# SLOŽENOST ALGORITAMA

## 5. 9. 2007.

1. (80) Neka je $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ konačan skup različitih vrsta novčića. Vrijednosti novčića $a_i$ su prirodni brojevi i vrijedi $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$. Na raspolaganju imamo neograničenu količinu novčića svake vrste. Problem razmjene novca glasi: treba izabrati najmanji ukupni broj novčića tako da zbroj njihovih vrijednosti bude zadani prirodni broj $C$.

   (a) Ako je $a_n > 1$, pokažite primjerom da postoje $A_n$ i $C$ za koje problem nema rješenja.

   (b) Ako je $a_n = 1$, dokažite da rješenje postoji.

   (c) Za slučaj $a_n = 1$, sastavite pohlepni algoritam razmjene novca, koji prolazi novčiće redoslijedom $a_1, a_2, \ldots, a_n$, uzimajući maksimalni broj novčića određene vrijednosti $a_i$. Algoritam treba vratiti brojeve $x_i$ novčića $i$–te vrste u razmjeni, za $i = 1, \ldots, n$. Nađite složenost ovog algoritma. Da li ona ovisi o vrijednostima novčića?

   (d) Da li pohlepni algoritam uvijek nalazi rješenje s najmanjim brojem novčića? Posebno, što vrijedi za slučaj $a_i = k^{n-i}$, $i = 1, \ldots, n$, gdje je $k > 1$ zadani prirodni broj? Dokažite ili nađite kontraprimjer.

   (Bodovi: (a) = 15, (b) = 15, (c) = 25, (d) = 25.)

2. (40) Množenje matrica $A$ i $B$ reda $n$ svodi se na računanje određenog broja skalarnih produkata vektora duljine $n$ — redaka matrice $A$ i stupaca matrice $B$. Neka je $n = 2p$ paran broj. Winogradov algoritam za skalarni produkt vektora $u$ i $v$ duljine $n$, ima oblik

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{p} (u_{2i-1} + v_{2i})(u_{2i} + v_{2i-1}) - \sum_{i=1}^{p} u_{2i-1}u_{2i} - \sum_{i=1}^{p} v_{2i-1}v_{2i} \quad .$$

   Zadnja dva člana u ovoj sumi mogu se unaprijed izračunati i zapamtiti, za retke matrice $A$ i stupce matrice $B$. Sastavite odgovarajući algoritam za množenje matrica. Nađite točan broj množenja i točan broj zbrajanja u tom algoritmu. Kolika je ušteda obzirom na standardni algoritam za množenje matrica?

**REZULTATI:** četvrtak, 6. 9. 2007. u 13:00 sati. Saša Singer

Dozvoljena pomagala: Tablice i formule, kalkulator.