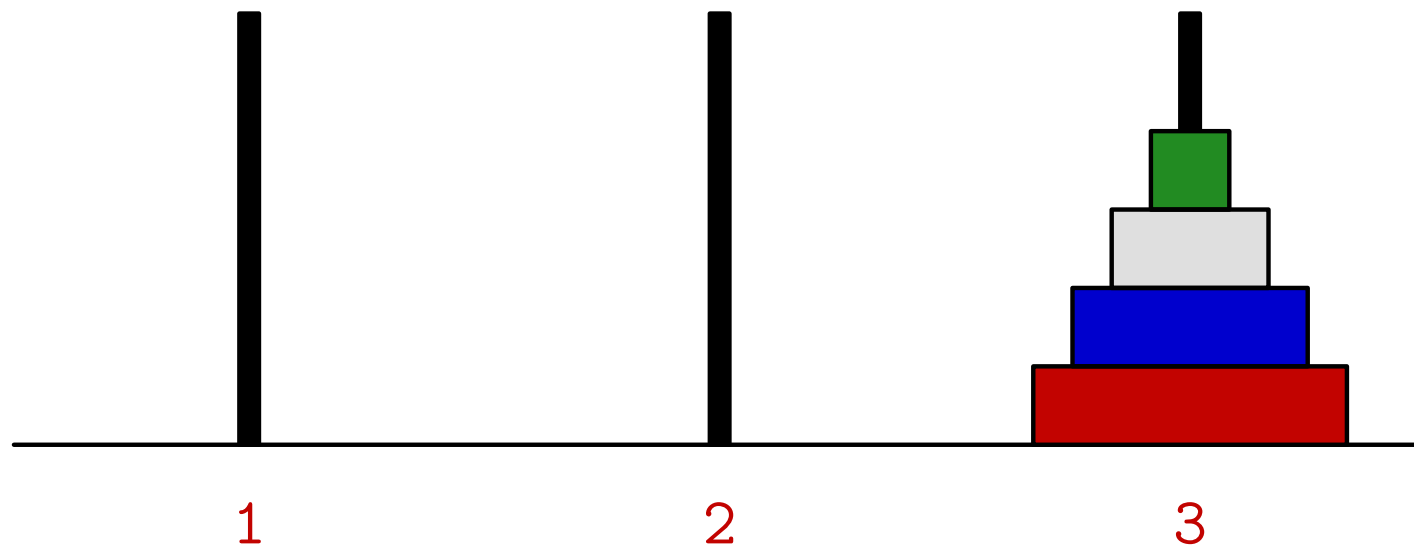
potez = 14



Hanojski tornjevi — potezi

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

potez = 15



Hanojski tornjevi — animacija

Zgodnu animacijo Hanojskih tornjeva najdete na web-stranici:

<https://www.mathsisfun.com/games/towerofhanoi.html>.

Hanojski tornjevi — skica programa

Program za rješenje problema Hanojskih tornjeva, očito, ima dvije funkcije:

- `prebaci_jednog` — koja realizira osnovni potez prebacivanja jednog (najgornjeg) diska s nekog na neki drugi štap,
- `Hanojski_tornjevi` — koja realizira rekurzivno prebacivanje gornjih n diskova (za zadani n) u obliku:
 - prebaci gornjih $n - 1$ diskova na pomoćni štap,
 - prebaci jedan disk (najdonji od n) na odredišni štap,
 - prebaci onih gornjih $n - 1$ diskova s pomoćnog na odredišni štap.

Precizna realizacija ovih funkcija ovisi o tome što želimo dobiti kao rješenje problema (tj. što je izlaz).

Hanojski tornjevi — redosljed poteza

Imamo **dvije** osnovne mogućnosti:

- želimo **točan redosljed** svih **osnovnih** poteza (“potez po potez”),
- želimo samo ukupni **broj** osnovnih poteza.

Realizirat ćemo **prvu** varijantu koja **piše** redosljed poteza.

Drugu — probajte sami.

Obje funkcije tada **moraju** dobiti **točna** značenja pojedinih štapova:

- **prebaci_jednog** mora znati **odakle** i **kamo** prebacuje,
- **Hanojski_tornjevi**, osim **n**, isto mora znati **odakle** i **kamo** prebacuje. Radi jednostavnosti, dodat ćemo i **pomocni**, da ga ne moramo računati iz preostala dva.

Hanojski tornjevi — početak programa

Sljedeći program ispisuje **redosljed poteza**, tj. prebacivanja (najgornjih) diskova. Program poziva **rekurzivnu** funkciju `Hanojski_tornjevi`.

Funkcija `prebaci_jednog` samo **ispisuje** osnovni potez.

```
#include <stdio.h>
```

```
void prebaci_jednog(int odakle, int kamo)
{
    printf("  prebaci s %d na %d\n", odakle, kamo);

    return;
}
```

Hanojski tornjevi — rekurzivna funkcija

```
void Hanojski_tornjevi(int n, int odakle,
                      int kamo, int pomocni)
{
    if (n > 0) {
        Hanojski_tornjevi(n - 1, odakle, pomocni, kamo);
        prebaci_jednog(odakle, kamo);
        Hanojski_tornjevi(n - 1, pomocni, kamo, odakle);
    }
    return;
}
```

Kraj rekurzije: za $n = 0$ ne radimo ništa — nema poteza!

Nažalost, i ti “prazni” pozivi troše vrijeme (ima ih 2^n , v. iza).

Hanojski tornjevi — efikasnija (brža) funkcija

```
void Hanojski_tornjevi(int n, int odakle,
                      int kamo, int pomocni)
{
    if (n <= 1)      // Uz n > 0, to znaci n == 1.
        prebaci_jednog(odakle, kamo);
    else {
        Hanojski_tornjevi(n - 1, odakle, pomocni, kamo);
        prebaci_jednog(odakle, kamo);
        Hanojski_tornjevi(n - 1, pomocni, kamo, odakle);
    }
    return;
}
```

Kraj rekurzije: za $n = 1$ radimo osnovni potez!

Hanojski tornjevi — glavni program

```
int main(void) {
    int n;

    for (n = 1; n <= 5; ++n) {
        printf("\n Prebaci %d diskova s 1 na 3:\n", n);
        Hanojski_tornjevi(n, 1, 3, 2);
    }

    return 0;
}
```

Broj diskova n “vrtimo” od 1 do 5 ([hanoi_a0.c](#), [hanoi_a1.c](#)).

Zadatak. Dodajte ovom programu i brojač osnovnih poteza.

Hanojski tornjevi — broj poteza

Pretpostavimo da imamo n diskova i neka je h_n broj osnovnih poteza (prebacivanja po jednog diska).

Iz razrade algoritma odmah vidimo da je

$$h_n = h_{n-1} + 1 + h_{n-1} = 2h_{n-1} + 1, \quad \text{za } n \geq 1,$$

i $h_0 = 0$ (pa je $h_1 = 1$, kao što i očekujemo).

Ova nehomogena diferencijska (ili rekurzivna) jednačba može se riješiti (to se uči na višim godinama) i njezino rješenje je

$$h_n = 2^n - 1, \quad \text{za } n \geq 0.$$

Zadatak. Dokažite da je ovo zaista rješenje gornje jednačbe! Dokažite da je broj “praznih” poziva u prvoj funkciji 2^n .

Hanojski tornjevi — komentari

Primijetite da naš algoritam, usput, **dokazuje** da polazni problem za n diskova

- uvijek **ima** rješenje, za svaki n ,
- i da je **minimalni** broj poteza jednak $2^n - 1$, tj. optimalno rješenje je, zapravo, i **jedinstveno**.

Vidimo da **broj poteza** u premještanju diskova **vrstoglavo** raste.

- Razlog: Imamo samo **3** štapa, tj. samo **jedan pomoćni**.

Zanimljivo **poopćenje** ovog problema dobivamo ovako:

- Imamo k štapova, gdje je $k \geq 3$ unaprijed zadan, tako da imamo **više pomoćnih** štapova na raspolaganju.

Za $k > 3$, rješenja ima **više**, a traži se **minimalni** broj poteza.

Hanojski tornjevi — ograničenje

Zadatak. U “ograničenom” problemu Hanojskih tornjeva, i dalje imamo samo 3 štapa, uz dodatno ograničenje:

- u svakom potezu, disk se smije prebaciti s nekog štapa samo na susjedni štap,
- tj. zabranjeno je izravno prebacivanje s prvog na treći štap, ili obratno.

Ekvivalentno: u svakom potezu, ili stavljamo disk na srednji štap, ili mičemo disk sa srednjeg štapa.

Sastavite algoritam koji rješava ovaj problem (i tako dokažite da on ima rješenje). Koliki je broj poteza za n diskova?

Rješenje. Minimalni broj poteza = $3^n - 1$.

Struktura programa

Sadržaj

- **Struktura programa** (prvi dio):
 - Blokovska struktura jezika.
 - Doseg varijable — lokalne i globalne varijable.
 - Vijek trajanja varijable, memorijske klase.
 - Program smješten u više datoteka. Vanjski simboli.

Struktura C programa

C program je, zapravo,

- skup **definicija objekata** — **varijabli** i **funkcija**:
 - **varijable** “modeliraju” ili zauzimaju **memoriju**, a
 - **funkcije** “modeliraju” ili sadrže **instrukcije**.

Komunikacija između **funkcija** ide preko:

- **argumenata** i **vrijednosti** koje **vraćaju** funkcije,
- **vanjskih** ili **globalnih** **varijabli** — to su one **definirane izvan** bilo koje **funkcije**.

Funkcije mogu biti

- u **bilo kojem** poretku u izvornom **programu**,

a **program** može biti smješten (rastavljen) u **više datoteka** (sve dok ne “cijepamo” funkcije, što je zabranjeno).

Struktura C programa (nastavak)

Objekti u C programu mogu biti:

- globalni ili vanjski (engl. external) — definirani **izvan** bilo koje funkcije, ili
- lokalni ili unutarnji (engl. internal) — što znači da su definirani “lokalno” **unutar** neke funkcije.

Bitno:

- Funkcije u C-u su **uvijek** globalne ili vanjske, jer C
- **ne dozvoljava** da se funkcije definiraju **unutar** neke druge funkcije

(za razliku od nekih drugih jezika, poput Pascala).

Struktura C programa (nastavak)

Vanjski objekti imaju svojstvo da se

- svaka referenca na takav objekt s istim imenom zaista i odnosi na istu stvar, tj.
- isto ime ne može značiti dvije različite stvari!

Takva imena su, u načelu, tzv. vanjski ili “javni” simboli, a

● pripadni objekti su univerzalno dohvatljivi (dostupni), čak i kad su funkcije, koje ih dohvaćaju, smještene u raznim datotekama (i prevode se odvojeno).

Ova univerzalna dohvatljivost može se ograničiti (ključnom riječi `static` za vanjske objekte, v. malo kasnije).

Struktura C programa (nastavak)

Za unutarnje objekte to ne vrijedi — oni nisu univerzalno dohvatljivi.

Funkcije ne mogu biti unutarnji objekti, tj.

- jedini unutarnji objekti su varijable, ili preciznije,

- argumenti i varijable definirani unutar funkcija (argumenti su, ionako, lokalne varijable).

Krenimo od lokalnih varijabli — njih je najlakše objasniti,

- jer se definiraju unutar blokova, kao što smo dosad, uglavnom, i radili.

Blokovska struktura jezika — lokalne varijable

Blok naredbi je svaki **niz naredbi** koji se nalazi **unutar** **vitičastih** zagrada (recimo, tijelo funkcije).

- **C dozvoljava** da se u **svakom bloku** naredbi **deklariraju** **varijable**. Takve varijable zovu se **lokalne** varijable.
- **Deklaracija** varijabli **unutar** bloka **mora prethoditi** **prvoj** izvršnoj naredbi u bloku (standard **C90**, ne mora u **C99**).

Primjer:

```
if (n > 0) {
    int i;    /* deklaracija varijable */
    for (i = 0; i < n; ++i)
        ...
}
```

Blokovska struktura jezika — doseg varijable

Pravila **dosega** (“vidljivosti” ili dostupnosti):

- **Varijabla** definirana **unutar** nekog bloka **vidljiva** je samo **unutar tog bloka** (samo tamo postoji).
- **Izvan** bloka toj **varijabli** se **ne može pristupiti** (ona ne postoji), tj. njezino **ime** izvan bloka **nije definirano**.
- **Izvan** bloka može biti deklarirana **varijabla istog imena**, ali ona je **nedostupna unutar** bloka, jer je “prekrivena” varijablom **istog imena**.
- **Varijabla** definirana **izvan** bloka **vidljiva** je u **tom** bloku ako **nije** “pokrivena” lokalnom varijablom **istog imena**, tj. ako u bloku **nije** definirana varijabla istog imena.

Ukratko, **dostupna** je samo “**najlokalnija**” varijabla **istog imena**.

Blokovska struktura jezika — doseg varijable

Primjer:

```
int main(void) {
    int x, y;
    ...
    if (x > 0)
    {
        double y; /* int y NIJE vidljiv
                   u bloku */
                 /* int x JE vidljiv u bloku */
        ...
    }
}
```

Funkcije — doseg formalnog argumenta

Formalni argument funkcije vidljiv je unutar funkcije i nije dohvatljiv (definiran) izvan nje.

- Doseg (vidljivost) formalnog argumenta je isti kao i doseg lokalne varijable definirane na početku funkcije.

Primjer:

```
int x, y;
...
void f(double x) {
    double y; /* int x i int y NISU      */
    ...      /* vidljivi unutar funkcije */
}
int main(void) { ... }
```

Atributi varijable

Varijabla je ime (sinonim) za neku lokaciju ili neki blok lokacija u memoriji (preciznije, za sadržaj tog bloka).

Sve varijable imaju tri atributa: tip, doseg (engl. scope) i vijek trajanja (engl. lifetime).

- Tip = kako se interpretira sadržaj tog bloka (piše i čita, u bitovima), što uključuje i veličinu bloka.
- Vijek trajanja = u kojem dijelu memorije programa se rezervira taj blok.
 - Stvarno, postoje tri bloka: statički, programski stog (“run-time stack”) i programska hrpa (“heap”).
- Doseg = u kojem dijelu programa je taj dio memorije “dohvatljiv” ili “vidljiv”, u smislu da se može koristiti — čitati i mijenjati.

Atributi varijable (nastavak)

- Prema **tipu**, imamo varijable tipa
 - **int**, **float**, **char**, itd.
- Prema **dosegu**, varijable se dijele na:
 - **lokalne** (unutarnje) i **globalne** (vanjske).
- Prema **vijeku trajanja**, varijable mogu biti:
 - **automatske** i **statičke** (postoje još i **dinamičke**).

Doseg i vijek trajanja određeni su, u principu, **mjestom deklaracije**, odnosno, **definicije** objekta (varijable) — **unutar** ili **izvan** neke funkcije.

“Upravljanje” **vijekom trajanja** (a, ponekad, i **dosegom**) vrši se tzv. **identifikatorima memorijske klase** (ključne riječi **auto**, **extern**, **register** i **static**) i to kod **deklaracije** objekta.