

# *Programiranje 1*

## *13. predavanje*

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

# Sadržaj predavanja

- Pretraživanje i sortiranje nizova (nastavak):
  - Pretraživanje — sekvencijalno i binarno (ponavlj.).
  - Sortiranje izborom ekstrema — Selection sort.
  - Složenost sortiranja — općenito.
  - Složenost Selection sorta.
  - Sortiranje zamjenama susj. elemenata — Bubble sort.
  - Složenost Bubble sorta.
  - Sortiranje (sortiranim) umetanjem — Insertion sort.
  - Složenost Insertion sorta.
  - Još o sortiranju i usporedba algoritama.
- Završni primjeri (ponavljanje za kolokvij):
  - Zadatak 1, Zadatak 2.

# Informacije

Zadnji petak, 24. 1., sam isto “tu” od 10 sati

● i možete me “pitati” (u uredu sam, ili ispred faksa).

Konzultacije od 12 sati, također, “rade” — slobodno **dođete!**

# Informacije — dogovor za usmeni, ocjene

Za eventualni **usmeni** (po želji/“kazni”):

- 📌 pogledati **obavijest** na **webu**, uz **rezultate** kolokvija!

Uobičajeno,

- 📌 **dogovor za usmeni** je u vrijeme **uvida** (ne kasnije), a **usmeni** je nekoliko dana kasnije.

Više **nema** indeksa — pa **nema** ni **upisa ocjena**.

- 📌 Ocjene šaljemo na upis u **ISVU** (studomat) nekoliko dana **nakon** uvida, a najkasnije dan nakon usmenih.

# Pretraživanje nizova (ponavljanje)

# Sadržaj

- Pretraživanje nizova (ponavljanje):
  - Sekvencijalno pretraživanje.
  - Složenost sekvencijalnog pretraživanja.
  - Binarno pretraživanje sortiranog niza.
  - Složenost binarnog pretraživanja.

# Pretraživanje nizova (ponavljanje)

Problem **pretraživanja** — opća formulacija:

- Treba **provjeriti** **nalazi** li se zadani element **elt** među članovima zadanog niza

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}.$$

Drugim riječima, **pitanje** glasi:

- postoji li indeks  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  takav da je  $\text{elt} = x_i$ .

Ako niz **nije** sortiran, tj. u nizu vlada “**nered**”, koristimo

- **sekvencijalno** pretraživanje (“jedan po jedan”).

# Sekvencijalno pretraživanje — funkcija

Funkcija koja vraća odgovor:

---

```
int seq_search(int x[], int n, int elt)
{
    int i;

    for (i = 0; i < n; ++i)
        if (x[i] == elt)
            return 1;

    return 0;
}
```

---

Koristimo “skraćenu” pretragu, bez varijable *nasli*.



# Sekvencijalno pretraživanje — složenost

Složenost pretraživanja mjerimo brojem usporedbi

• “jednak”, odnosno, “različit” (jer nema uređaja),

i to samo u tipu za članove niza. Operacije na indeksima ne brojimo — njih ima podjednako mnogo kao i usporedbi.

U najgorem slučaju, moramo provjeriti sve članove niza, tj.

$$\text{broj usporedbi} \leq n.$$

Ova mjera složenosti je dobra procjena za trajanje izvršavanja algoritma sekvencijalnog pretraživanja — oznaka  $T(n)$ .

Zapis za trajanje:

$$T(n) \in O(n).$$

Značenje: trajanje, u najgorem slučaju, linearno ovisi o  $n$ .

# Točno značenje zapisa složenosti

Točno matematičko značenje zapisa

$$T(n) \in O(f(n))$$

za neke funkcije  $T$  i  $f$  (sa skupa  $\mathbb{N}$  u skup  $\mathbb{R}$ ):

Postoji konstanta  $c \in \mathbb{R}$  i postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$ , takvi da, za svaki  $n \in \mathbb{N}$ , vrijedi implikacija

$$n \geq n_0 \implies T(n) \leq c \cdot f(n).$$

Prijevod:  $T$  raste sporije od “neka konstanta puta  $f$ ”, za sve dovoljno velike  $n$ .

Napomena. Često se piše  $T(n) = O(f(n))$ , što nije korektno, jer ova “jednakost” nije simetrična!

# Binarno pretraživanje

Ako je niz **uzlazno** ili **silazno sortiran**, tj. vrijedi

$$x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \quad \text{ili} \quad x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_{n-1},$$

potraga se može drastično **ubrzati**, tako da koristimo tzv.

📍 **binarno** pretraživanje — pretraživanje “**raspolavljanjem**”.

# Binarno pretraživanje — funkcija

Funkcija koja vraća odgovor (“skraćeni” oblik):

---

```
int binary_search(int x[], int n, int elt) {
    int l = 0, d = n - 1, i;
    while (l <= d) {
        i = (l + d) / 2;
        if (elt < x[i])
            d = i - 1;
        else if (elt > x[i])
            l = i + 1;
        else
            return 1;
    }
    return 0; }
```

---

## Binarno pretraživanje — složenost

Koliko traje **najdulja** potraga (= ako element **nismo** našli)?

🔴 nakon **1.** podjele — duljina niza za potragu je  $\leq \frac{n}{2}$

🔴 nakon **2.** podjele — duljina niza za potragu je  $\leq \frac{n}{4}$

🔴 nakon  **$k$ -te** podjele — duljina niza za potragu je  $\leq \frac{n}{2^k}$ .

**Zadnji** prolaz  **$k$**  smo napravili

🔴 kad se **prvi** puta dogodi da je duljina pala **strogo** ispod **1**, tj. u **prošlom** koraku je duljina niza još bila  $\geq 1$ . Onda je

$$\frac{n}{2^k} < 1 \quad \text{i} \quad \frac{n}{2^{k-1}} \geq 1.$$

Dakle, za **zadnji** prolaz  **$k$**  vrijedi  $2^{k-1} \leq n < 2^k$ .

# Binarno pretraživanje — složenost (nastavak)

Složenost opet mjerimo brojem usporedbi, ali sada koristimo

● “manji (ili jednak)”, odnosno, “veći (ili jednak)”,

jer imamo uređaj među elementima i niz je sortiran po tom uređaju. Operacije na indeksima, opet, ne brojimo.

U najgorem slučaju, za broj raspolavljanja  $k$  vrijedi

$$2^{k-1} \leq n < 2^k,$$

$$k - 1 \leq \log_2 n < k,$$

ili

$$k = 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

Svako raspolavljanje ima najviše 2 usporedbe, pa je

$$\text{broj usporedbi} \leq 2 \cdot (1 + \lfloor \log_2 n \rfloor).$$

# Binarno pretraživanje — složenost (nastavak)

Zapis za trajanje:

$$T(n) \in O(\log n).$$

**Značenje:** trajanje, u najgorem slučaju, **logaritamski** ovisi o  $n$ .

**Primjer.** U sortiranom telefonskom imeniku s  $10^6$  osoba, dovoljno je **samo 20** raspolavljanja!

**Zaključak:** **Sortiramo** zato da bismo **brže** tražili!

# Sortiranje nizova



# Sadržaj

- Sortiranje nizova (polja):
  - Sortiranje izborom ekstrema — Selection sort.
  - Razne varijante Selection sorta.
  - Složenost sortiranja — općenito.
  - Složenost Selection sorta.
  - Sortiranje zamjenama susjednih elemenata — Bubble sort.
  - Poboľšana varijanta Bubble sorta.
  - Složenost Bubble sorta.
  - Sortiranje (sortiranim) umetanjem — Insertion sort.
  - Složenost Insertion sorta.
  - Još o sortiranju i usporedba algoritama.

# Problem sortiranja nizova

Zadan je niz od  $n$  objekata

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1},$$

koje možemo uspoređivati relacijom uređaja  $\leq$  ili  $\geq$ .

Problem sortiranja niza:

- Treba preurediti zadani niz — tako da članovi budu
  - uzlazno ( $\nearrow$ ) poredani:  $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1}$ , ili
  - silazno ( $\searrow$ ) poredani:  $x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_{n-1}$ .

Za “preuređivanje” niza spremljenog kao polje koristimo

- zamjene članova niza, tj. njihovih vrijednosti:  $x_i \leftrightarrow x_j$ .

U nastavku, ako nije drugačije rečeno, pretpostavljamo da niz treba uzlazno sortirati.

# Sortiranje nizova izborom ekstrema

Ideja: Koristimo **usporedbe** i **zamjene** elemenata u nizu.

- Dovedi **najmanji** element niza  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  na **njegovo** pravo mjesto.
- To mjesto je **prvo** u cijelom nizu, pa je (nakon **zamjene**), **nova** vrijednost elementa  $x_0$ , upravo, **najmanji** element niza.
- Postupak **ponovi** na **skraćenom** (nesređenom) nizu  $x_1, \dots, x_{n-1}$  (duljine za jedan manje, tj.  $n - 1$ ).
- Niz se “**skraćuje**” **sprijeda**.
- To **ponavljamo** sve dok ne “stignemo” na niz sa samo **jednim** elementom ( $x_{n-1}$ ) — taj je sigurno **sortiran!**

Naziv algoritma: “**izbor**” ekstrema  $\rightarrow$  **Selection sort**.

# Sortiranje nizova izborom ekstrema (nastavak)

Na početku algoritma imamo nesređeni niz, tj. indeks prvog elementa u nesređenom dijelu je 0.

Algoritam uzlaznog sortiranja izborom ekstrema ima dva “građevna bloka”:

- Za  $i = 0$ , sve dok je  $i < n - 1$ , ponavljaj:
  - U nesređenom dijelu niza (indeksi od  $i$  do  $n - 1$ ) nađi najmanji element.
  - Najmanji element zamijeni s prvim elementom  $x_i$  nesređenog dijela niza (ako već nije na indeksu  $i$ ).

Nakon ovog koraka, nesređeni dio niza se smanjio za 1, tj. prvi element nesređenog dijela sad ima indeks  $i + 1$ .

# Sortiranje nizova izborom ekstrema (nastavak)

“Građevni blok”: u nesređenom dijelu niza (od  $i$  do  $n - 1$ ) nađi najmanji element (pogledati prošlo predavanje).

- Inicijalizacija: trenutno najmanji element u nesređenom dijelu je prvi element. Njegov indeks je  $\text{ind\_min} = i$ , a vrijednost  $\text{x\_min} = x_i$ .
- Za elemente s indeksima od  $j = i + 1$  do  $j = n - 1$  ispitaj je li  $x_j < \text{x\_min}$ .
- Ako je, zapamti novu minimalnu vrijednost  $\text{x\_min} = x_j$  i novi indeks minimalnog elementa  $\text{ind\_min} = j$ .

# Sortiranje nizova izborom ekstrema (nastavak)

“Građevni blok”: ako nađeni minimalni element nije na prvom mjestu, tj. ako je  $\text{ind\_min} \neq i$ , vrši se

- zamjena prvog elementa nesređenog dijela i minimalnog elementa,

$$x_i \leftrightarrow x_{\text{ind\_min}},$$

korištenjem pomoćne varijable `temp` — u tri koraka:

- `temp = xi`
- `xi = xind_min`
- `xind_min = temp.`

Na kraju, sve navedene korake spajamo u jednu funkciju za sortiranje zadanog niza. Pripadni algoritam zovem `min_1`.

## Sortiranje izborom ekstrema — funkcija

```
void selection_sort(int x[], int n)
{
    int i, j, ind_min, x_min, temp;

    for (i = 0; i < n - 1; ++i) {
        ind_min = i;
        x_min = x[i];
        for (j = i + 1; j < n; ++j) {
            if (x[j] < x_min) {
                ind_min = j;
                x_min = x[j];
            }
        }
    }
}
```

## Sortiranje izborom ekstrema — funkcija (nast.)

```
        if (i != ind_min) {
            temp = x[i];
            x[i] = x[ind_min];
            x[ind_min] = temp;
        }
    }
    return;
}
```

---

Zbog `x_min = x[ind_min]`, zamjena se može napraviti i **bez** pomoćne varijable `temp`, sa samo **dvije** naredbe (`min_1a`)

---

```
x[ind_min] = x[i];
x[i] = x_min;      // x_min glumi temp.
```

---



## Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 0`

`x_min = x[0] = 42`

`ind_min = 0`

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$   
 $j = 1$

$x_{\min} = x[1] = 12$

$ind_{\min} = 1$

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$

$j = 2$

$x_{\min} < x[2] = 55$

$\text{ind\_min} = 1$

## Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$

$j = 3$

$x_{\min} < x[3] = 94$


$\text{ind\_min} = 1$

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$



$j = 4$



$x_{\min} < x[4] = 18$

$\text{ind\_min} = 1$

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$

$j = 5$

$x_{\min} < x[5] = 44$

$ind_{\min} = 1$

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$

$j = 6$

$x_{\min} < x[6] = 67$

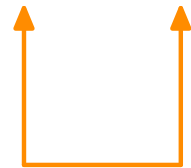
$ind_{\min} = 1$



# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



```
temp = x[i]
```

```
x[i] = x[ind_min]
```

```
x[ind_min] = temp
```

## Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 1`

`x_min = x[1] = 42`

`ind_min = 1`

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 1$   
 $j = 2$

$x_{\min} < x[2] = 55$

$ind_{\min} = 1$

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 1$

$j = 3$

$x_{\min} < x[3] = 94$

$ind_{\min} = 1$

## Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 1$

$j = 4$

$x_{\min} = x[4] = 18$

$\text{ind}_{\min} = 4$

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 1$

$j = 5$

$x_{\min} < x[5] = 44$

$\text{ind\_min} = 4$

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 1$

$j = 6$

$x_{\min} < x[6] = 67$

$ind_{\min} = 4$

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



```
temp = x[i]
```

```
x[i] = x[ind_min]
```

```
x[ind_min] = temp
```



## Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 2`

`x_min = x[2] = 55`

`ind_min = 2`

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 2$   
 $j = 3$

$x_{\min} < x[3] = 94$

$\text{ind}_{\min} = 2$

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 2$

$j = 4$

$x_{\min} = x[4] = 42$

$ind_{\min} = 4$

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 2$

$j = 5$

$x_{\min} < x[5] = 44$

$\text{ind\_min} = 4$

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 2$

$j = 6$

$x_{\min} < x[6] = 67$

$\text{ind}_{\min} = 4$

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----



```
temp = x[i]
```

```
x[i] = x[ind_min]
```

```
x[ind_min] = temp
```

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	94	55	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 3$

$x_{\min} = x[3] = 94$

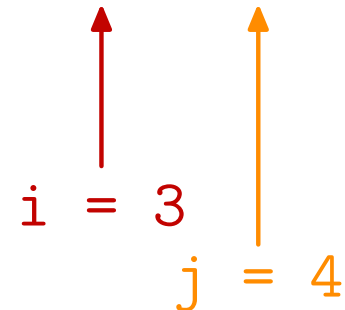
$ind_{\min} = 3$

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	94	55	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 3$   
 $j = 4$



$x_{\min} = x[4] = 55$

$\text{ind}_{\min} = 4$



# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	94	55	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 3$

$j = 5$

$x_{\min} = x[5] = 44$

$\text{ind}_{\min} = 5$

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	94	55	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 3$

$j = 6$

$x_{\min} < x[6] = 67$

$ind_{\min} = 5$

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	94	55	44	67
----	----	----	----	----	----	----



```
temp = x[i]
```

```
x[i] = x[ind_min]
```

```
x[ind_min] = temp
```

## Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 4`

`x_min = x[4] = 55`

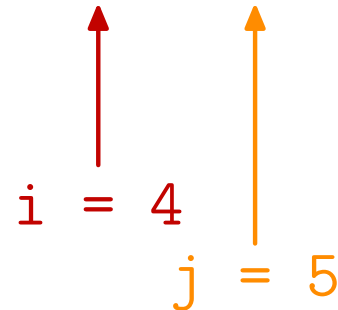
`ind_min = 4`

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 4$   
 $j = 5$



$x_{\min} < x[5] = 94$

$\text{ind\_min} = 4$

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 4$

$j = 6$

$x_{\min} < x[6] = 67$

$ind_{\min} = 4$

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 5`

`x_min = x[5] = 94`

`ind_min = 5`

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 5$   
 $j = 6$

$x_{\min} = x[6] = 67$

$ind_{\min} = 6$



# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----



```
temp = x[i]
```

```
x[i] = x[ind_min]
```


```
x[ind_min] = temp
```

# Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

$i = 6$



## Sortiranje izborom ekstrema — primjer

Primjer. Izborom ekstrema sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

# Sortiranje izborom ekstrema — glavni program

```
int main(void) {
    int i, n;
    int x[] = {42, 12, 55, 94, 18, 44, 67};

    n = 7;
    selection_sort(x, n);

    printf("\n Sortirano polje x:\n");
    for (i = 0; i < n; ++i) {
        printf(" x[%d] = %d\n", i, x[i]);
    }
    return 0;
}
```

# Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Prva varijanta — prošla funkcija:

- kod traženja **ekstrema** pamtimo:
  - vrijednost ekstrema (minimuma) **x\_min**,
  - indeks elementa na kojem se ekstrem **dostiže**, **ind\_min**.

Skraćena varijanta — po **duljini** kôda, ali **ne mora** biti i **brža**:

- očito je **dovoljno** pamtiti samo
  - **indeks** elementa na kojem se ekstrem **dostiže**,  
i to **iskoristiti** kod usporedbi, za **indeksiranje** članova niza.
- Trenutna **vrijednost** ekstrema je uvijek **x[ind\_min]**.

Ovaj algoritam zovem **min\_2**.

## Sortiranje izborom ekstrema — funkcija (min\_2)

```
void selection_sort(int x[], int n) {
    int i, j, ind_min, temp;
    for (i = 0; i < n - 1; ++i) {
        ind_min = i;
        for (j = i + 1; j < n; ++j)
            if (x[j] < x[ind_min])
                ind_min = j;
        if (i != ind_min) {
            temp = x[i];
            x[i] = x[ind_min];
            x[ind_min] = temp; }
    }
    return; }
```

# Složenost sortiranja nizova

Kako ćemo uspoređivati koliko je brzo sortiranje niza raznim algoritmima (u ovisnosti o duljini niza  $n$ )?

- Možemo mjeriti vrijeme — teško i neprecizno, posebno za “kratke” nizove.
- Možemo uspoređivati broj operacija koje algoritam ili program obavlja.

Taj broj operacija je jedna od mjera složenosti algoritma.

Primijetite da, kod sortiranja, imamo dvije bitno različite elementarne operacije (koje ne moraju jednako trajati):

- uspoređivanje elemenata,
- zamjena elemenata — općenitije, dodjeljivanje elemenata (jedna zamjena = 3 dodjeljivanja).

# Složenost sortiranja izborom ekstrema

Kod sortiranja izborom ekstrema vrijedi:

- broj usporedbi, u svakom koraku, jednak je duljini trenutnog niza umanjenoj za 1,
- jer se svaki element (osim prvog) uspoređuje s trenutno najmanjim.

Za sve korake zajedno, broj usporedbi je zbroj

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{(n - 1) \cdot n}{2} \approx \frac{n^2}{2}.$$

Dakle, broj usporedbi (sigurno) kvadratno ovisi o  $n$ .

To je loše — postoje i bolji algoritmi, s manje usporedbi.



## Složenost sortiranja izborom ekstrema (nast.)

Nadalje,

- u svakom koraku, vrši se najviše jedna zamjena nekog para elemenata (može je i ne biti, ako je najmanji na pravom mjestu).

Ukupan broj zamjena je najviše

$$n - 1.$$

Dakle, broj zamjena (najviše) linearno ovisi o  $n$ . To je dobro!

Zaključak: za trajanje algoritma vrijedi

$$T(n) \in O(n^2).$$

# Sortiranje izborom ekstrema — max. na kraj

Dosad smo uvijek **uzlazno** sortirali

- dovođenjem **najmanjeg** elementa na **početak**.

Isti efekt imat će i

- dovođenje **najvećeg** na **kraj** nesređenog dijela niza.

Ideja:

- Dovedi **najveći** element niza  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  na **njegovo** pravo mjesto (to je **zadnje** u cijelom nizu).
- Postupak ponovi na **skraćenom** (nesređenom) nizu  $x_0, \dots, x_{n-2}$  (duljine za jedan manje, tj.  $n - 1$ ).
- Niz se “**skraćuje**” **straga**.

Indeks  $i$  vanjske petlje sad “drži” **zadnji** nesređeni element, a petlja ide **unatrag**, od  $n - 1$ . (Alg.: **max\_1**, **max\_1a**, **max\_2**.)

## Sortiranje izborom ekstrema — funkcija (max\_2)

```
void selection_sort(int x[], int n) {
    int i, j, ind_max, temp;
    for (i = n - 1; i > 0; --i) {
        ind_max = i;
        for (j = 0; j < i; ++j)
            if (x[j] > x[ind_max])
                ind_max = j;
        if (i != ind_max) {
            temp = x[i];
            x[i] = x[ind_max];
            x[ind_max] = temp; }
    }
    return; }
```

# Sortiranje izborom ekstrema — kraj

Složenost — ista kao kod dovođenja najmanjeg na početak.

- Broj usporedbi je jednak

$$\frac{(n-1) \cdot n}{2} \approx \frac{n^2}{2} \in O(n^2).$$

- Broj zamjena je manji ili jednak

$$n - 1 \in O(n).$$

Napomena. Za silazno sortiranje niza treba okrenuti

- uloge ekstrema — najmanji  $\leftrightarrow$  najveći, ili (ne oboje!)
- mjesto dovođenja ekstrema — početak  $\leftrightarrow$  kraj, odnosno, smjer “skraćivanja” — sprijeda  $\leftrightarrow$  straga.

# Sortiranje zamjenama susjeda

## Bubble sort

# Uvod — provjera je li niz sortiran

**Problem.** Kako bismo **provjerili** je li zadani niz

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$$

već **sortiran** — recimo, **uzlazno**?

**Matematički** rečeno, niz mora biti **monotono rastući**, gledano po indeksima, tj. za **svaki par** indeksa  $j, k \in \{0, \dots, n-1\}$  mora vrijediti

$$j < k \implies x_j \leq x_k.$$

Međutim, algoritamski gledano, **ne treba** provjeriti **sve** parove indeksa — tih usporedbi bi bilo  $n(n-1)/2$ , što je **previše**.

- **Dovoljno** je provjeriti samo **sve susjedne** parove indeksa, tj. možemo uzeti  $k = j + 1$ . Onda mora vrijediti

$$x_j \leq x_{j+1}, \quad \text{za sve } j = 0, \dots, n-2.$$

## Provjera je li niz sortiran (nastavak)

Dakle, provjera “je li niz **sortiran**” odgovara ranijem predlošku za provjeru “**svi** članovi niza imaju neko svojstvo” — mora biti

$$(x_0 \leq x_1) \wedge (x_1 \leq x_2) \wedge \cdots \wedge (x_{n-2} \leq x_{n-1}).$$

Funkcija koja vraća **odgovor**, s **najviše**  $n - 1$  usporedbi:

```
int sortiran(int x[], int n)
{
    int j;
    for (j = 0; j < n - 1; ++j)
        if (x[j] > x[j + 1])
            return 0;
    return 1;
}
```

# Što učiniti ako niz *nije* sortiran?

Ako niz *nije* sortiran, onda postoji indeks  $j \in \{0, \dots, n - 2\}$  takav da je

$$x_j > x_{j+1},$$

tj. *susjedni* elementi su u *pogrešnom* poretku. Funkcija za provjeru *prekida* rad, čim naiđe na *prvo* takvo mjesto.

Ako želimo *sortirati* niz, onda je *prirodna* ideja:

- *zamijeniti* poredak takvih *susjeda* koji su u *pogrešnom* poretku, tj. “*ispraviti*” njihov poredak,
- i, zatim, *nastaviti* provjeru kroz *cijeli* niz, uz *ispravak* poretka svih “*krivo* poredanih” *susjeda*.

*Napomena*. Odmah, da svima bude jasno,

- opći niz *nije moguće* sortirati u *jednom* prolazu kroz niz!



# Sortiranje zamjenama susjeda

Sortiranje **zamjenama susjeda** (engl. **Bubble sort**, bubble = mjehurić) bazira se na **zamjenama susjednih** elemenata u nizu.

Ideja:

- 🕒 Idemo kroz niz od **početka** do **kraja** (tj. unaprijed  $\longrightarrow$ ).
- 🕒 Ako **dva susjedna** člana niza  $x_j$  i  $x_{j+1}$  **nisu** u dobrom poretku, **zamijenimo** im mjesto (vrijednost):  $x_j \leftrightarrow x_{j+1}$ .
- 🕒 Kad stignemo do **kraja** niza (u prvom prolazu), **ponovimo** postupak.
- 🕒 **Nije** jasno kada ćemo **stati** (jer se stalno vraćamo na početak!) — to ćemo analizirati nakon primjera.

Pratite **najveći** element i **zamjene** u svakom prolazu — ako ih **nema**, taj dio niza je **sortiran**!

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

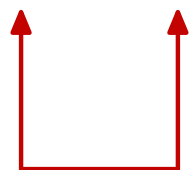
42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



zamjena = 1

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 1

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

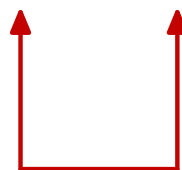
12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 1

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

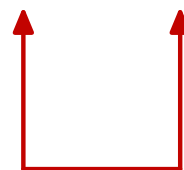


zamjena = 1

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	55	18	94	44	67
----	----	----	----	----	----	----

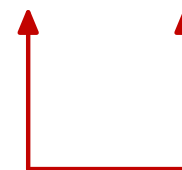


zamjena = 1

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	55	18	44	94	67
----	----	----	----	----	----	----



zamjena = 1



## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	55	18	44	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	55	18	44	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

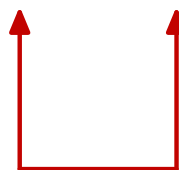
12	42	55	18	44	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	55	18	44	67	94
----	----	----	----	----	----	----

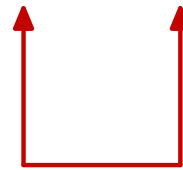


zamjena = 1

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	18	55	44	67	94
----	----	----	----	----	----	----



zamjena = 1

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	18	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 1

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	18	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	18	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

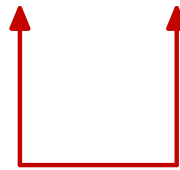
zamjena = 0



## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

Primjer. Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	42	18	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----



zamjena = 1

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 1

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 1

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

zamjena = 0

## Sortiranje zamjenama susjeda — primjer

**Primjer.** Zamjenama susjednih elemenata sortirajte zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----



# Sortiranje zamjenama susjeda (nastavak)

Kada **stajemo**?

- Primijetimo da smo, u **prvom** prolazu, **najveći** element “odgurali” na **kraj** niza — na njegovo **pravo** mjesto.
- I **drugi**, veći elementi počeli su “**putovati**” prema **kraju** niza, međutim, **ne moraju** stići na svoje **pravo** mjesto.

**Zaključak**: nakon **prvog** koraka

- niz sigurno možemo **skratiti** za **posljednji** element  $x_{n-1}$
- i **nastaviti** postupak sa **skraćanim** nizom  $x_0, \dots, x_{n-2}$ .

Dakle, niz se **skraćuje** **straga**, isto kao kod “**najveći** na **kraj**”.

- **Stajemo** nakon  $n - 1$  prolaza, na jednočlanom nizu  $x_0$ .

Ovaj algoritam zovem **bubble\_1**.

## Sortiranje zamjenama susjeda — funkcija

```
void bubble_sort(int x[], int n)
{
    int i, j, temp;

    for (i = 1; i < n; ++i)
        for (j = 0; j < n - i; ++j)
            if (x[j] > x[j + 1]) {
                temp = x[j];
                x[j] = x[j + 1];
                x[j + 1] = temp;
            }

    return;
}
```

# Složenost sortiranja zamjenama susjeda

Analiza složenosti algoritma:

- U prvom prolazu uspoređujemo  $n - 1$  parova susjeda, u drugom  $n - 2$ , i tako redom ..., do 1 u zadnjem koraku.

Dakle, ukupan broj usporedbi je, kao i kod izbora ekstrema,

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{(n - 1) \cdot n}{2} \approx \frac{n^2}{2}.$$

S druge strane, broj zamjena može drastično varirati:

- od 0 — ako je niz već sortiran,
- do najviše “svaka usporedba daje zamjenu” — ako je niz naopako sortiran.

Dakle, ukupan broj zamjena može biti jednak broju usporedbi.

# Složenost sortiranja zamjenama susjeda (nast.)

Složenost — sažetak:

- Broj usporedbi je jednak

$$\frac{(n-1) \cdot n}{2} \approx \frac{n^2}{2} \in O(n^2).$$

- Broj zamjena je manji ili jednak (i to je loše, jako loše!)

$$\frac{(n-1) \cdot n}{2} \approx \frac{n^2}{2} \in O(n^2).$$

Napomena. Promjena smjera prolaza u unatrag ( $\leftarrow$ ) dovodi najmanji na početak. Za silazno sortiranje niza treba samo

- okrenuti znak usporedbe — veći ( $>$ )  $\leftrightarrow$  manji ( $<$ ).

# Sortiranje zamjenama susjeda — poboljšanja

Može li se algoritam poboljšati?

- Pamtimo logičku vrijednost = **ima li** bar jedna **zamjena** u **trenutnom** prolazu kroz niz, kao u primjeru.
  - Ako ih **nema** — **stajemo**, niz je **sortiran** (**bubble\_2**).
- Još bolje — pamtimo **indeks zadnje zamjene** u **trenutnom** prolazu. Na kraju prolaza, sve **iza** tog mjesta je **sortirano** (probajte na primjeru).
  - Sljedeći prolaz ide **samo** do **tog mjesta** (**bubble\_3**).

U obje varijante, za **ispravno** sortirani niz, treba **samo jedan** prolaz da se ustanovi da je niz **sortiran**.

Nažalost, u slučaju **naopako** (obratno) sortiranog niza, **nema** nikakve **uštete** — treba **svih  $n - 1$**  prolaza, kao i prije.

## Sortiranje zamjenama susjeda — f-a (bubble\_2)

```
void bubble_sort(int x[], int n) {
    int i = n - 1, j, temp, zamjena;
    do {
        zamjena = 0;
        for (j = 0; j < i; ++j)
            if (x[j] > x[j + 1]) {
                temp = x[j];
                x[j] = x[j + 1];
                x[j + 1] = temp;
                zamjena = 1; }
        --i;    /* Smanji i za sljedeci prolaz. */
    } while (zamjena);
    return; }
```

## Sortiranje zamjenama susjeda — f-a (bubble\_3)

```
void bubble_sort(int x[], int n) {
    int i = n - 1, j, ind_zamj, temp;
    do {
        ind_zamj = -1;
        for (j = 0; j < i; ++j)
            if (x[j] > x[j + 1]) {
                temp = x[j];
                x[j] = x[j + 1];
                x[j + 1] = temp;
                ind_zamj = j; }
        i = ind_zamj;    /* i za sljedeci prolaz. */
    } while (i > 0);
    return; }

```

## Sortiranje zamjenama susjeda — još malo

U **Bubble sortu** uvijek krećemo od **početka** niza (s **iste** strane).

Ako **jednom** krenemo od **početka**, pa **zatim unatrag**, pa opet **unaprijed**, pa **unatrag**, ..., dobit ćemo tzv.

- **Shaker sort** (engl.) — doslovni prijevod je “streseni sort”. (“Vodka martini, shaken, not stirred.”)

I ovdje postoje slična **poboljšanja**, kao u **Bubble sortu**.

Međutim, sve te varijante sortiranja **zamjenama susjeda** pate od iste “**teške bolesti**”:

- imaju puno **previše** zamjena i **ne isplate** se za **opće** nizove.

Sjetite se da **izbor ekstrema** ima vrlo **malo** zamjena!



# Sortiranje zamjenama susjeda — zaključak

Možda bi se Bubble sort (Shaker sort) i mogao isplatiti za

- “skoro sortirane” nizove, ali nije lako definirati što to je, osim baš kao “mali broj prolaza” u Bubble/Shaker sortu.

- Gruba ideja: to je sortirani niz, u kojeg je “slučajno” ubačen (na razna mjesta) neki mali broj novih članova.

No, za to postoji puno bolji algoritam: posebno sortirati nove članove, a onda sortirano spojiti dva sortirana niza — ova operacija se zove Merge (v. drugi semestar).

**Zaključak:** sortiranje zamjenama susjeda ne treba koristiti!

Nažalost, iako najdulje traje (v. usporedbu malo kasnije),

- studenti posebno vole bubble\_1, jer ima najkraći kôd.

# Sortiranje umetanjem

## Insertion sort

# Uvod — sortirano ubacivanje elementa u niz

**Problem.** Zadan je **uzlazno** sortirani niz  $x$ , s  $n$  elemenata,

$$x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1}.$$

U taj niz treba

- **ubaciti** (**dodati**, **umetnuti**) zadani element **elt**, ali tako da **novi** niz  $x$ , s  $n + 1$  elemenata, i dalje bude **uzlazno** sortiran.

Ovaj problem se skraćeno zove

- **sortirano ubacivanje** elementa u (već **sortirani**) niz.

Kad je **niz** spremljen u **polju**, onda imamo **bitno** ograničenje:

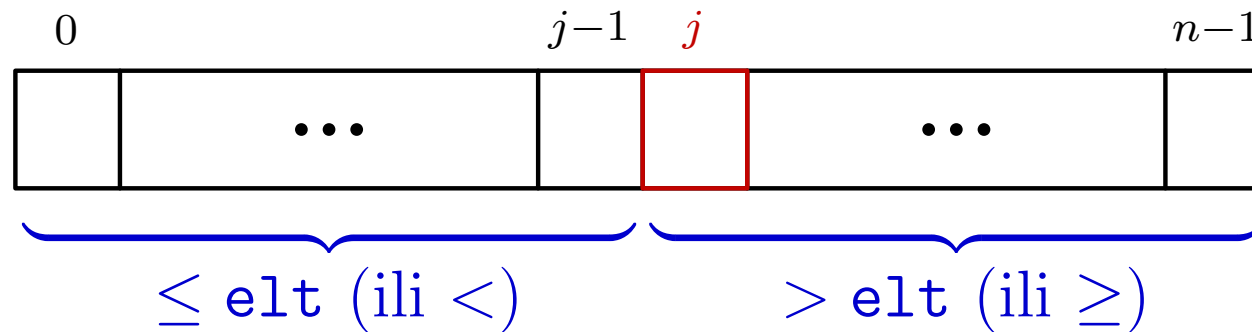
- sve operacije treba obaviti u **istom** polju  $x$ .

Isti problem za **vezanu listu** radimo na **Prog2** (to je **lakše**).

# Sortirano ubacivanje elementa — koraci

Sortirano ubacivanje elementa  $\text{elt}$  u niz  $x$  ima 2 bitna koraka.

Prvo treba naći “pravo” mjesto = budući indeks  $j$  za  $\text{elt}$  u  $x$ .



Traženje indeksa  $j$  možemo napraviti na više načina:

- **sekvencijalno** — od početka **uzlazno**, ili od kraja **silazno**,
- **binarnim** traženjem u cijelom polju.

Zatim treba **pomaknuti** “stražnji” blok  $x[j], \dots, x[n-1]$  za jedno mjesto **udesno**, tako da “oslobodimo”  $x[j]$  za novi  $\text{elt}$ .

# Sortirano ubacivanje elementa — algoritam

Uočiti da pomaci (kopiranja) udesno moraju ići silazno ( $\leftarrow$ ):

● počev od  $x[n] = x[n-1]$ , pa do  $x[j+1] = x[j]$ .

Zato se u “standardnoj” varijanti algoritma koristi

● sekvencijalno traženje od kraja silazno,

● tako da se pomaci rade u istoj petlji za traženje  $j$ .

Algoritam za sortirano ubacivanje — početak:

● Ako je  $elt \geq x_{n-1}$ , onda je  $j = n$ , i odmah stavimo  $x_n = elt$ .

● U protivnom, kad je  $elt < x_{n-1}$ , mora biti  $j < n$ .  
Onda treba naći  $j$  i sigurno imamo pomake udesno.

# Sortirano ubacivanje elementa — algoritam

Kako tražimo  $j$  u silaznoj petlji (✓)?

- Treba nam najmanji indeks  $j$  za koji je  $x_j > \text{elt}$ .
- Zato stajemo kad se prvi puta dogodi da je  $x_{j-1} \leq \text{elt}$ .
- Ako se to ne dogodi, onda je sigurno  $j = 0$ .

Krećemo od  $j = n$ . U petlji ponavljamo sljedeće korake:

- Odmah pomaknemo  $x_{j-1}$  u  $x_j$  i zatim smanjimo  $j$  za 1.
- Ovo ponavljamo sve dok je  $j \geq 1$  i  $x_{j-1} > \text{elt}$ .  
Tu koristimo skraćeno računanje logičkih izraza.

Po završetku petlje je ili  $j = 0$ , ili je  $j$  prvi (najveći) indeks za koji je  $x_{j-1} \leq \text{elt}$ . Dakle, kako treba i svi pomaci su gotovi!

Na kraju, “umetnemo”  $\text{elt}$  na pravo mjesto,  $x_j = \text{elt}$ .

## Sortirano ubacivanje elementa — funkcija

```
void ubaci_sort(int x[], int n, int elt) {
    int j;

    if (elt >= x[n - 1])
        x[n] = elt;
    else { /* elt < x[n - 1] */
        j = n;
        do {
            x[j] = x[j - 1]; --j;
        } while (j >= 1 && x[j - 1] > elt);
        x[j] = elt;
    }
    return;
}
```

# Sortiranje sortiranim umetanjem (ubacivanjem)

Sortiranje **umetanjem** (engl. **Insertion sort**) bazira se na

- **sortiranom ubacivanju** sljedećeg elementa  $x_i$ , u već **sortirani** početak niza  $x_0, \dots, x_{i-1}$ .

Početni niz od **jednog** elementa  $x_0$  je već **sortiran**, pa postupak ubacivanja (umetanja) ponavljamo za  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Za indeks  $i$ , koraci u **jednom** prolazu kroz petlju su:

- Ako je  $x_i \geq x_{i-1}$ , onda je  $x_i$  već na **pravom** mjestu i ne treba raditi ništa.
- U protivnom, za  $x_i < x_{i-1}$ , prvo **kopiramo**  $x_i$  u **pomoćni** element **temp**. To “oslobađa” mjesto  $x_i$  za **pomake**.
- **Sortirano ubacimo temp** na njegovo **pravo** mjesto  $j_i$ , u početni, već **sortirani** dio niza  $x_0, \dots, x_{i-1}$ .



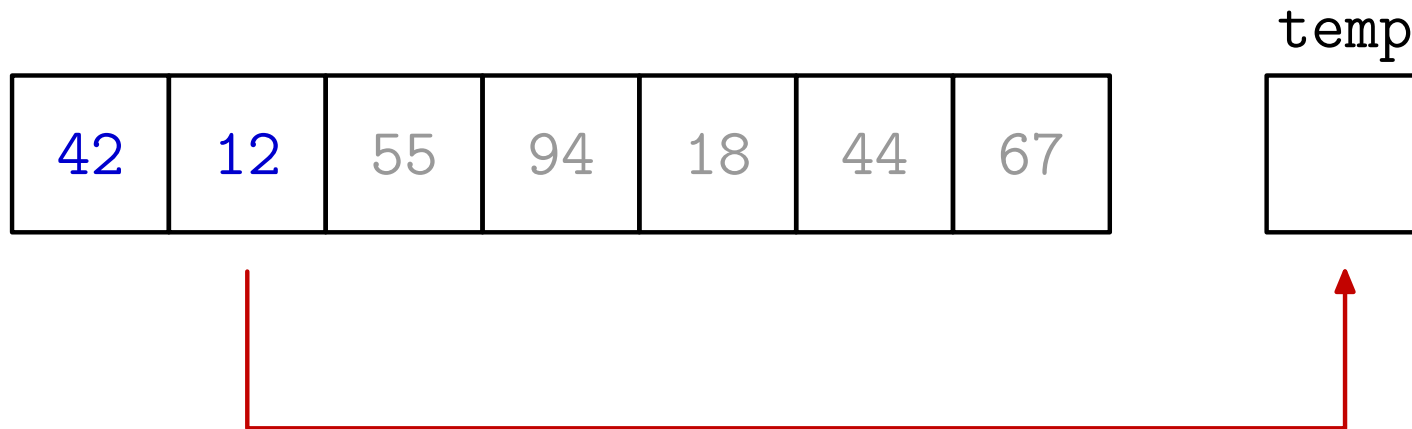
# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67	temp

# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



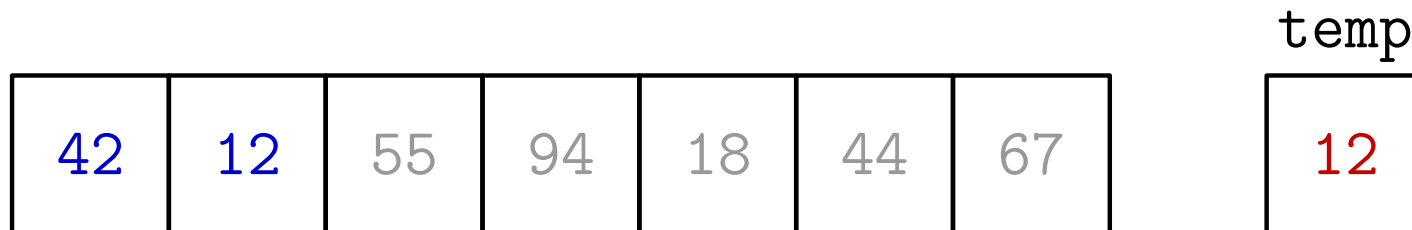
`i = 1`

`x[1] < x[0]`

`temp = x[1]`

# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



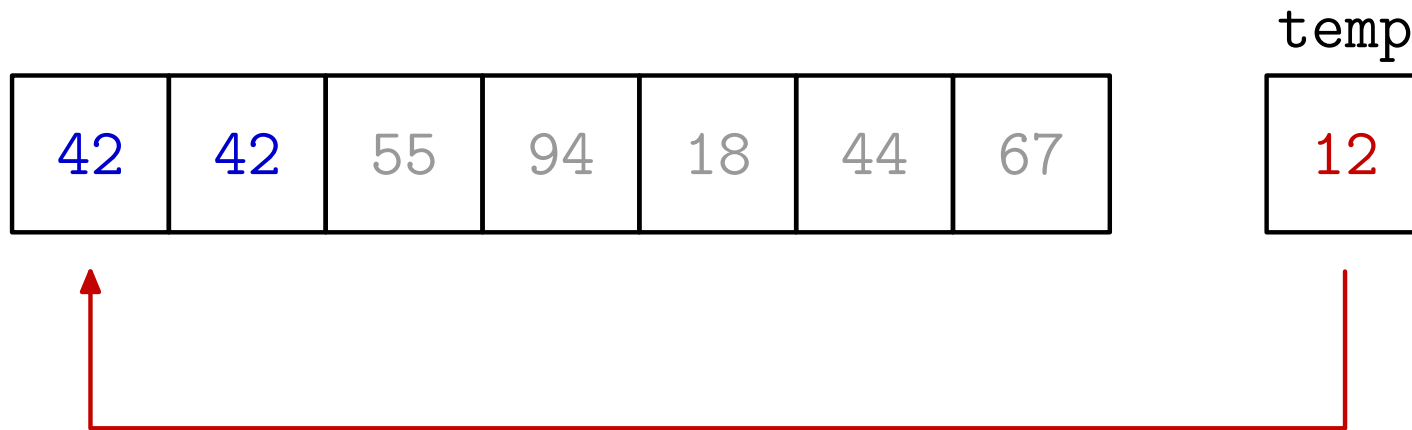
$$j = 1$$

$$x[0] > \text{temp}$$

$$x[1] = x[0]$$

# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.

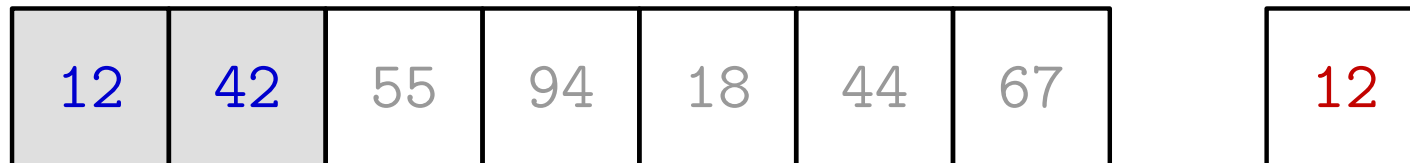


$j = 0$

$x[0] = \text{temp}$

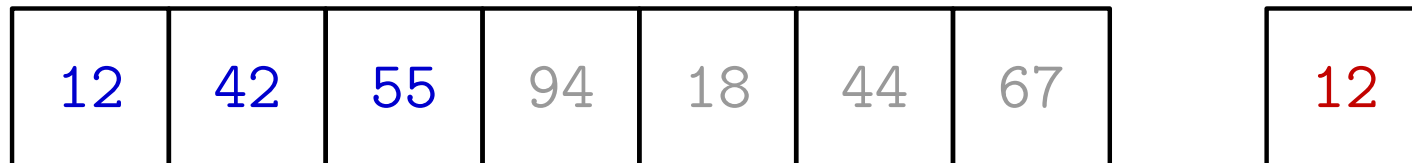
# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



$i = 2$

$x[2] \geq x[1]$

# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67	temp
							12

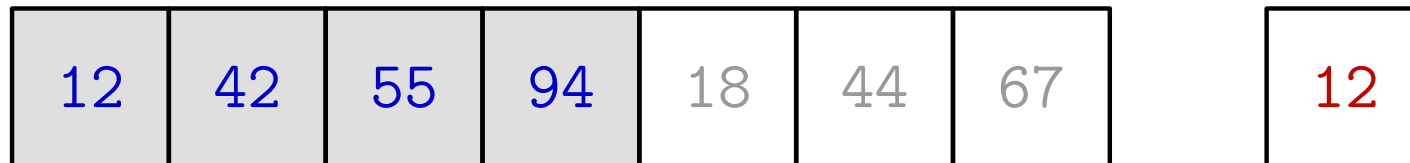
$$i = 3$$

$$x[3] \geq x[2]$$



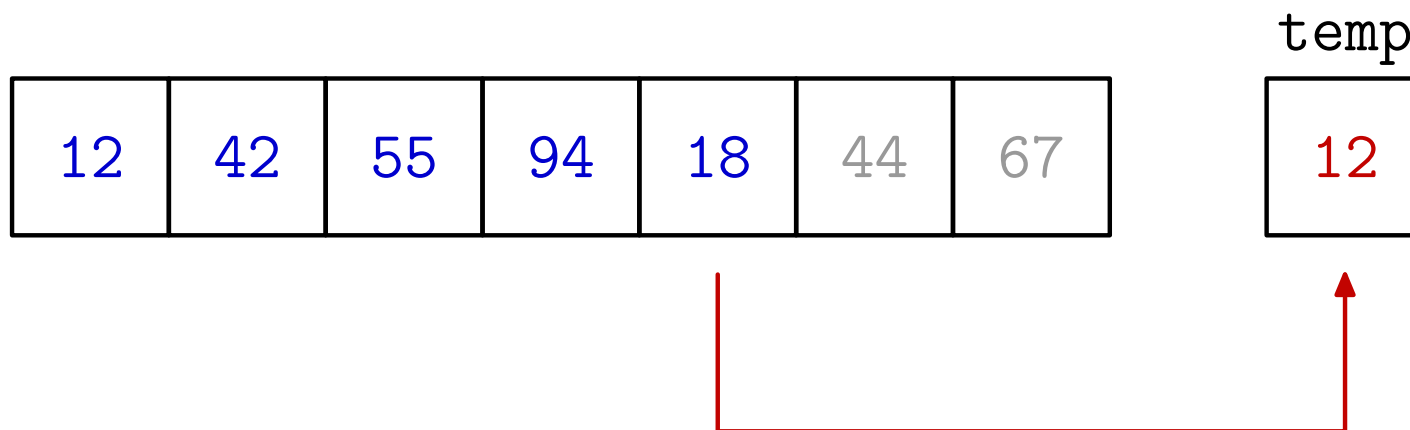
# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



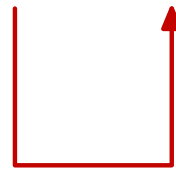
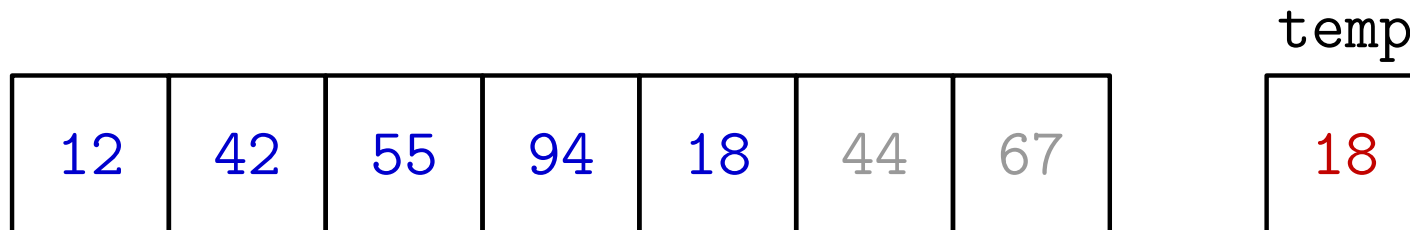
$i = 4$

$x[4] < x[3]$

$temp = x[4]$

# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



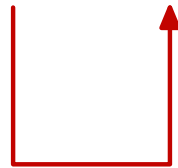
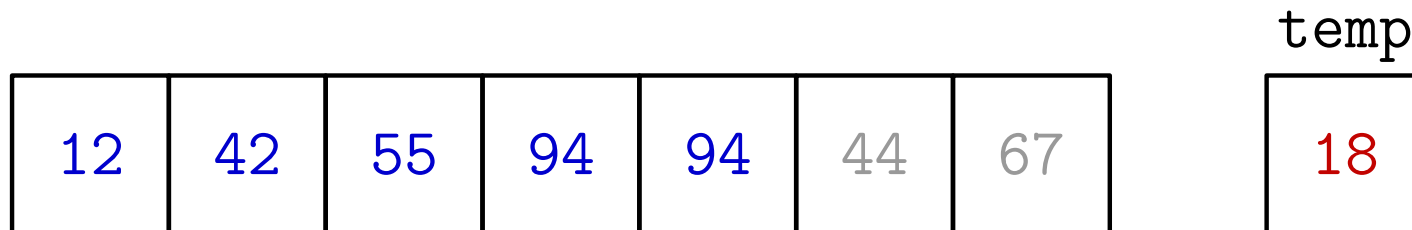
$$j = 4$$

$$x[3] > \text{temp}$$

$$x[4] = x[3]$$

# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



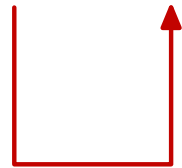
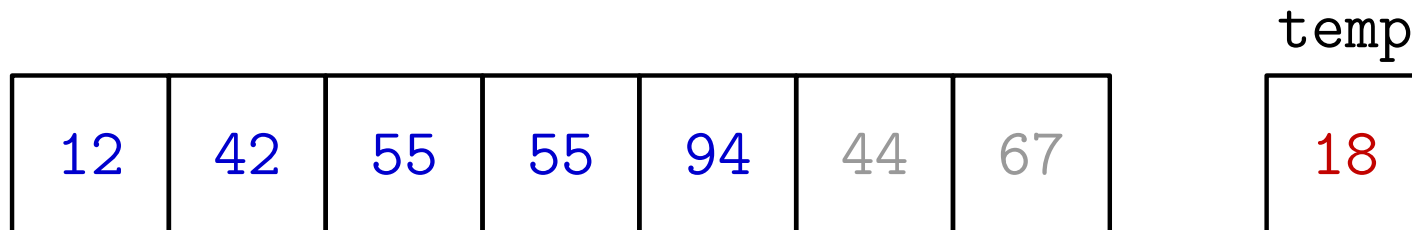
$$j = 3$$

$$x[2] > \text{temp}$$

$$x[3] = x[2]$$

# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



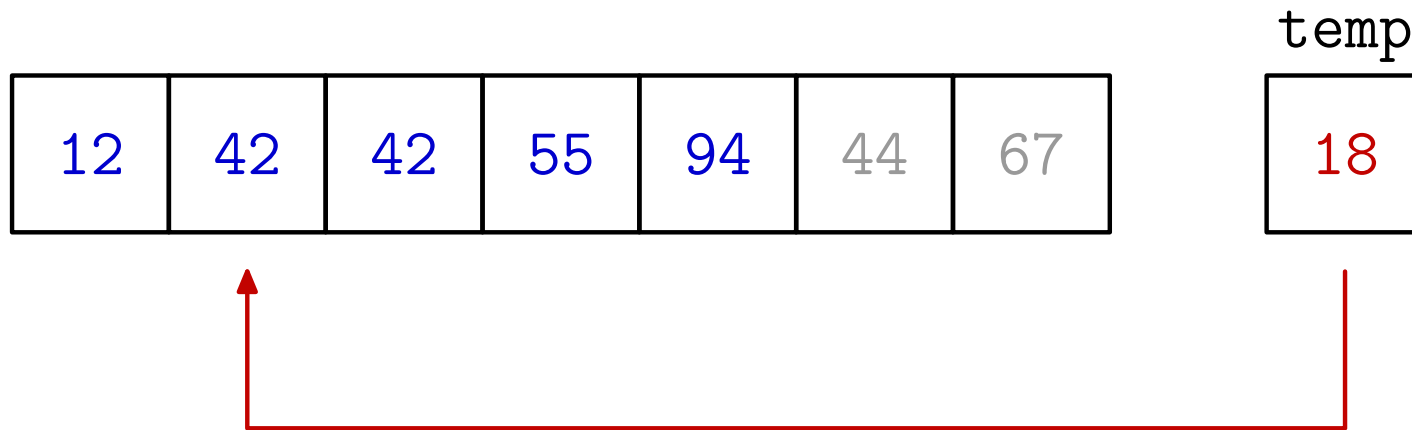
$$j = 2$$

$$x[1] > \text{temp}$$

$$x[2] = x[1]$$

# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



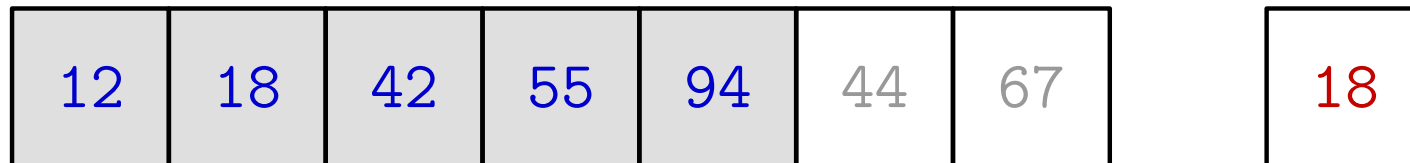
$j = 1$

$x[0] \leq temp$

$x[1] = temp$

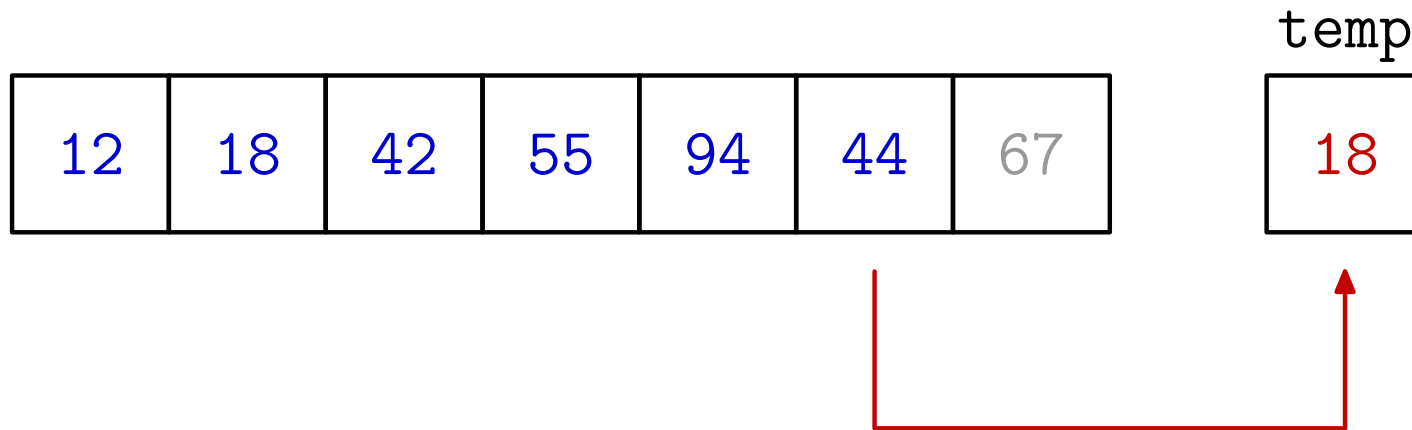
# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



$i = 5$

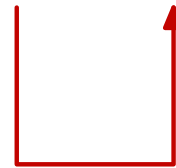
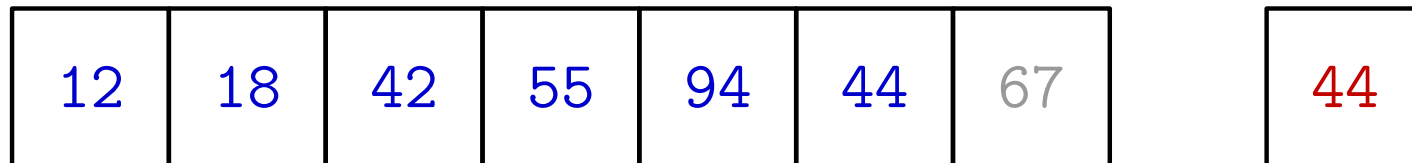
$x[5] < x[4]$

$temp = x[5]$



# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



$$j = 5$$

$$x[4] > \text{temp}$$

$$x[5] = x[4]$$

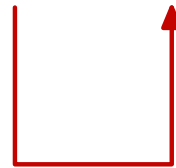
# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.

12	18	42	55	94	94	67
----	----	----	----	----	----	----

temp

44
----



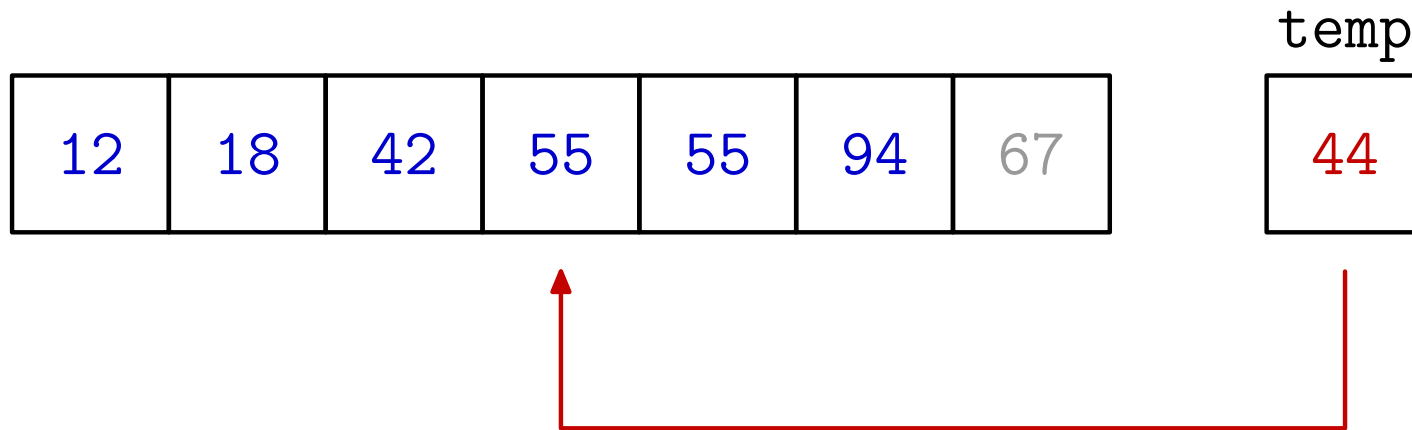
$$j = 4$$

$$x[3] > \text{temp}$$

$$x[4] = x[3]$$

# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



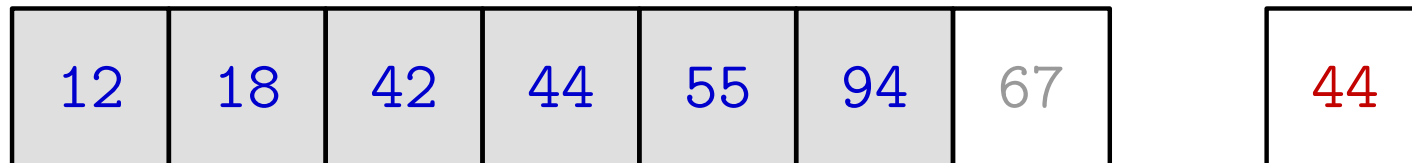
$j = 3$

$x[2] \leq temp$

$x[3] = temp$

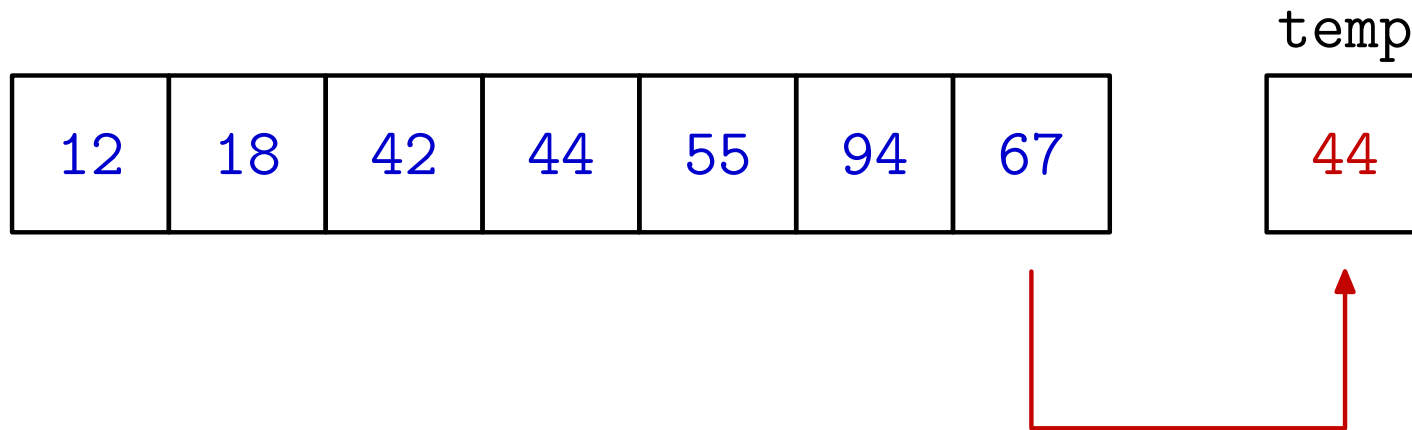
# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



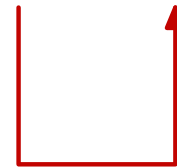
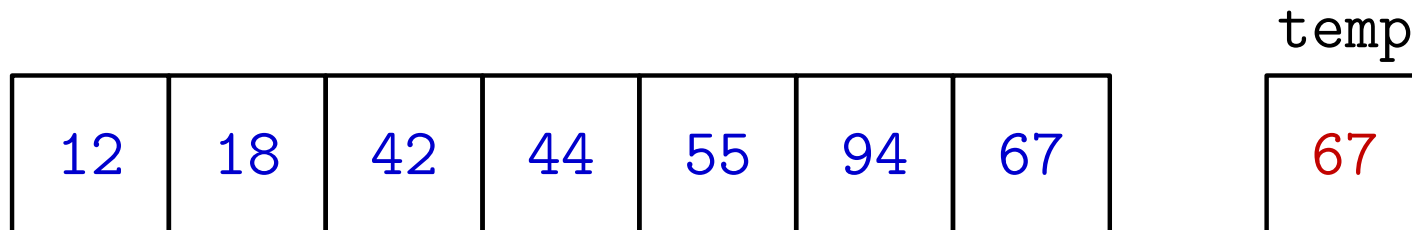
$i = 6$

$x[6] < x[5]$

$temp = x[6]$

# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



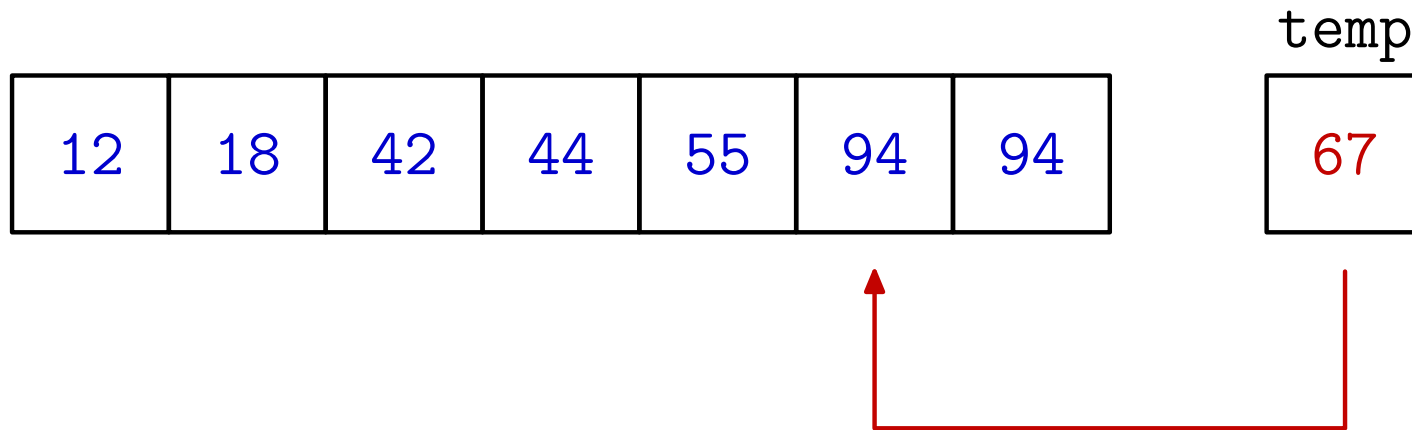
$$j = 6$$

$$x[5] > \text{temp}$$

$$x[6] = x[5]$$

# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.



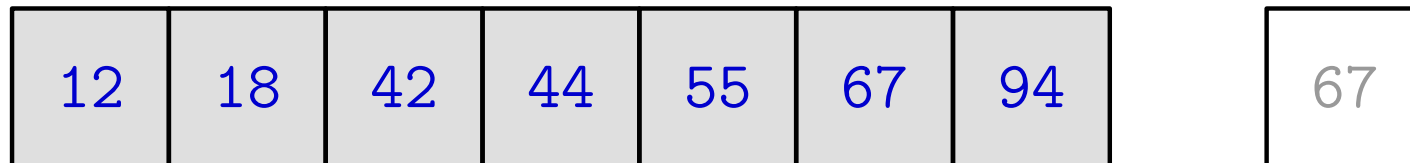
$j = 5$

$x[4] \leq \text{temp}$

$x[5] = \text{temp}$

# Sortiranje sortiranim umetanjem — primjer

Primjer. Sortiranim umetanjem sortirajte zadano polje.





## Sortiranje umetanjem — funkcija

```
void insertion_sort(int x[], int n) {
    int i, j, temp;

    for (i = 1; i < n; ++i)
        if (x[i] < x[i - 1]) {
            temp = x[i];
            j = i;
            do {
                x[j] = x[j - 1]; --j;
            } while (j >= 1 && x[j - 1] > temp);
            x[j] = temp;
        }
    return;
}
```

# Složenost sortiranja umetanjem

U  $i$ -tom koraku algoritma, broj **usporedbi** može **varirati**

- od samo **jedne**, ako je  $x_i$  već na **pravom** mjestu ( $j_i = i$ ),
- do **najviše**  $i - 1$  (sa svim elementima s početka niza), ako je to novi **najmanji** element u sređenom dijelu ( $j_i = 0$ ).

Dakle, u **najgorem** slučaju (obratno sortirani niz), ukupan **broj usporedbi** je, kao i kod ranijih algoritama,

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{(n - 1) \cdot n}{2} \approx \frac{n^2}{2}.$$

Može biti i **bitno manji** — samo  $n - 1$ , za već **sortirani** niz.

Broj **pomaka** (dodjeljivanja) je skoro **jednak** broju **usporedbi**.  
No, pomaci su **brži** od zamjena (svaka ima **3** dodjeljivanja).

Zato je **Insertion sort najbrži** od klasičnih “sporih” algoritama.

# Sortiranje umetanjem — varijante, poboljšanja

U standardnoj “skraćenoj” varijanti algoritma ([ins\\_1a](#))

- nema provjere `if (x[i] < x[i - 1])`, već se uvijek kopira u `temp` i natrag, čak i kad to ne treba.

Poboljšanja:

- Prvo nađi najmanji element i dovedi ga na početak `x[0]`. Onda ne treba provjeravati `j >= 1` u petlji, jer najmanji u `x[0]` služi kao graničnik ([ins\\_2](#), [ins\\_2a](#)).
- Za nalaženje “pravog” mjesta koristi se binarno traženje (umjesto sekvencijalnog), a pomaci se rade nakon toga. Ovo je bitno ubrzanje prvog dijela algoritma ([ins\\_3](#)).
- Kombinacija “najmanji na početak” i binarnog traženja ([ins\\_4](#)).

## Sortiranje umetanjem — funkcija (ins\_1a)

Standardna “skraćena” varijanta Insertion sorta:

---

```
void insertion_sort(int x[], int n) {
    int i, j, temp;

    for (i = 1; i < n; ++i) {
        temp = x[i];
        for (j = i; j >= 1 && x[j - 1] > temp; --j)
            x[j] = x[j - 1];
        x[j] = temp;
    }
    return;
}
```

---

Ovo ima samo 5 linija aktivnog kôda, tj. kraće je od bubble\_1.

# Još o sortiranju i usporedba algoritama

## Još o sortiranju — poboljšanje Insertion sorta

**Problem** kod običnog Insertion sorta:

- pomaci elementa idu za po jedno mjesto (kod nas  $\rightarrow$ ).

**Poboljšanje:** povećati udaljenost = razmak za pomake, tako da sortiramo više potpolja, s većom udaljenošću elementa.

Realizacija = sortiramo, koristeći niz padajućih razmaka: prvo daleke elemente, pa nešto bliže, ..., i, na kraju, susjede.

- Takav sort zove se Shell sort — nije “školkasti sort”, već je ime dobio po autoru: Donald L. Shell, 1959. g.

Originalni niz razmaka (Shell) = broj “manjih” polja za sort:

- $n/2$  (polja s  $\approx 2$  elementa),  $n/4$ , ..., 2, 1 (cijelo polje).

Analiza složenosti je vrlo komplicirana. Ovisno o izboru niza razmaka, algoritam može biti bitno brži od kvadratnog.

# Još o sortiranju — donja ograda, za usporedbe

Donja ograda za složenost sortiranja uspoređivanjem:

- Može se pokazati da za bilo koji algoritam sortiranja, koji koristi usporedbe parova članova (binarne relacije  $<$ ,  $>$ ), mora biti

$$\text{broj usporedbi} \geq c \cdot n \log n,$$

gdje je  $c$  neka pozitivna konstanta,

- tj. broj usporedbi je reda veličine barem  $n \log n$ .

Dobra stvar: to je bitno brže nego  $n^2$  usporedbi (za velike  $n$ ).  
Interesantno pitanje — koji algoritmi rade tako “brzo”?

Postoje i brži algoritmi sortiranja (ne koriste usporedbe), ali rade samo za specijalne vrste podataka! Recimo,

- Radix sort za nenegativne brojeve ima linearnu složenost.

# Još o sortiranju — algoritmi u praksi

Algoritmi za sortiranje koji se **koriste** u praksi:

- **QuickSort** — autor C. A. R. (Tony) Hoare, 1962. godine.
  - **Prosječna** složenost mu je reda veličine  $n \log n$  — za slučajne, dobro “razbacane” nizove.
  - U **najgorem** slučaju, složenost je reda veličine  $n^2$ .

Koristi se zbog dobre **prosječne** brzine i dio je **standardne C** biblioteke. Radimo ga na početku **Prog2**.

- **Heapsort** — autor John W. J. Williams, 1964. godine.
  - **Prosječna** i **najgora** složenost su reda veličine  $n \log n$ ,
  - ali je, u **prosjeku**, nešto **sporiji** od **Quicksorta**.

Detaljniji opis na **SPA**, jer koristi strukturu **hrpe** (heap).



# Još o sortiranju — algoritmi u praksi (nastavak)

U praksi se još **koristi** i

- **MergeSort** algoritam — sortiranje **sortiranim spajanjem**.
  - **Najgora** složenost je, također, reda veličine  $n \log n$ , tj. dostiže **donju** ogradu.
  - Lakše ga je napraviti na **vezanoj listi**, nego na **polju**.
  - Na **polju**, treba **pomoćno** polje, i zato ima **dodatna** kopiranja između ta **dva** polja.

Radimo ga na **Prog2**, kad dođemo na **vezane liste**.

- Autor je **John von Neumann**, 1945. godine.
- To je **prvi** program napisan za računalo koje **sprema** i **programe** (von Neumannov model). Računalo se zvalo **EDVAC**.

# Usporedba *sporih* algoritama sortiranja (Intel C)

Vrijeme (u s) za sortiranje polja s  $n = 10^5$  elemenata:

Algoritam	Slučajno	Uzlazno	Silazno
min_1	1.763	1.766	1.765
min_2	1.758	1.755	1.861
max_1	1.422	1.425	1.423
max_2	1.424	1.425	1.428
bubble_1	12.064	2.154	5.367
bubble_2	11.952	0.000	5.361
bubble_3	12.427	0.000	5.320
ins_1	1.212	0.000	2.431
ins_1a	1.191	0.000	2.383
ins_3	0.822	0.000	1.627

## Bubble sort = najgori, komentar rezultata

Ako vas dosad nisam uvjerio da je

- sortiranje zamjenama susjeda loše, sporo, ...

valjda(?) će to učiniti navedeni rezultati!

Bubble sort je daleko najgori algoritam za sortiranje nizova. Za praktične potrebe — zaboravite na “kratki” kôd,

- bilo što drugo je bitno brže, već za kratke nizove!

Dodatno, u eksperimentu za Bubble sort, dobivamo rezultate koji su, “zdravo logički” ili “matematički”, nemogući:

- Prosječno vrijeme, za slučajne nizove, je bitno veće od onog za najgori slučaj (obratno sortirani niz).

Kako je to moguće?

## Bubble sort — prosjek je *gori* od najgoreg!?

Moderni procesori imaju tzv. “predviđanje grananja” (engl. “branch prediction”). Da bi se ubrzalo izvršavanje instrukcija,

- procesor skuplja statistiku za rezultate usporedbi u `if` naredbi — izvršava li se zamjena, ili se preskače.

Na temelju tih rezultata, procesor “naslućuje” (predviđa) buduće grananje i priprema instrukcije koje tek treba izvršiti.

- Ako korektno predvidi grananje, instrukcije su već spremne kad dođu na red za izvršavanje.
- U protivnom, od pripreme nema koristi. Tog trena, prvo treba dohvatiti one “prave” instrukcije koje treba izvršiti, a to dodatno traje.

Bubble sort: U najgorem slučaju, uvijek se radi zamjena i predviđanje je korektno. U općem slučaju, često je pogrešno!

# Usporedba brzih algoritama sortiranja (Intel C)

Vrijeme (u s) za sortiranje polja s  $n = 10^6$  ( $10^5$ ) elemenata:

Algoritam	Slučajno	Uzlazno	Silazno
qs_p2_1	0.101	2.528	2.295
qs_spamod	0.076	1.442	1.441
qs_std	0.174	0.005	0.005
heap_spaa	0.111	0.061	0.060
heap_b_4a	0.102	0.042	0.048
merge_spa	0.099	0.024	0.024
merge_2	0.098	0.021	0.022
shell_spa	0.130	0.014	0.021
shell_3	0.116	0.009	0.016
radix_256b	0.015	0.026	0.025

# Ponavljjanje za kolokvij (primjeri i zadaci)

# Sadržaj

- Završni primjeri (ponavljanje za kolokvij):
  - Zadatak 1.
  - Zadatak 2.

# Zadatak 1

Zadatak 1. Napisati funkciju kojoj su argumenti

- polje (niz)  $a$  prirodnih brojeva (nenegativnih) i
- cijeli broj  $n$ , koji zadaje broj elemenata u polju  $a$ .

Funkcija mora sortirati polje  $a$  — silazno po

- broju različitih neparnih djelitelja elemenata u polju.

U ovom primjeru, uređaj na polju  $a$  nije određen elementima samog polja, već je

- zadan vrijednostima funkcije  $f$  na elementima polja,
- gdje je  $f(x) =$  broj različitih neparnih djelitelja od  $x$ .

Dakle, po definiciji, smatramo da je  $x$  veći ili jednak  $y$ , ako i samo ako je  $f(x) \geq f(y)$ .



# Zadatak 1 (nastavak)

To znači da polje **a** treba **sortirati** (poredati) tako da vrijedi

$$f(a[0]) \geq f(a[1]) \geq \dots \geq f(a[n-1]).$$

Bitni dio rješenja: kod sortiranja **uspoređujemo**

- vrijednosti **funkcije** od elemenata, tj.  $f(x)$ -ove,
- a **ne same** vrijednosti elemenata ( $x$ -ove).

Na primjer,  $x > y$  **prelazi** u  $f(x) > f(y)$ .

Ako želimo **brzo pronaći** neki element u **tako sortiranom** polju,

- analogno treba postupiti i u **binarnom pretraživanju**, tj.
- svagdje **uspoređujemo** vrijednosti **funkcije** elemenata, a **ne same** elemente!

# Zadatak 1 (nastavak)

**Prvi korak:** treba napisati funkciju **f** koja **računa** vrijednost  $f(x)$ , za zadani  $x$  (uzimamo da su  $x$  i  $f(x)$  tipa **unsigned**).

**Lakše** i **sporo** rješenje (pogledati **zad\_1.c**):

- **modificiramo** algoritam za sortiranje (**ekstrem**) tako da **uspoređuje** vrijednosti funkcije **f** na elementima polja.

**Mana:** **puno** puta računa funkciju **f** za **isti** element polja.

**Teže** i **brže** rješenje (pogledati **zad\_1a.c**):

- **prvo** izračunamo sve vrijednosti funkcije i **spremimo** ih u novo polje **fa**, tako da je  $fa[i] = f(a[i])$ .
- Zatim, sortiramo polje **fa** **silazno**, a **sve zamjene** radimo “**istovremeno**” u **oba** polja: **fa** i **a**.

Jedina **mana:** treba nam **dodatno** polje **fa**.

## Zadatak 2

Zadatak 2. Napisati funkciju kojoj su argumenti

- polje (niz)  $a$  cijelih brojeva, cijeli (nenegativni) broj  $n$ ,
- i još dva cijela broja  $x_1$  i  $x_2$ .

Argumenti  $a$  i  $n$  zadaju polinom s neparnim potencijama oblika:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{2i+1}.$$

Funkcija mora vratiti

- cijeli broj  $x$  iz intervala  $[x_1, x_2]$  u kojem se dostiže najmanja vrijednost  $p(x)$ .

Ako takvih brojeva ima više, dovoljno je vratiti jednog. Ako takvih brojeva nema ( $x_1 > x_2$  na ulazu), treba vratiti  $x_1 - 1$ .

## Zadatak 2 (nastavak)

Bitni dio rješenja: računanje **vrijednosti** polinoma u točki  $x$  radimo **modifikacijom Hornerovog** algoritma

🔴 za **neparne** potencije, prema formuli

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{2i+1} = x \cdot \sum_{i=0}^n a_i (x^2)^i = x \cdot \sum_{i=0}^n a_i y^i.$$

Dakle, stvari idu ovim redom:

- 🔴 na **početku**, napravimo supstituciju  $y = x^2$ ,
- 🔴 **napravimo Hornerov** algoritam za polinom u varijabli  $y$ ,
- 🔴 dobivenu vrijednost, na **kraju**, pomnožimo s  $x$ .

Rješenje je u **zad\_2.c**.