Konveksna ljuska skupa točaka

Renato Babojelić

20. siječnja 2015.

Uvod

Problem

Za dani skup S, koji sadrži n točaka traži se njegova konveksna ljuska $CH(S)$.

Matematičke preliminarnosti

Definicija

Za skup S kažemo da je **konveksan**, ako je za svake dvije točke x i y iz S i njihova spojnica sadržana u S.

Definicija

Konveksna ljuska skupa S, u ravnini, je najmanji konveksan skup skup $CH(S)$. Drugim riječima to je presjek svih konveksnih skupova koji sadrže S.

Matematičke preliminarnosti

Lema

Konveksna ljuska konačnog skupa S u ravnini je najmanji konveksni poligon P koji sadrži S. Odnosno ne postoji konveksni poligon P' za koji vrijedi $P \supset P' \supseteq S$

Lema

Konveksna ljuska skupa S u ravnini je unija svih trokuta čiji su vrhovi elementi skupa S.

Matematičke preliminarnosti

Definicija

Za točku iz S kažemo da je **ekstremna** ako je ujedno i vrh pripadnog konveksnog poligona u kojem je unutrašnji kut manji od π. Drugim riječima ekstremne točke su one koje čine 'prave' vrhove poligona.

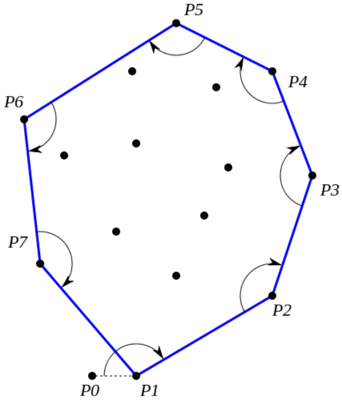
Lema

Točka skupa S u ravnini je ekstremna, ako i samo ako postoji pravac kroz tu točku koji nigdje drugdje ne dodiruje konveksnu ljusku.

Ulaz / Izlaz

- Ulaz: Lista točaka iz skupa S
- Izlaz: Lista vrhova konveksnog poligona $CH(S)$

Jarvis's march (1970,1973)

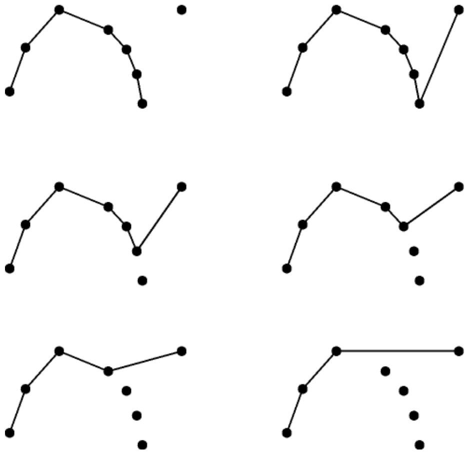


```
Algoritam: Jarvis
Odaberi tocku s najmanjom y koordinatom.
Neka je i_0 njen indeks; i:=i_0.
ponavljaj
        za j!=i
                izracunaj kut otklona
        neka je k indeks tocke s najmanjim kutem
        dodaj k u polje vrhova
        i:=k
dok je i!=i_0
```

Analiza

- Korektnost: Da
- Složenost: $O(nh)$

Graham scan (1972)



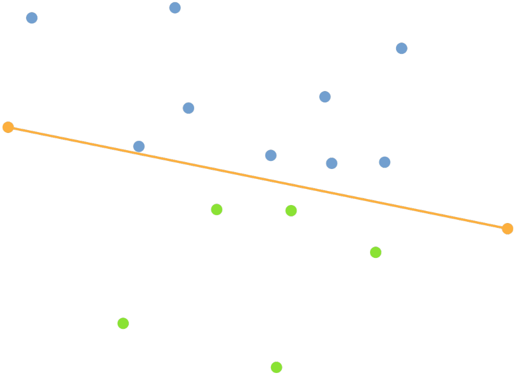
```
Algoritam: Graham
Sortiraj tocke uzlazno po x koordinati; u oznakama p[i]
Stog S=(p[1],p[2]); t-vrh stoga
i:=3
dok je i <= n
        ako je p[i] desno od (p[t-1],p[t])
                push(p[i],S)
                i:=i+1
        inace
                pop(S)
```

Analiza

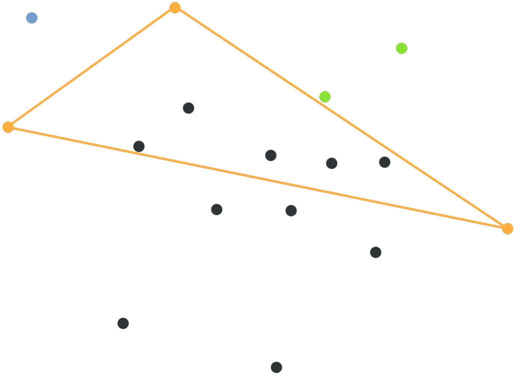
- Korektnost: Da
- Složenost: $O(n \log n)$

```
Algoritam: QuickHull
funkcija QuickHull(a,b,S)
  ako je S=prazan skup return()
    else
      c:=indeks tocke maksimalno udaljene od ab
      A:=tocke desno od ac
      B:=tocke lijevo od cb
      return QuickHull(a,c,A)+(c)+QuickHull(c,b,B)
```

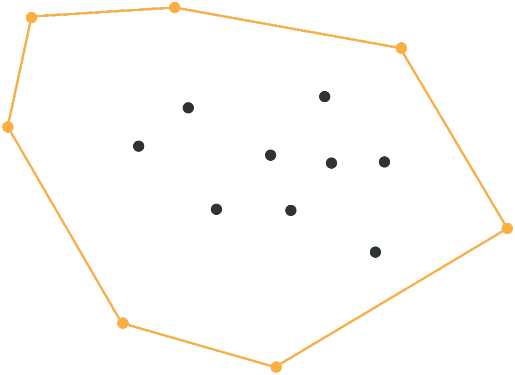
Partition



Max distance



Stop



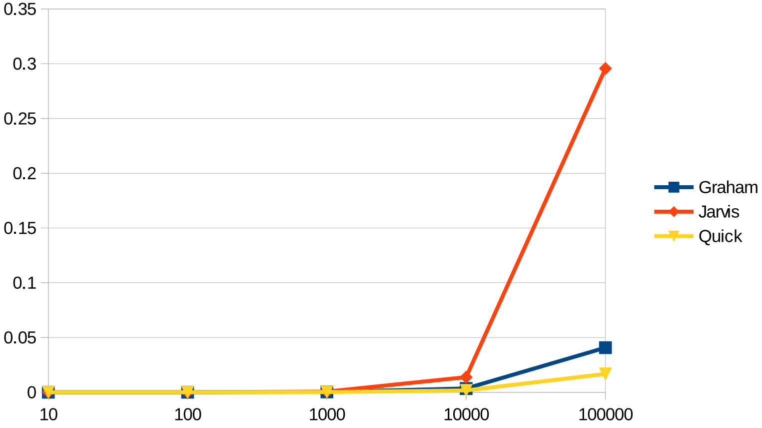
Analiza

- Korektnost: Da
- Složenost: $O(n \log n)$ u prosjeku; $O(n^2)$ najgore

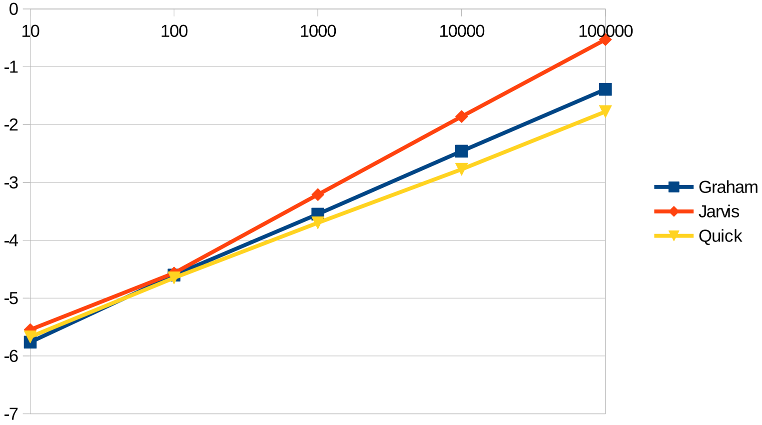
Testiranje

- Veličine zadaća: 10-10^5
- 4 testa;
- Srednje vrijednosti od 1000 mjerenja

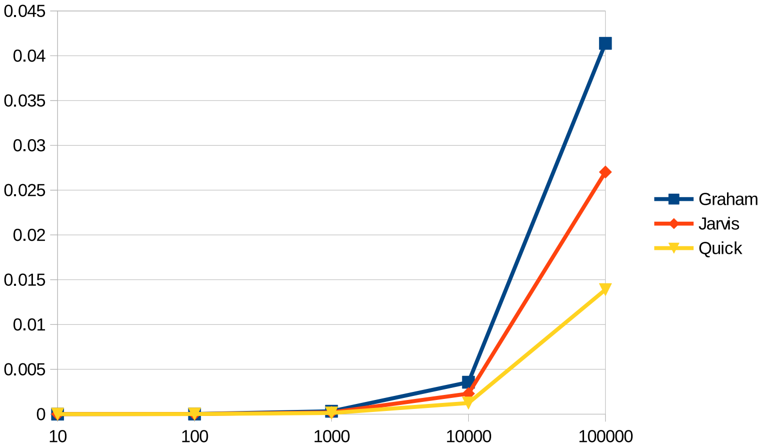
Krug - uniformno



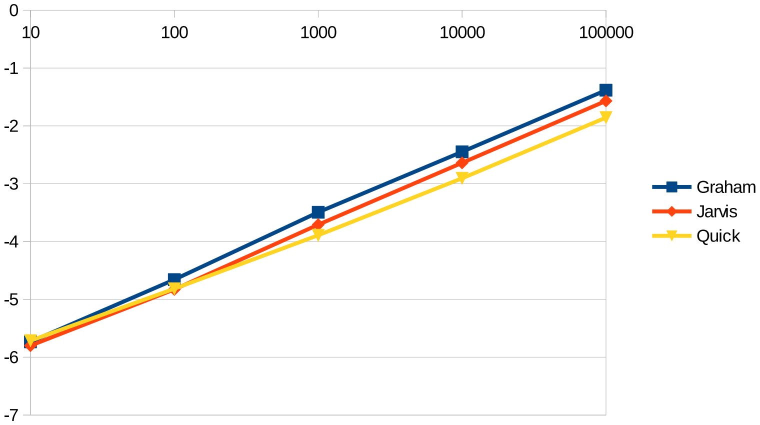
Krug - uniformno - logaritamsko vrijeme



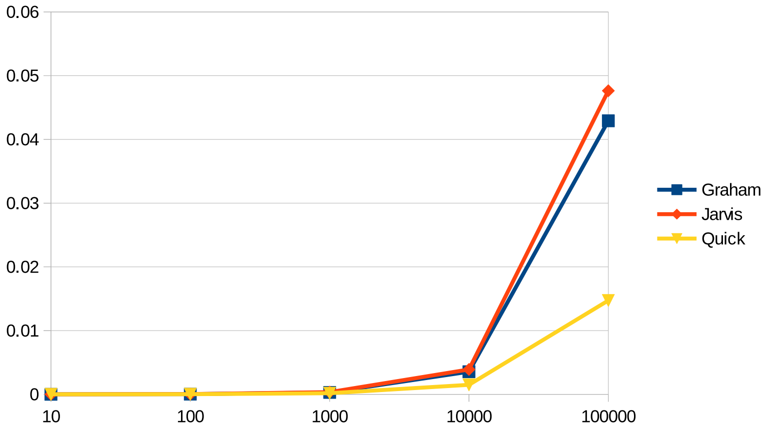
Krug - centar


0.045
0.04
0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
10
100
1000
10000
100000
Graham
Jarvis
Quick

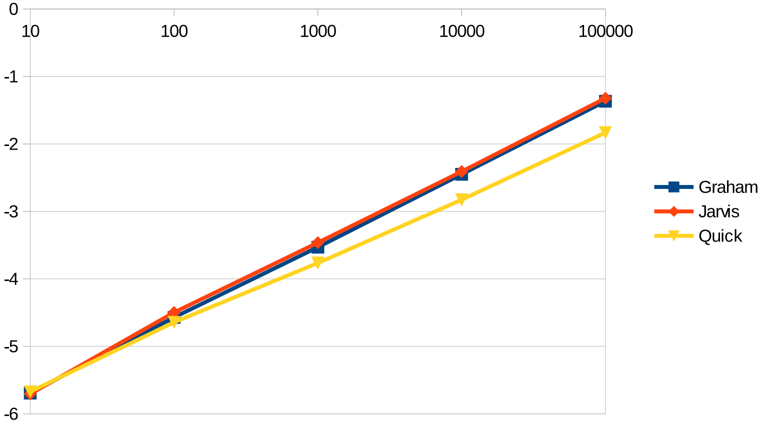
Krug - centar - logaritamsko vrijeme



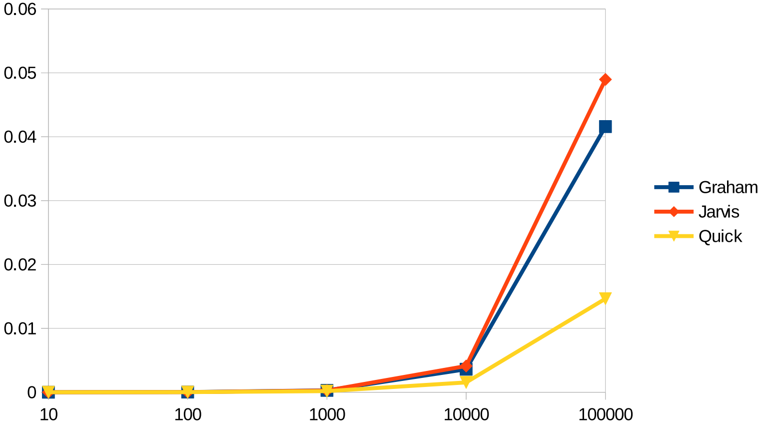
Kvadrat - vrhovi



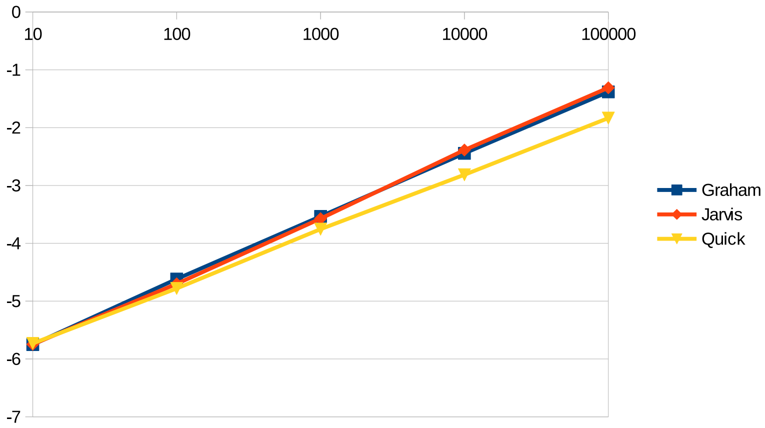
Kvadrat - vrhovi - logaritamsko vrijeme



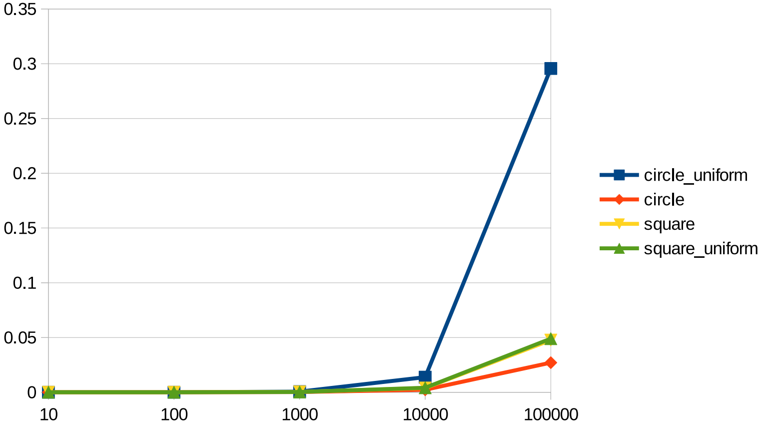
Kvadrat - uniformno



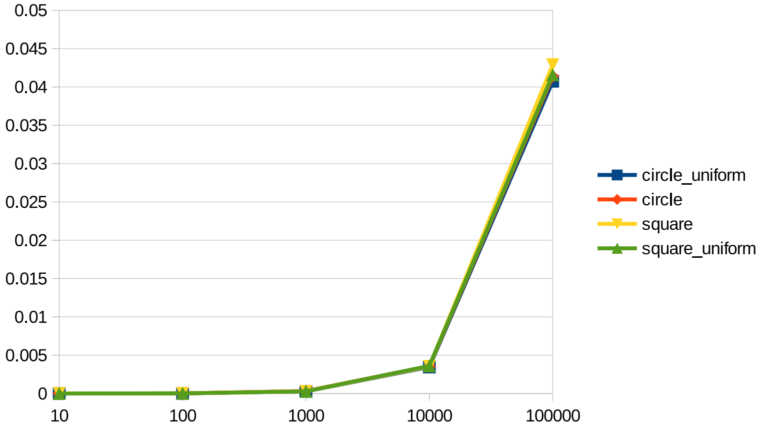
Kvadrat - uniformno - logaritamsko vrijeme



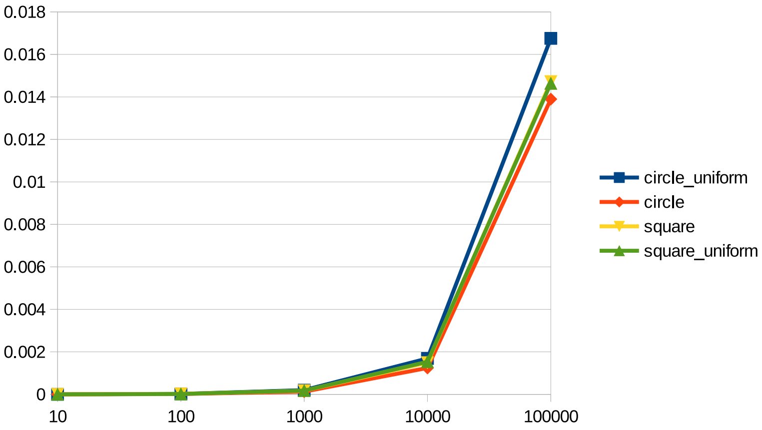
Jarvis's march kroz testove



Graham scan kroz testove



QuickHull kroz testove



Još o temi

Joseph O'Rourke
Computational geometry in C
Cambridge University Press, 1998.

de Berg, M., Cheong, O., van Kreveld, M., Overmars, M.
Computational Geometry
Algorithms and Applications, 3ed.
Springer, 2008.