SLOŽENOST ALGORITAMA

19. 4. 2005.

1. (60) Neka je $G = (V, E)$ neusmjereni graf. Skup U, $U \subseteq V$, zovemo **pokrivač vrhova**, ako za svaki brid $e \in E$ postoji vrh $u \in U$, takav da e sadrži vrh u. **Najmanji** pokrivač vrhova je onaj s najmanjim brojem vrhova. **Stupanj vrha** $v \in V$ u grafu G je broj bridova iz E koji sadrže taj vrh. Promatrajmo slijedeći pohlepni algoritam. Na početku je $U = \emptyset$. U svakom koraku, skupu U dodajemo vrh najvećeg stupnja među preostalim vrhovima izvan U. Algoritam staje kad U postane pokrivač vrhova od G.

   (a) Odaberite pogodnu reprezentaciju grafa G i sastavite algoritam za nalaženje pokrivača vrhova grafa G, na bazi ove pohlepne strategije. Nađite složenost tog algoritma.

   (b) Da li pohlepni algoritam uvijek nalazi **najmanji** pokrivač vrhova? Dokažite ili nađite kontraprimjer.

   (Bodovi: (a) = 40, (b) = 20.)

2. (60) Neka su m i n prirodni brojevi. Najveću zajedničku mjeru brojeva m i n nalazimo Euklidovim algoritmom:

```
function gcd ( m, n : integer ) : integer ;
  begin
    if n = 0 then gcd := m
    else
      gcd := gcd(n, m mod n) ;
  end ;
```

   Mjera složenosti ovog algoritma je broj izvršavanja operacije **mod**, ili, ekvivalentno, broj (rekurzivnih) poziva funkcije *gcd*.

   (a) Neka je $M = \max\{m, n\}$. Dokažite da za najgoru složenost vrijedi

   $$\mathrm{Compl}\,(m, n) \le \lfloor 2 \lg M \rfloor + 1 \quad .$$

   (b) Neka je F_n n–ti Fibonaccijev broj. Nađite složenost Euklidovog algoritma za računanje $gcd(F_n, F_{n-1})$. Koliko je $gcd(F_n, F_{n-1})$?

   (Bodovi: (a) = 35, (b) = 25.)

REZULTATI: četvrtak, 21. 4. 2005. u 10 sati. Saša Singer

Dozvoljena pomagala: Tablice i formule, kalkulator.