TEORIJA ALGORITAMA

3. 2. 1995.

1. (80) Zadana je familija S podskupova nekog konačnog univerzalnog skupa U, oblika $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$. Potfamilija T, $T \subseteq S$, je **pokrivač** familije S, ako vrijedi

$$\bigcup_{T_j \in T} T_j = \bigcup_{S_i \in S} S_i \quad .$$

Familija T je **najmanji pokrivač** za S, ako je T pokrivač od S koji sadrži najmanji broj skupova iz S, tj. kardinalni broj $|T|$ je najmanji mogući među svim pokrivačima. Promatrajmo slijedeći pohlepni algoritam. Na početku je $T = \emptyset$. U svakom koraku, familiji T dodajemo onaj skup $S_i \in S$ koji sadrži najviše elemenata od U koji još nisu pokriveni s T. Algoritam staje kad T postane pokrivač od S.

(a) Pretpostavimo da je $\cup_{i=1}^{m} S_i = U = \{1, \ldots, n\}$, gdje je $m < n$. Sastavite algoritam za nalaženje pokrivača zadane familije S, na bazi opisane pohlepne strategije. Familije S i T reprezentiramo kao polja skupova, a S_i su skupovi kao u Pascalu. Nađite vremensku i prostornu složenost svog algoritma.

(b) Da li pohlepni algoritam uvijek daje **najmanji** pokrivač familije S? Dokažite ili nađite kontraprimjer.

(c) Ako pojam najmanjeg pokrivača definiramo tako da je $\sum_{T_i \in T} |T_i|$ najmanje moguće, da li tada pohlepni algoritam daje najmanji pokrivač u ovom smislu? Dokažite ili nađite kontraprimjer.

(Bodovi: (a) = 40, (b) = 20, (c) = 20.)

2. (40) Imamo $n = 6$ vrsta predmeta numeriranih brojevima od 1 do 6. Svaki predmet i–te vrste ima volumen w_i i vrijednost p_i zadanu tablicom

i	1	2	3	4	5	6
p_i	7	6	11	13	5	15
w_i	4	3	5	6	3	7

Ruksak volumena $M = 16$ treba napuniti predmetima zadanih vrsta tako da ukupna vrijednost svih predmeta u ruksaku bude maksimalna, a ukupni volumen svih predmeta ne prelazi zadani volumen ruksaka. Nađite količinu x_i predmeta i–te vrste koju treba staviti u ruksak, za $i = 1, \ldots, 6$, uz uvjet:

(a) $x_i \in \mathbf{R}$, $0 \le x_i \le 1$, za $i = 1, \ldots, 6$,

(b) $x_i \in \{0, 1\}$, za $i = 1, \ldots, 6$.

Dokažite optimalnost nađenih rješenja. (Bodovi: (a) = 10, (b) = 30.)

REZULTATI: petak, 3. 2. 1995. u 14 sati. Saša Singer