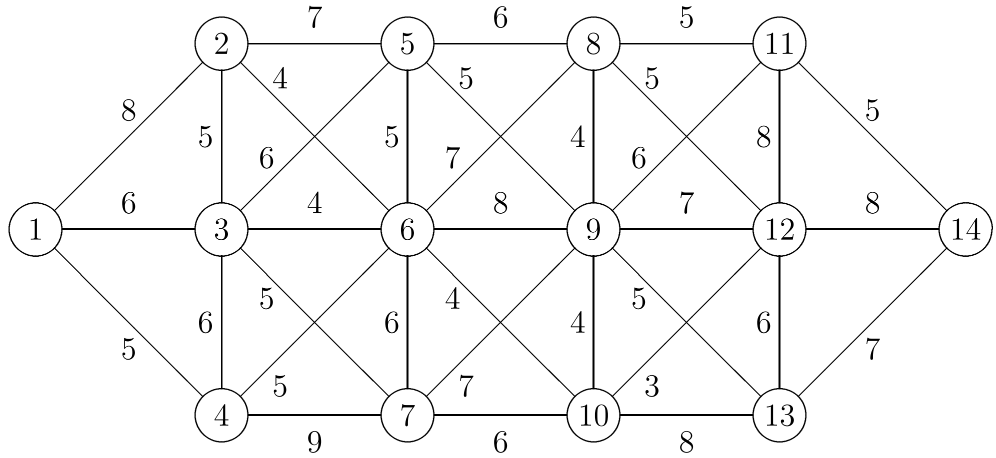
TEORIJA ALGORITAMA

19. 9. 1994.

1. (40) Primovim algoritmom nađite minimalno razapinjuće stablo grafa na slici:



Precizno opišite postupak nalaženja rješenja.

2. (80) Za zadani prirodni broj n, $n \geq 2$, promatramo produkt n matrica $M_1, \ldots, M_n$

$$M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n \quad .$$

Matrica M_i ima d_{i-1} redaka i d_i stupaca, za $i = 1, \ldots, n$. Za množenje bilo koje dvije matrice koristimo standardni algoritam. Produkt M računamo uzastopnom primjenom produkta dviju matrica, nekim redom. Zbog asocijativnosti množenja, to možemo napraviti na više načina, ovisno o tome kako rasporedimo zagrade u taj produkt. Složenost algoritma za računanje M mjerimo ukupnim brojem množenja skalara – matričnih elemenata (zbrajanja ignoriramo, jer njih ima podjednako).

(a) Nađite sve moguće rasporede zagrada i pripadne složenosti za računanje produkta M od 4 matrice dimenzija $d_0 = 13$, $d_1 = 5$, $d_2 = 89$, $d_3 = 3$, $d_4 = 34$. Koliko je najmanje množenja potrebno i koji je optimalni raspored zagrada?

(b) Neka je $C(i, j)$ najmanja složenost (s optimalnim rasporedom zagrada) za računanje produkta

$$M_{i,j} = M_i \times M_{i+1} \times \cdots \times M_j \quad , \quad i < j \quad .$$

Nađite rekurzivnu relaciju za $C(i, j)$. Uputa: za $j \geq i+2$, zadnji produkt ima oblik $M_{i,j} = M_{i,k} \times M_{k+1,j}$, za neki k, $i \leq k < j$, i oba faktora moraju biti optimalno izračunata (dokažite). Ostaje optimizirati po k.

(c) Sastavite algoritam za nalaženje $C(1, n)$, za zadani n i zadani vektor dimenzija d. Algoritam mora imati složenost $O(n^3)$.

(Bodovi: (a) = 15, (b) = 30, (c) = 35.)

REZULTATI: srijeda, 21. 9. 1994. u 11:30 sati. Saša Singer