Programiranje 1
4. predavanje

Saša Singer

singer@math.hr
web.math.pmf.unizg.hr/~singer

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Prikaz realnih brojeva u računalu — IEEE standard:
  - Osnovni oblik “floating–point” prikaza — mantisa i eksponent.
  - IEEE standard — tipovi: single, double, extended.
  - Greške zaokruživanja u prikazu.
  - Pojam “jedinične greške zaokruživanja”.
- Realna aritmetika računala — IEEE standard:
  - Greške zaokruživanja osnovnih aritmetičkih operacija.
  - Relativna točnost izračunatog rezultata.
  - “Širenje” grešaka zaokruživanja.

Sadržaj predavanja (nastavak)

- Primjeri širenja grešaka i izbjegavanja grešaka:
  - Parcijalne sume harmonijskog reda.
  - Opasno ili “katastrofalno” kraćenje.
  - Korijeni kvadratne jednadžbe.
- Greške u praksi:
  - Promašaj raketa Patriot.

Informacije — odrada

Termin odrade predavanja 24. 1. 2020. je sutra:

- subota, 19. 10., od 10–12 u (003).

Petak 1. 11. je praznik.

Termin odrade tog predavanja je:

- ponedjeljak, 21. 10., od 18–20 u (003).

Informacije — demonstratori za Prog1 i Prog2

Konačno nam je odobreno 6 demonstratora za Prog. To su:

- Al Depope
- Luka Banović
- Karlo Grozdanić
- Sanjin Jurić Fot
- Borna Šimić
- Ena Škopelja

Najavite se demosima koji dan ranije, na pr. e-mailom.

- Njihove termine i e-mail adrese nađete na službenoj web-stranici kolegija.
- Postavite miša na ime, u prozoru kliknite na E-mail.

Informacije — dodaci ovom predavanju

Na webu imate dva dodatka ovom predavanju:

- Cijeli i realni brojevi — binarni prikaz i prikaz u računalu (algoritmi i primjeri),
- Aritmetika realnih brojeva i širenje grešaka zaokruživanja.

Nije obavezno, ali isplati se pogledati — za dopunu znanja.

Prikaz “realnih” brojeva u računalu — IEEE standard

Uvod u prikaz realnih brojeva

Kako pohraniti “jako velike” ili “jako male” brojeve? Recimo, dekadski pisano:

$$67800000000.0 \qquad 0.000002078$$

Koristimo tzv. “znanstveni” zapis (ili notaciju), u kojem

- prvo pišemo vodeće značajne znamenke broja,
- a zatim pišemo faktor koji ima oblik potencije baze, tj. “baza na odgovarajući cjelobrojni eksponent”.

Dogovor: vodeći dio je jednoznamenkast ispred točke!

U bazi 10, to znači između 1 i 10 (strogo ispod 10). Nakon odgovarajućih pomaka decimalne točke, znanstveni zapisi su:

$$6.78 \cdot 10^{10} \qquad 2.078 \cdot 10^{-6}.$$

Prikaz realnih brojeva

U računalu se binarni zapis realnog broja pohranjuje u znanstvenom formatu:

$$\text{broj} = \text{predznak} \cdot \text{mantisa} \cdot 2^{\,\text{eksponent}}.$$

Mantisa se uobičajeno (postoje iznimke!) pohranjuje u tzv. normaliziranom obliku, tj. tako da vrijedi

$$1 \leq \text{mantisa} < (10)_2.$$

I za pohranu mantise i za pohranu eksponenta rezervirano je konačno mnogo binarnih znamenki. Posljedice:

- prikaziv je samo neki raspon realnih brojeva,
- neki brojevi unutar prikazivog raspona nisu prikazivi, jer im je mantisa predugačka $\Longrightarrow$ zaokruživanje.

Prikaz realnih brojeva (nastavak)

Primjer. Znanstveni zapis brojeva u binarnom sustavu:

$$1010.11 = 1.01011 \cdot 2^3$$

$$0.0001011011 = 1.011011 \cdot 2^{-4}$$

Primijetite da se vodeća jedinica u normaliziranom obliku ne mora pamtiti, ako znamo da je broj $\neq 0$. U tom slučaju,

- taj bit se može upotrijebiti za pamćenje dodatne znamenke mantise.

Tada se vodeća jedinica zove skriveni bit (engl. hidden bit), jer se ne pamti, nego se "podrazumijeva".

Ipak, ovo je samo pojednostavljeni prikaz realnih brojeva. Stvarni prikaz je malo složeniji.

Stvarni prikaz realnih brojeva

Najznačajnija promjena obzirom na pojednostavljeni prikaz:

- eksponent se prikazuje u "zamaskiranoj" ili "pomaknutoj" formi (engl. "biased form").

To znači da se stvarnom eksponentu, označimo ga s e,

- dodaje konstanta — takva da je "pomaknuti" eksponent uvijek pozitivan, za normalizirane brojeve.

Ta konstanta ovisi o broju bitova za prikaz eksponenta i bira se tako da je prikaziva

- recipročna vrijednost najmanjeg pozitivnog normaliziranog broja.

Takav "pomaknuti" eksponent naziva se karakteristika, a normalizirana mantisa obično se zove signifikand.

Stvarni prikaz realnih brojeva — IEEE 754

Stvarni prikaz realnih brojeva ima tri dijela i svaki od njih ima svoju duljinu — broj bitova predviđenih za prikaz tog dijela.

- predznak s — uvijek zauzima jedan bit, i to najviši;
- karakteristika k — zauzima sljedećih w bitova (w = engl. "width", širina pomaknutog eksponenta);
- signifikand m — zauzima sljedećih t bitova (t = engl. "trailing", završni ili razlomljeni dio od m).

Po starom standardu — ako se pamti vodeći (cjelobrojni) bit mantise, on je prvi (vodeći) u m, a duljina je $t + 1$.

Još se koristi i standardna oznaka

- preciznost $p := t + 1$ — to je ukupni broj vodećih značajnih bitova cijele mantise.

Stvarni prikaz realnih brojeva — IEEE 754

Karakteristika k se interpretira kao cijeli broj bez predznaka, tako da je $k \in \{0, \ldots, 2^w - 1\}$. "Rubne" vrijednosti za k označavaju tzv. posebna stanja:

- $k = 0$ — nula i denormalizirani brojevi,
- $k = 2^w - 1$ — beskonačno (`Inf`) i "nije broj" (`NaN`).

Sve ostale vrijednosti $k \in \{1, \ldots, 2^w - 2\}$ koriste se za prikaz normaliziranih brojeva različitih od nule.

Veza između karakteristike k i stvarnog eksponenta e je:

$$k = e + bias, \qquad bias = 2^{w-1} - 1.$$

Dakle, dozvoljeni eksponenti e moraju biti između

$$e_{\min} = -(2^{w-1} - 2) \quad \text{i} \quad e_{\max} = 2^{w-1} - 1.$$

Standardni tipovi realnih brojeva — IEEE 754

Novi standard IEEE 754-2008 standard ima sljedeće tipove za prikaz realnih brojeva:

`ime tipa`	`binary32`	`binary64`	`binary128`
duljina u bitovima	32	64	128
$t =$	23	52	112
$w =$	8	11	15
$u = 2^{-p}$	2^{-24}	2^{-53}	2^{-113}
$u \approx$	$5.96 \cdot 10^{-8}$	$1.11 \cdot 10^{-16}$	$9.63 \cdot 10^{-35}$
raspon brojeva $\approx$	$10^{\pm 38}$	$10^{\pm 308}$	$10^{\pm 4932}$

Broj u je tzv. jedinična greška zaokruživanja (v. malo kasnije).

Najveći tip `binary128` još uvijek ne postoji u većini procesora.

Standardni tipovi realnih brojeva — extended

Većina PC procesora još uvijek ima posebni dio — tzv. FPU (engl. Floating–Point Unit). On stvarno koristi

- tip `extended` iz starog standarda, koji odgovara tipu `extended binary64` u novom IEEE 754-2008 standardu.

Dio primjera koje ćete vidjeti napravljen je baš u tom tipu!

`ime tipa`	`extended`
duljina u bitovima	80
$t + 1 =$	$63 + 1$
$w =$	15
$u = 2^{-p}$	2^{-64}
$u \approx$	$5.42 \cdot 10^{-20}$
raspon brojeva $\approx$	$10^{\pm 4932}$

Oznake

Oznake:

- Crveno — duljina odgovarajućeg polja u bitovima, bitove brojimo od 0, zdesna nalijevo (kao i obično),
- s — predznak: 0 za pozitivan broj, 1 za negativan broj,
- k — karakteristika,
- m — mantisa (signifikand).

1	w	t
s	k	m

- Najznačajniji bit u odgovarajućem polju je najljeviji, a najmanje značajan bit je najdesniji.

Stvarni prikaz tipa single (binary32)

“Najkraći” realni tip je tzv. realni broj jednostruke točnosti. U C-u se taj tip zove `float`. Savjet: ne koristiti u praksi!

On ima sljedeća svojstva:

- duljina: 4 byte-a (32 bita), podijeljen u tri polja.

1	8	23
s	k	m

- u mantisi se ne pamti vodeća jedinica, ako je broj normaliziran,
- stvarni eksponent e broja, $e \in \{-126, \ldots, 127\}$,
- karakteristika $k = e + 127$, tako da je $k \in \{1, \ldots, 254\}$,
- karakteristike $k = 0$ i $k = 255$ koriste se za “posebna stanja”.

Stvarni prikaz tipa single (nastavak)

Primjer. Broj $(10.25)_{10}$ prikažite kao broj u jednostrukoj točnosti.

$$
\begin{aligned}
(10.25)_{10} = \left(10 + \frac{1}{4}\right)_{10} &= (10 + 2^{-2})_{10} \\
&= (1010.01)_2 = 1.01001 \cdot 2^3.
\end{aligned}
$$

Prema tome je:

$$
\begin{aligned}
s &= 0 \\
k &= e + 127 = (130)_{10} = (2^7 + 2^1)_{10} = 1000\ 0010 \\
m &= 0100\ 1000\ 0000\ 0000\ 0000\ 000
\end{aligned}
$$

Prikazi nule: $k = 0$, $m = 0$

Realni broj nula ima dva prikaza:

- mantisa i karakteristika imaju sve bitove jednake 0,

a predznak može biti

- 0 — “pozitivna nula”, ili
- 1 — “negativna nula”.

Ta dva prikaza nule su:

$$+0 = 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$$

$$-0 = 1000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$$

Smatra se da su vrijednosti ta dva broja jednake (kad se uspoređuju).

Denormalizirani brojevi: $k = 0$, $m \neq 0$

Ako je $k = 0$, a postoji barem jedan bit mantise koji nije nula, onda se kao eksponent e uzima -126 = najmanji dozvoljeni.

Mantisa takvog broja nije normalizirana i počinje s $0.m$.

Takvi brojevi zovu se denormalizirani brojevi.

Primjer. Kako izgleda prikaz binarno zapisanog realnog broja

$$0.000\;0000\;0000\;0000\;0000\;1011 \cdot 2^{-126}\,?$$

Rješenje:

$$s = 0$$

$$k = 0000\;0000$$

$$m = 000\;0000\;0000\;0000\;0000\;1011$$

Plus i minus beskonačno: $k = 255$, $m = 0$

Ako je $k = 255$, a mantisa je jednaka 0, onda

- $s = 0$ — prikaz $+\infty$, skraćena oznaka `+Inf`,
- $s = 1$ — prikaz $-\infty$, skraćena oznaka `-Inf`.

Rezultat `Inf` (odnosno, `-Inf`) dobivamo ako

- pokušamo spremiti preveliki broj (tzv. "overflow"), ili
- ako nešto različito od nule podijelimo s nulom.

Primjer. Prikaz broja $+\infty$ $(-\infty)$ je

$$s = 0 \qquad (s = 1)$$

$$k = 1111\ 1111$$

$$m = 000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$$

Nije broj: $k = 255$**,** $m \neq 0$

Ako je $k = 255$ i postoji bar jedan bit mantise različit od nule, onda je to oznaka za

- tzv. "Not a Number" ("nije broj") ili, skraćeno, `NaN`.

Rezultat `NaN` je uvijek signal da se radi o pogrešci. Na pr.,

- dijeljenje nule s nulom,
- vađenje drugog korijena iz negativnog broja i sl.

Primjer.

$$s = 0$$

$$k = 1111\ 1111$$

$$m = 000\ 0000\ 0000\ 0101\ 0000\ 0000$$

Greške zaokruživanja

Postoje realni brojevi koje ne možemo egzaktno spremiti u računalo, čak i kad su unutar prikazivog raspona brojeva. Takvi brojevi imaju predugačku mantisu.

Primjer. Realni broj (u binarnom zapisu)

$$B = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 0111$$

ima 25 znamenki mantise i ne može se egzaktno spremiti u realni broj jednostruke točnosti, odnosno, tip `float` u C-u, koji ima $23 + 1$ znamenki za mantisu. Što se onda zbiva?

Tada se pronalaze dva najbliža prikaziva susjeda B_-, B_+, broju B, takva da vrijedi

$$B_- < B < B_+.$$

Greške zaokruživanja (nastavak)

U našem primjeru je:

$$B = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 0111$$

$$B_- = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 011$$

$$B_+ = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 100$$

Nakon toga, zaokružuje se rezultat. Zaokruživanje može biti:

- prema najbližem broju (standardno, engl. "default", za sve procesore) — ako su dva susjeda jednako udaljena od B, izabire "parni" od ta dva broja $\iff$ zadnji bit je 0,
- prema dolje, tj. prema $-\infty$,
- prema gore, tj. prema $+\infty$,
- prema nuli, tj. odbacivanjem "viška" znamenki.

Greške zaokruživanja (nastavak)

Standardno zaokruživanje u našem primjeru:

$$B = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 0111$$

$$B_- = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 011$$

$$B_+ = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 100$$

Ovdje su B_- i B_+ jednako udaljeni od B, pa je zaokruženi B jednak B_+, jer B_+ ima parni zadnji bit (jednak je 0).

Način zaokruživanja (tzv. "rounding mode") može se birati

- postavljanjem tzv. "procesorskih zastavica", ili opcijama za compiler.

U nastavku pretpostavljamo standardno zaokruživanje.

- Za ostala tri načina, ocjena za grešku je 2 puta veća!

Jedinična greška zaokruživanja — standardno

Ako je $x \in \mathbb{R}$ unutar raspona brojeva prikazivih u računalu, onda se, umjesto x, sprema zaokruženi prikazivi broj $f\ell(x)$.

Time smo napravili grešku zaokruživanja $\leq \frac{1}{2}$ "zadnjeg bita" mantise (tj. $\leq \frac{1}{2}\,2^{-t} = 2^{-t-1} = 2^{-p}$). Ta gornja ocjena se zove

- jedinična greška zaokruživanja (engl. "unit roundoff").

Standardna oznaka je u. Za `float` je

$$u = 2^{-24} \approx 5.96 \cdot 10^{-8}.$$

Vrijedi

$$f\ell(x) = (1+\varepsilon)x, \quad |\varepsilon| \leq u,$$

gdje je ε relativna greška napravljena tim zaokruživanjem. Dakle, imamo vrlo malu relativnu grešku.

Prikaz brojeva jednostruke točnosti — sažetak

IEEE tip single = `float` u C-u:

1	8	23
s	k	m

Vrijednost broja je

$$v = \begin{cases} (-1)^s * 2^{(k-127)} * (1.m) & \text{ako je } 0 < k < 255, \\ (-1)^s * 2^{(-126)} * (0.m) & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m \neq 0, \\ (-1)^s * 0 & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m = 0, \\ (-1)^s * \texttt{Inf} & \text{ako je } k = 255 \text{ i } m = 0, \\ \texttt{NaN} & \text{ako je } k = 255 \text{ i } m \neq 0. \end{cases}$$

Raspon tipa float

Najveći prikazivi pozitivni broj je

$$\texttt{FLT\_MAX} = (1 - 2^{-24}) \cdot 2^{128} \approx 3.40282347 \cdot 10^{38},$$

s prikazom

$$\begin{aligned} s &= 0 \\ k &= 1111\ 1110 \\ m &= 111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111 \end{aligned}$$

Najmanji prikazivi normalizirani pozitivni broj je

$$\texttt{FLT\_MIN} = 2^{-126} \approx 1.17549435 \cdot 10^{-38},$$

s prikazom

$$\begin{aligned} s &= 0 \\ k &= 0000\ 0001 \\ m &= 000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000 \end{aligned}$$

Raspon tipa float

Simboličke konstante `FLT_MAX`, `FLT_MIN` i još poneke vezane uz tip `float`, definirane su u datoteci zaglavlja `float.h` i mogu se koristiti u C programima.

Uočite:

- $1/$`FLT_MIN` je egzaktno prikaziv (nađite prikaz),
- $1/$`FLT_MAX` nije egzaktno prikaziv i zalazi u denormalizirane brojeve (tzv. “gradual underflow”).

Najmanji prikazivi denormalizirani pozitivni broj je $2^{-126} \cdot 2^{-23} = 2^{-149} \approx 1.40129846 \cdot 10^{-45}$, s prikazom

$$\begin{aligned} s &= 0 \\ k &= 0000\ 0000 \\ m &= 000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0001 \end{aligned}$$

Stvarni prikaz tipa double (binary64)

"Srednji" realni tip je tzv. realni broj dvostruke točnosti.
U C-u se taj tip zove `double`. Savjet: njega treba koristiti!

On ima sljedeća svojstva:

- Duljina: 8 byte-a (64 bita), podijeljen u tri polja.

1	11	52
s	k	m

- u mantisi se ne pamti vodeća jedinica, ako je broj normaliziran,
- stvarni eksponent e broja, $e \in \{-1022, \ldots, 1023\}$,
- karakteristika $k = e + 1023$, tako da je $k \in \{1, \ldots, 2046\}$,
- karakteristike $k = 0$ i $k = 2047$ — "posebna stanja".

Prikaz brojeva dvostruke točnosti — sažetak

IEEE tip double = `double` u C-u:

1	11	52
s	k	m

Vrijednost broja je

$$v = \begin{cases} (-1)^s * 2^{(k-1023)} * (1.m) & \text{ako je } 0 < k < 2047, \\ (-1)^s * 2^{(-1022)} * (0.m) & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m \neq 0, \\ (-1)^s * 0 & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m = 0, \\ (-1)^s * \texttt{Inf} & \text{ako je } k = 2047 \text{ i } m = 0, \\ \texttt{NaN} & \text{ako je } k = 2047 \text{ i } m \neq 0. \end{cases}$$

Jedinična greška i raspon tipa double

Jedinična greška zaokruživanja za `double` je

$$u = 2^{-53} \approx 1.11 \cdot 10^{-16}.$$

Broj $1 + 2u$ je najmanji prikazivi broj strogo veći od 1. Postoji

$$\texttt{DBL\_EPSILON} = 2u \approx 2.2204460492503131 \cdot 10^{-16}.$$

Najveći prikazivi pozitivni broj je

$$\texttt{DBL\_MAX} = (1 - 2^{-53}) \cdot 2^{1024} \approx 1.7976931348623157 \cdot 10^{308}.$$

Najmanji prikazivi normalizirani pozitivni broj je

$$\texttt{DBL\_MIN} = 2^{-1022} \approx 2.2250738585072014 \cdot 10^{-308}.$$

Tip extended

Stvarno računanje (na IA–32) se obično radi u "proširenoj" točnosti. U C-u je taj tip možda dohvatljiv kao `long double`.

On ima sljedeća svojstva:

- Duljina: 10 byte-a (80 bita), podijeljen u četiri polja.

1	15	1	63
s	k	i	m

- u mantisi se pamti vodeći bit i mantise,
- stvarni eksponent e broja, $e \in \{-16382, \ldots, 16383\}$,
- karakteristika $k = e + 16383$, tako da je $k \in \{1, \ldots, 32766\}$,
- karakteristike $k = 0$ i $k = 32767$ — "posebna stanja".

Prikaz brojeva proširene točnosti — sažetak

IEEE tip extended:

1	15	1	63
s	k	i	m

s tim da je $i = 0 \Longleftrightarrow k = 0$ (tu je redundantnost u prikazu).

Vrijednost broja je

$$v = \begin{cases} (-1)^s * 2^{(k-16383)} * (1.m) & \text{ako je } 0 < k < 32767, \\ (-1)^s * 2^{(-16382)} * (0.m) & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m \neq 0, \\ (-1)^s * 0 & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m = 0, \\ (-1)^s * \texttt{Inf} & \text{ako je } k = 32767 \text{ i } m = 0, \\ \texttt{NaN} & \text{ako je } k = 32767 \text{ i } m \neq 0. \end{cases}$$

Realna aritmetika računala (IEEE standard)

Zbrajanje realnih brojeva u računalu

Primjer. Uzmimo "računalo" u bazi 10, s $p = 4$ značajne dekadske znamenke. Treba naći rezultat zbrajanja brojeva

$$x = 9.937 \times 10^0, \quad y = 8.165 \times 10^{-2}.$$

Prvo se izjednače eksponenti na onaj veći, uz pomak mantise manjeg broja udesno (ako treba), a onda se zbroje te mantise. Dobiveni rezultat se normalizira (ako treba) i zaokružuje.

$$\begin{array}{rll} x = & 9.937 & \times 10^0 \\ y = & 0.08165 & \times 10^0 \quad \leftarrow \text{pomak} \\ \hline x + y = & 10.01865 & \times 10^0 \quad \leftarrow \text{zbroj} \\ & & \\ x + y = & 1.001865 & \times 10^1 \quad \leftarrow \text{normalizacija} \\ f\ell(x+y) = & 1.002 & \times 10^1 \quad \leftarrow \text{zaokruživanje} \end{array}$$

■

Realna aritmetika računala — standard

Realna aritmetika računala nije egzaktna!

Razlog:

- Rezultat svake operacije mora biti prikaziv,
- pa dolazi do zaokruživanja.

Standard IEEE 754-2008 za realnu artimetiku računala propisuje da za sve četiri osnovne aritmetičke operacije vrijedi

- ista ocjena greške zaokruživanja kao i za prikaz brojeva,
- tj. da izračunati rezultat ima malu relativnu grešku.

Isto vrijedi i za neke matematičke funkcije, poput $\sqrt{\ }$, ali ne mora vrijediti za sve funkcije (na pr. za sin oko 0, ili ln oko 1).

Standard iz 2008. g. to preporučuje, ali (zasad) ne zahtijeva.

Realna aritmetika računala — zaokruživanje

Neka je $\circ$ bilo koja od aritmetičkih operacija $+$, $-$, $*$, $/$, i neka su x i y prikazivi operandi (drugih, ionako, nema u računalu).

- Ako su x i y u dozvoljenom, tj. normaliziranom rasponu,
- i ako se egzaktni rezultat $x \circ y$, također, nalazi u normaliziranom rasponu (ne mora biti prikaziv),

za računalom izračunati (prikazivi) rezultat $f\ell(x \circ y)$ onda vrijedi

$$f\ell(x \circ y) = (1 + \varepsilon)\,(x \circ y), \quad |\varepsilon| \leq u,$$

gdje je u jedinična greška zaokruživanja za dani tip brojeva. Ova ocjena odgovara zaokruživanju egzaktnog rezultata!

Prava relativna greška ε ovisi o: x, y, operaciji $\circ$, i stvarnoj realizaciji aritmetike računala.

Posljedice zaokruživanja u realnoj aritmetici

Napomena. Bez pretpostavki o normaliziranom rasponu, prethodni rezultat ne vrijedi — greška može biti puno veća!

Zbog zaokruživanja, u realnoj aritmetici računala, nažalost,

- ne vrijede uobičajeni zakoni za aritmetičke operacije na skupu $\mathbb{R}$.

Na primjer, za aritmetičke operacije u računalu

- nema asocijativnosti zbrajanja i množenja,
- nema distributivnosti množenja prema zbrajanju.

Dakle, poredak izvršavanja operacija je bitan!

Zapravo, jedino standardno pravilo koje vrijedi je

- komutativnost za zbrajanje i za množenje.

Širenje grešaka zaokruživanja — ukratko

Vidimo da gotovo svaki izračunati rezultat ima neku grešku.

Kad imamo puno aritmetičkih operacija, dolazi do tzv.

- akumulacije ili širenja grešaka.

Očekujemo da greške rastu, ali koliko: "pomalo" ili "brzo"?

Zapamtite: Jedina "opasna" operacija u aritmetici računala je

- oduzimanje bliskih brojeva — tzv. "kraćenje", tj. kad
- iz velikih brojeva, aditivnim operacijama dobivamo male.

To može drastično povećati grešku (v. primjer malo kasnije).

Više o greškama zaokruživanja — u Numeričkoj matematici.

- Možete pogledati i dodatak ovom predavanju (na webu).

Primjer:
Neasocijativnost zbrajanja

Primjer neasocijativnosti zbrajanja

Primjer. Asocijativnost zbrajanja u računalu ne vrijedi.

Znamo (odnosno, uskoro ćete znati) da je tzv. harmonijski red

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} + \cdots$$

divergentan, tj. suma mu je "beskonačna".

No, nitko nas ne spriječava da računamo konačne početne komade ovog reda, tj. njegove parcijalne sume

$$S_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$

A kojim redom zbrajamo? (Zbrajanje je binarna operacija!)

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

U realnim brojevima je potpuno svejedno kojim poretkom zbrajanja računamo ovu sumu, jer vrijedi asocijativnost.

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c.$$

Uostalom, sam zapis izraza bez zagrada

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

već "podrazumijeva" asocijativnost. U suprotnom, morali bismo zagradama naglasiti poredak operacija.

Ovdje imamo točno $n - 1$ binarnih operacija zbrajanja, i možemo ih napraviti kojim redom hoćemo.

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Drugim riječima, u prethodni izraz za S_n

- možemo rasporediti zagrade na bilo koji način, samo da svi plusevi budu “binarni”, tj. zbrajaju dva objekta, a objekt je broj ili (podizraz u zagradama).

Na pr., zbrajanju “unaprijed” odgovara raspored zagrada

$$S_{n,1} := \left(\cdots \left(\left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \right) + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) + \frac{1}{n},$$

a zbrajanju “unatrag” odgovara raspored zagrada

$$S_{n,2} := 1 + \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) \cdots \right) \right).$$

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Koliko takvih rasporeda zagrada ima — bit će napravljeno u Diskretnoj matematici (tzv. Catalanovi brojevi). Bitno nam je samo da svi ti rasporedi, matematički, daju isti rezultat.

Komutativnost nam uopće ne treba. Ako i nju iskoristimo, dobivamo još puno više načina za računanje ove sume, i svi, naravno, opet daju isti rezultat.

Izračunajmo aritmetikom računala navedene dvije sume

- $S_{n,1}$ — unaprijed, i
- $S_{n,2}$ — unatrag,

za $n = 1\,000\,000$, u tri standardne IEEE točnosti: single, double i extended. Preciznije, koristimo ova tri tipa za prikaz brojeva, uz pripadne aritmetike za računanje.

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Uz skraćene oznake S_1 i S_2 za varijable u kojima zbrajamo pripadne sume, odgovarajući algoritmi za zbrajanje su

- unaprijed:

$$\begin{aligned} S_1 &:= 1, \\ S_1 &:= S_1 + \frac{1}{i}, \quad i = 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

- unatrag:

$$\begin{aligned} S_2 &:= \frac{1}{n}, \\ S_2 &:= \frac{1}{i} + S_2, \quad i = n-1, \ldots, 1. \end{aligned}$$

Dakle, zaista ne koristimo komutativnost zbrajanja.

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Dobiveni rezultati za sume S_1, S_2 (prva pogrešna znamenka je crvena) i pripadne relativne greške su:

tip i suma	vrijednost	rel. greška
single S_1	14.35735797882080078125	2.45740E−03
single S_2	14.39265155792236328125	5.22243E−06
double S_1	14.392726722864781052 6	6.54899E−14
double S_2	14.392726722865754496 2	−2.14449E−15
extended S_1	14.392726722865723355 3	1.91639E−17
extended S_2	14.392726722865723646 7	−1.08475E−18

Slovo E u brojevima zadnjeg stupca znači “puta 10 na”, pa je, na primjer, $-1.08475\text{E}{-18} = -1.08475 \times 10^{-18}$.

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Izračunate vrijednosti S_1 i S_2 su različite (u sve tri točnosti). Dakle, zbrajanje brojeva u aritmetici računala, očito, nije asocijativno.

Primijetite da, u sve tri točnosti, zbrajanje unatrag S_2 daje nešto točniji rezultat. To nije slučajno.

Svi brojevi koje zbrajamo su istog predznaka pa zbroj stalno raste, bez obzira na poredak zbrajanja.

- Kad zbrajamo unatrag — od manjih brojeva prema većim, zbroj se pomalo "nakuplja".
- Obratno, kad zbrajamo unaprijed — od velikih brojeva prema manjim, zbroj puno brže naraste. Pred kraj, mali dodani član jedva utječe na rezultat (tj. dobar dio znamenki pribrojnika nema utjecaj na sumu).

Primjer:
“Katastrofalno” kraćenje

Primjer katastrofalnog kraćenja

Zakruživanjem ulaznih podataka dolazi do male relativne greške. Kako ona može utjecati na konačni rezultat?

Primjer. Uzmimo realnu aritmetiku "računala" u bazi 10. Za mantisu (značajni dio broja) imamo $p = 4$ dekadske znamenke, a za eksponent imamo 2 znamenke (što nije bitno). Neka je

$$x = 8.8866 = 8.8866 \times 10^0,$$
$$y = 8.8844 = 8.8844 \times 10^0.$$

Umjesto brojeva x i y, koji nisu prikazivi, u "memoriju" spremamo brojeve $f\ell(x)$ i $f\ell(y)$, pravilno zaokružene na $p = 4$ znamenke

$$f\ell(x) = 8.887 \times 10^0,$$
$$f\ell(y) = 8.884 \times 10^0.$$

Primjer katastrofalnog kraćenja (nastavak)

Ovim zaokruživanjima napravili smo malu relativnu grešku u x i y (ovdje je $u = \frac{1}{2}\, b^{-p} = 5 \times 10^{-5}$).

Razliku $f\ell(x) - f\ell(y)$ računamo tako da izjednačimo eksponente (što već jesu), oduzmemo značajne dijelove (mantise), pa normaliziramo

$$\begin{aligned} f\ell(x) - f\ell(y) &= 8.887 \times 10^0 - 8.884 \times 10^0 \\ &= 0.003 \times 10^0 = 3.??? \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Kod normalizacije, zbog pomaka "ulijevo", pojavljuju se

- $? =$ znamenke koje više ne možemo restaurirati (ta informacija se izgubila — zaokruživanjem x i y).

Što sad?

Primjer katastrofalnog kraćenja (nastavak)

Računalo radi isto što bismo i mi napravili:

- na ta mjesta ? upisuje 0.

Razlog: da rezultat bude točan, ako su polazni operandi točni. Dakle, ovo oduzimanje je egzaktno i u aritmetici računala.

Konačni izračunati rezultat je $f\ell(x) - f\ell(y) = 3.000 \times 10^{-3}$.

Pravi rezultat je

$$\begin{aligned} x - y &= 8.8866 \times 10^0 - 8.8844 \times 10^0 \\ &= 0.0022 \times 10^0 = 2.2 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Već prva značajna znamenka u $f\ell(x) - f\ell(y)$ je pogrešna, a relativna greška je ogromna! Uočite da je ta znamenka (3), ujedno, i jedina koja nam je ostala — sve ostalo se skratilo!

Primjer katastrofalnog kraćenja (nastavak)

Prava katastrofa se događa ako $3.??? \times 10^{-3}$ uđe u naredna zbrajanja (oduzimanja), a onda se skrati i ta trojka!

Uočite da je oduzimanje $f\ell(x) - f\ell(y)$ bilo egzaktno i u aritmetici našeg "računala", ali rezultat je, svejedno, pogrešan.

Krivac, očito, nije oduzimanje (kad je egzaktno).

- Uzrok su polazne greške u operandima $f\ell(x)$, $f\ell(y)$.

Ako njih nema, tj. ako su polazni operandi egzaktni,

- i dalje, naravno, dolazi do kraćenja,
- ali je rezultat (uglavnom, a po IEEE standardu sigurno) egzaktan,

pa se ovo kraćenje onda zove benigno kraćenje.

Primjer:
Kvadratna jednadžba

Kvadratna jednadžba

Uzmimo da treba riješiti (realnu) kvadratnu jednadžbu

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdje su a, b i c zadani, i vrijedi $a \neq 0$.

Matematički gledano, problem je lagan: imamo 2 rješenja

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Numerički gledano, problem je mnogo izazovniji:

- ni uspješno računanje po ovoj formuli,
- ni točnost izračunatih korijena,

ne možemo uzeti “zdravo za gotovo”.

Kvadratna jednadžba — standardni oblik

Za početak, jer znamo da je $a \neq 0$, onda jednadžbu možemo podijeliti s a, tako da dobijemo tzv. “normalizirani” oblik

$$x^2 + px + q = 0, \qquad p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}.$$

Po standardnim formulama, rješenja ove jednadžbe su

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Međutim, u praksi, stvarno računanje se radi po formuli

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

s tim da na početku izračunamo i zapamtimo $p/2$ ili $-p/2$. Ovim postupkom štedimo jedno množenje (ono s 4).

Kvadratna jednadžba — problem

Primjer. Rješavamo kvadratnu jednadžbu $x^2 - 56x + 1 = 0$.

U dekadskoj aritmetici s $p = 5$ značajnih znamenki dobijemo

$$x_1 = 28 - \sqrt{783} = 28 - 27.982 = 0.018000,$$

$$x_2 = 28 + \sqrt{783} = 28 + 27.982 = 55.982.$$

Točna rješenja su

$$x_1 = 0.0178628\ldots \quad \text{i} \quad x_2 = 55.982137\ldots.$$

Apsolutno manji od ova dva korijena — x_1, ima samo dvije točne znamenke (kraćenje), relativna greška je $7.7 \cdot 10^{-3}$!

Apsolutno veći korijen x_2 je “savršeno” točan.

Kvadratna jednadžba — popravak

Prvo izračunamo većeg po apsolutnoj vrijednosti, po formuli

$$x_2 = \frac{-(b + \operatorname{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} = -\frac{p}{2} - \operatorname{sign}(p)\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

a manjeg po apsolutnoj vrijednosti, izračunamo iz

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = q$$

(Vièteova formula), tj. formula za x_1 je

$$x_1 = \frac{c}{x_2\, a} = \frac{q}{x_2}.$$

Opasnog kraćenja za x_1 više nema!

Kvadratna jednadžba (nastavak)

Ovo je bila samo jedna, od (barem) tri “opasne” točke za računanje. Preostale dvije su:

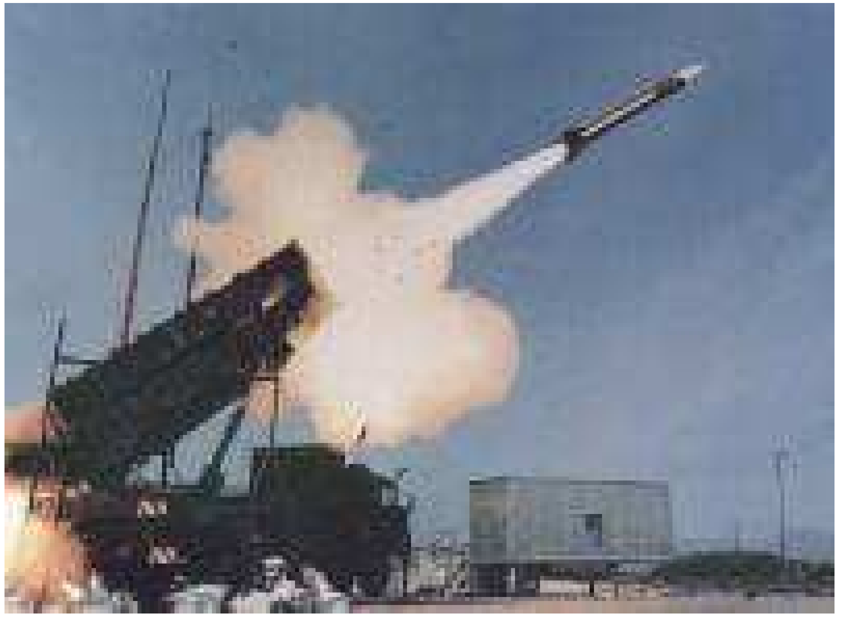
- “kvadriranje” pod korijenom — mogućnost za overflow. Rješenje — “skaliranjem”.
- oduzimanje u diskriminanti s velikim kraćenjem — nema jednostavnog rješenja. Naime, “krivac” nije aritmetika.
  - To je samo odraz tzv. nestabilnosti problema. Tad imamo dva bliska korijena, koji su vrlo osjetljivi na male promjene (perturbacije) koeficijenata jednadžbe.
  - Na primjer, pomak c = pomak grafa “gore–dolje”. Mali pomak rezultira velikom promjenom korijena!

Primjer “greške” iz prakse

Promašaj raketa Patriot

U prvom Zaljevskom ratu, 25. veljače 1991. godine, američke rakete Patriot nisu uspjele oboriti iračku Scud raketu iznad Dhahrana u Saudijskoj Arabiji.

- Scud raketa je pukim slučajem pala na američku vojnu bazu — usmrtivši 28 i ranivši stotinjak ljudi.



Promašaj raketa Patriot (nastavak)

Istraga otkriva sljedeće:

- Računalo koje je upravljalo Patriot raketama, vrijeme je brojilo u desetinkama sekunde proteklim od trenutka paljenja (uključivanja) sustava.
- Desetinka sekunde binarno

$$0.1_{10} = (0.0\dot{0}01\dot{1})_2.$$

- To računalo prikazivalo je realne brojeve korištenjem nenormalizirane mantise duljine 23 bita.
- Spremanjem broja 0.1 u registar takvog računala radi se (apsolutna) greška $\approx 9.5 \cdot 10^{-8}$ (sekundi).

Ne izgleda puno . . . , a kamo li opasno.

Promašaj raketa Patriot (nastavak)

Detalji:

- Računalo je bilo u pogonu 100 sati, pa je ukupna greška zaokruživanja bila (stalno se zbraja, svakih 0.1 sekundi)

$$100 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10 \cdot 9.5 \cdot 10^{-8} = 0.34\,\mathrm{s}.$$

- Scud raketa putuje brzinom $\approx 1.6\,\mathrm{km/s}$, pa je "tražena" više od pola kilometra daleko od stvarnog položaja.
- Greška je uočena dva tjedna ranije, nakon 8 sati rada jednog drugog sustava. Modifikacija programa stigla je dan nakon nesreće.
- Posade sustava mogle su i dva tjedna ranije dobiti uputu "isključi/uključi računalo" svakih nekoliko sati — ali je nisu dobile.