

Oblikovanje i analiza algoritama

3. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Složenost u praksi — eksperimenti:
 - Uvod u eksperimente.
 - Mjerenje vremena i planiranje eksperimenata.
 - Parcijalne sume reda za $\ln 2$.
 - Ubrzanje algoritma za parcijalne sume alternirajućeg reda.
 - Zbrajanje matrica reda n .
 - Kratka priča o cache memoriji.
 - Množenje matrica reda n .
 - Blokovsko množenje matrica reda n .

Informacije — web stranica

Moja web stranica za Oblikovanje i analizu algoritama je

<https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/oaa/>

ili, skraćeno

<https://web.math.hr/~singer/oaa/>

Kopija je na adresi

<http://degiorgi.math.hr/~singer/oaa/>

Službena web stranica za Oblikovanje i analizu algoritama je

<https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/oaa/>

Informacije — kolokviji

Oblikovanje i analiza algoritama je u kolokvijskom razredu **B1**.

Službeni termini svih kolokvija su:

- Prvi kolokvij: srijeda, 22. 11. 2017., u 9 sati.
- Drugi kolokvij: srijeda, 31. 1. 2018., u 9 sati.
- Popravni kolokvij: srijeda, 14. 2. 2018., u 9 sati.

Uputa: “**izbjegnite**” popravni — obavite to **ranije!**

Uvod u eksperimente

Sadržaj — algoritmi, složenost, poboljšanja

Model složenosti i eksperimentalna provjera modela na

• tri jednostavna (iterativna) algoritma sa složenostima različitih redova veličina:

- Parcijalne sume reda za $\ln 2$ — složenost $\Theta(n)$;
- Zbrajanje matrica reda n — složenost $\Theta(n^2)$;
- Množenje matrica reda n — složenost $\Theta(n^3)$.

Uz analizu rezultata eksperimenta, napraviti ćemo još i

- ubrzanje izloženih algoritama (kad ide):
 - Brzo i točno računanje sume za $\ln 2$;
 - Hijerarhijska građa memorije i pristup podacima;
 - Cache memorija i uloga;
 - Blok-algoritmi za iskorištavanje cachea;

Model složenosti

U svakom od **tri** algoritma koje ćemo napraviti

- **elementarne** operacije su **osnovne aritmetičke** operacije na realnim brojevima (tzv. “**floating-point**” operacije, IEEE tip double).

Ključna pretpostavka za **model** složenosti je:

- **trajanje** tih operacija **ne ovisi** o **operandima**.

Dakle, složenost ovih algoritama mjerimo

- **brojem floating-point** operacija.

Napomena. Gornja pretpostavka **ne znači** da je **trajanje** floating-point operacija **konstantno**.

- Upravo to ćemo **testirati!**

Model složenosti (nastavak)

Prvi korak — brojanje.

Jednostavnim prebrojavanjem ovih operacija dolazimo do

- ukupnog broja floating-point operacija,
- u funkciji odabranog parametra n , koji mjeri veličinu problema.

Oznaka:

$F(n)$ = neka funkcija od n .

Slovo F asocira na “Flops”, što je kratica za “floating-point operations” (ali ne “per second”).

Dakle, samo broj operacija, a ne brzina izvođenja.

Model složenosti (nastavak)

Drugi korak — brzina.

Kad bi brzina c izvođenja floating-point operacija bila konstantna,

- recimo, $c = 3$ Gigaflopsa, tj. $3 \cdot 10^9$ floating-point operacija u sekundi,

onda bi vremenska složenost $T(n)$ bila

$$T(n) = \frac{F(n)}{c},$$

iz $F(n) = c \cdot T(n)$ (broj operacija je brzina puta vrijeme).

A to lako možemo eksperimentalno provjeriti.

Model složenosti (nastavak)

Treći korak — mjerenje vremena i brzine.

Ako programskom “štopericom”

- izmjerimo vremensku složenost $T(n)$,
- i to za razne vrijednosti od n ,

onda brzinu izvođenja operacija c možemo odrediti kao funkciju od n , iz modela

$$c(n) = \frac{F(n)}{T(n)}.$$

Iz tablica ili grafova vrijednosti $c(n)$ lako je provjeriti je li to konstantno ili ne.

Što testiramo?

Naš **eksperiment** se svodi na

- **mjerenje brzine** izvršavanja algoritma (odnosno, njegovih osnovnih operacija) u **funkciji** od n .

Pa da vidimo!

Napomena. Za **male** vrijednosti od n

- **vrlo je teško** dovoljno **tačno** mjeriti vremena $T(n)$.

Rezolucija timera je, uglavnom, fiksna — i ima **veliki** korak.

Tipične vrijednosti su $\geq 10^{-3}$ s, na pr. ≈ 0.06 s.

- Razmislite kako biste algoritamski našli korak rezolucije!

Dakle, čitav eksperiment treba relativno **pažljivo** isplanirati, da bismo dobili iole **razumne rezultate**.

Kako testiramo (mjerimo vrijeme)?

Realizacija: za svaki fiksni n

- “isti” posao ponavljamo u petlji puno puta,
- a vrijeme mjerimo jednom, za cijelu petlju.

To, naravno, nije isto kao bez ponavljanja, ali je jedino praktično izvedivo!

Neka je $N(n)$ izabrani broj ponavljanja posla, za dani n .

Brzinu $c(n)$ računamo iz

$$c(n) = \frac{N(n) \cdot F(n)}{T(N(n) \text{ puta ponovi posao za } n)}.$$

Što želimo dobiti?

Prije nego što “vidimo” rezultate na **nekom** konkretnom računalu,

- **nije** baš jasno da ćemo dobiti nešto “**zanimljivo**”.

Hoćemo, hoćemo — obećavam! Bit' će **zanimljivi** i na **jednom** računalu.

Dakle, čemu još rezultati mogu **poslužiti**?

Ovako dobivene brzine $c(n)$, naravno,

- **bitno** ovise o **brzini** računala na kojem testiramo.

Zato je **zgodno** test napraviti na

- nekoliko **raznih** računala i **usporediti** rezultate.

Svrha eksperimenta (nastavak)

Osim za **usporedbu računala**, stvar može poslužiti i za

- **usporedbu** različitih programskih produkata, na pr. **compilera**, kao odgovor na pitanje:
 - **koliko efikasan** kôd generiraju, posebno s raznim **opcijama**?

Zato cijeli **eksperiment** radimo na

- **nekoliko** računala,
- a usput ćemo usporediti i **dva** FORTRAN compilera s **različitim** opcijama za optimizaciju.

“Zvjerinjak” (računala)

Napomena: cijeli eksperiment je proveden 2005–2006. godine.

“Stradalnici” u eksperimentu su (ukratko):

- Pentium 3 na 500 MHz, zvani Klamath5, rođen 1998., (originalno imao Pentium 2 na 333 MHz);
- Pentium 4 na 3.0 GHz, zvani Veliki, rođen 2003., (danas ima P4 na 3.2 GHz);
- Pentium 4/660 na 3.6 GHz, zvan(a) BabyBlue, rođen(a) 2005., “skurena” silnim eksperimentima;
- ovaj notebook s Pentium 4 Mobile na 2.2 GHz, rođen 2003.

Podrobnije “osobne iskaznice” slijede!

***FORTRAN** compileri i opcije*

Zašto **FORTRAN** (i to 77)?

- Zato što je to, još uvijek, **osnovni jezik** za **numeričko** računanje (recimo, **BLAS** je originalno napisan u FORTRANu),
- i zato što imam tzv. **MKL** (Math Kernel Library) koji se zove iz FORTRANa.

FORTRAN **compileri** u testu:

- **Compaq** Visual Fortran, verzija 6.6C3 (konačna), oznaka **CVF**,
- **Intel** Visual Fortran, verzije razne, oznaka **IVF**.

***FORTTRAN** compileri i opcije (nastavak)*

Opcije za **optimizaciju**:

- **puna** optimizacija, skraćeno “**fast**”:
 - `/optimize:5` za **CVF**,
 - `/fast` za **IVF**.
- **normalna** optimizacija, bez posebnih opcija, skraćeno “**normal**”.

Parcijalne sume reda

Parcijalne sume reda za $\ln 2$

Problem: Zadan je prirodni broj $n \in \mathbb{N}$. Treba izračunati n -tu parcijalnu sumu alternirajućeg reda za $\ln 2$

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{1}{i} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

Ovu **sumu** računamo na **dva** načina:

- zbrajanjem **unaprijed**,
- zbrajanjem **unatrag**.

Zbrajanje unaprijed

```
subroutine sumfwd (n, sum, cumsum)
c
c Forward sum of ln2 alternat. series, n terms.
c
c   implicit none
c
c   integer n
c   double precision sum, cumsum
c
c   integer i, nn
c
c   I loop, inner
c
```

Zbrajanje unaprijed (nastavak)

```
nn = n
sum = 0.0d0
do 10, i = 1, nn
    if (mod(i, 2) .eq. 1) then
        sum = sum + 1.0d0 / i
    else
        sum = sum - 1.0d0 / i
    end if
10  continue
cumsum = cumsum + sum
c
return
end
```

Zbrajanje unatrag, kumulativna suma

Potprogram dobivamo zamjenom **petlje unaprijed**:

```
do 10, i = 1, nn
```

sljedećom **petljom unatrag**:

```
do 10, i = nn, 1, -1
```

Sve ostalo (osim imena potprograma) ostaje isto.

Svrha **kumulativne** sume **cumsum** je “**prijevara**” optimizacije,

- zato da optimizator **ne makne** okolnu petlju za **ponavljanje** poziva.

Bez toga, svi pozivi daju **isto** \Rightarrow **invarijantni** su na tu petlju!

Broj operacija

U svakom prolazu kroz petlju imamo **dvije** operacije

- **dijeljenje** s **i**,
- **zbrajanje** ili **oduzimanje**.

Tome treba dodati **jedno** zbrajanje na dnu, izvan petlje, za tzv. **kumulativnu** sumu.

Dakle, ukupan **broj operacija** u **oba** algoritma je:

$$F(n) = 2n + 1.$$

Broj **ponavljanja** je $N(n) = 10^9/n$, tako da dobijemo približno **konstantno** trajanje “**vanjske**” petlje kojoj **mjerimo vrijeme** (one s ponavljanjem poziva).

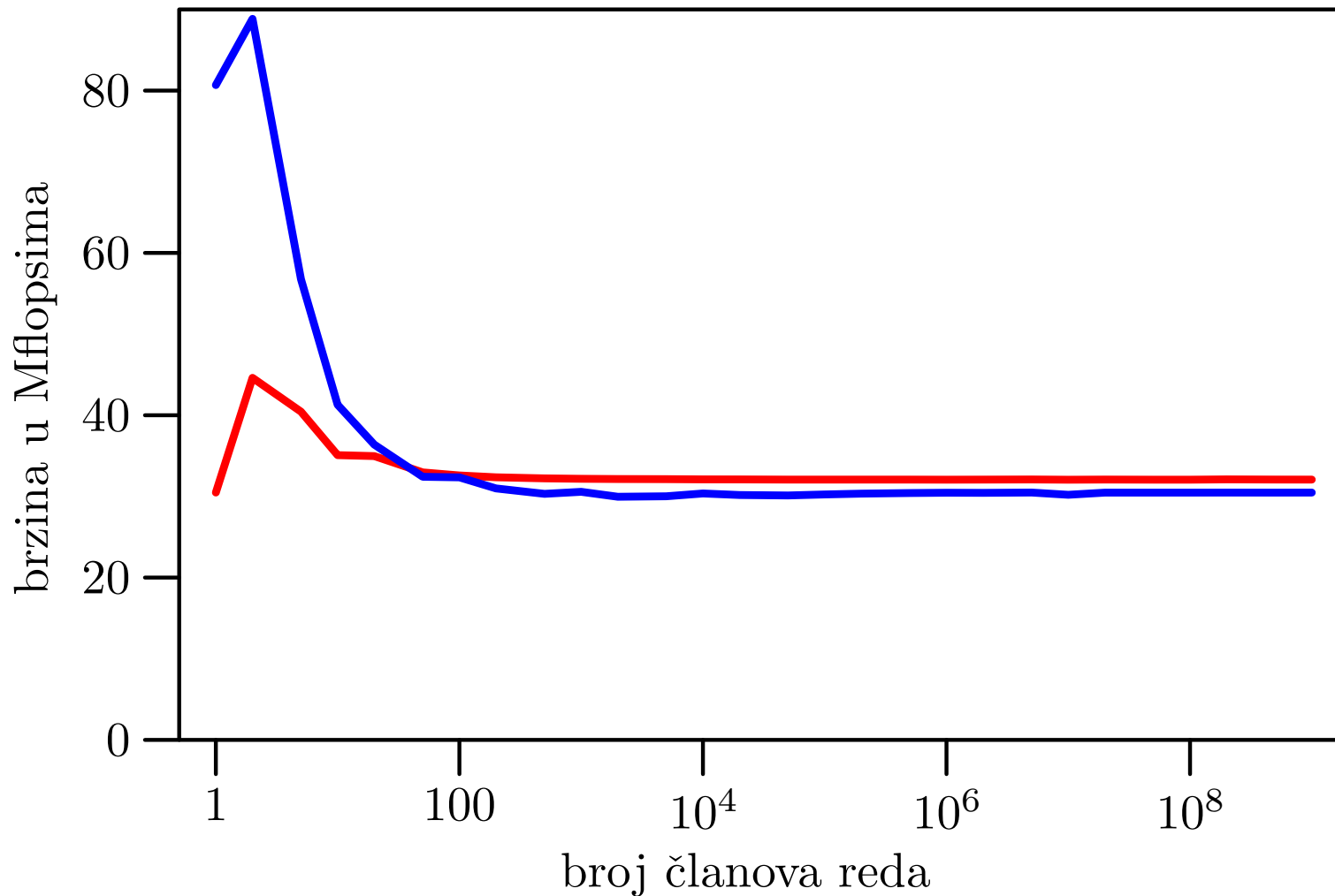
Boje na grafovima

Legenda za čitanje grafova:

- zbrajanje unaprijed — plavo, brže,
- zbrajanje unazad — crveno, sporije.

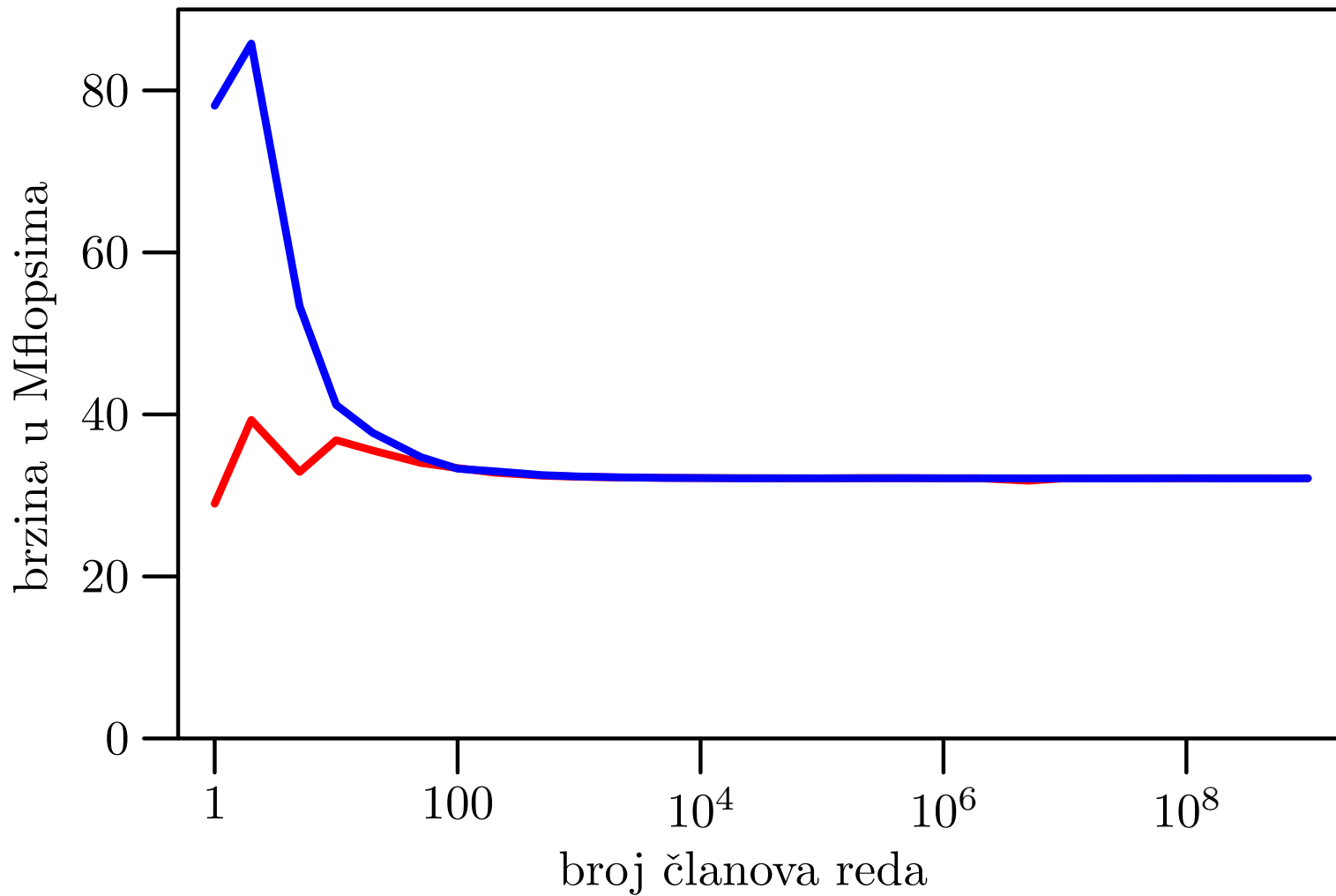
Klamath5, CVF, normal — unaprijed, unatrag

Pentium III, 500 MHz, CVF, normal – Suma reda za ln 2



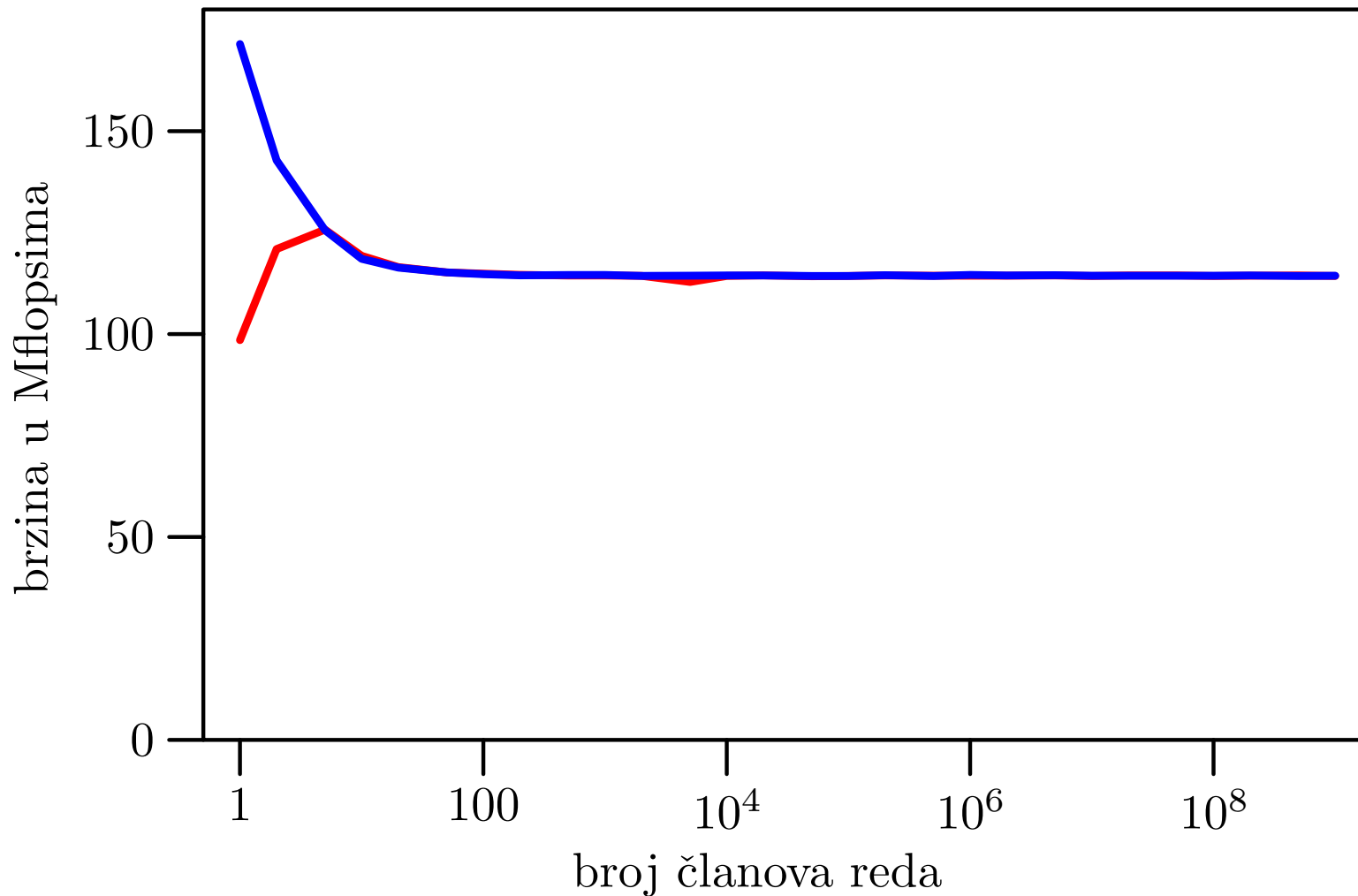
Klamath5, CVF, fast — unaprijed, unatrag

Pentium III, 500 MHz, CVF, fast – Suma reda za $\ln 2$



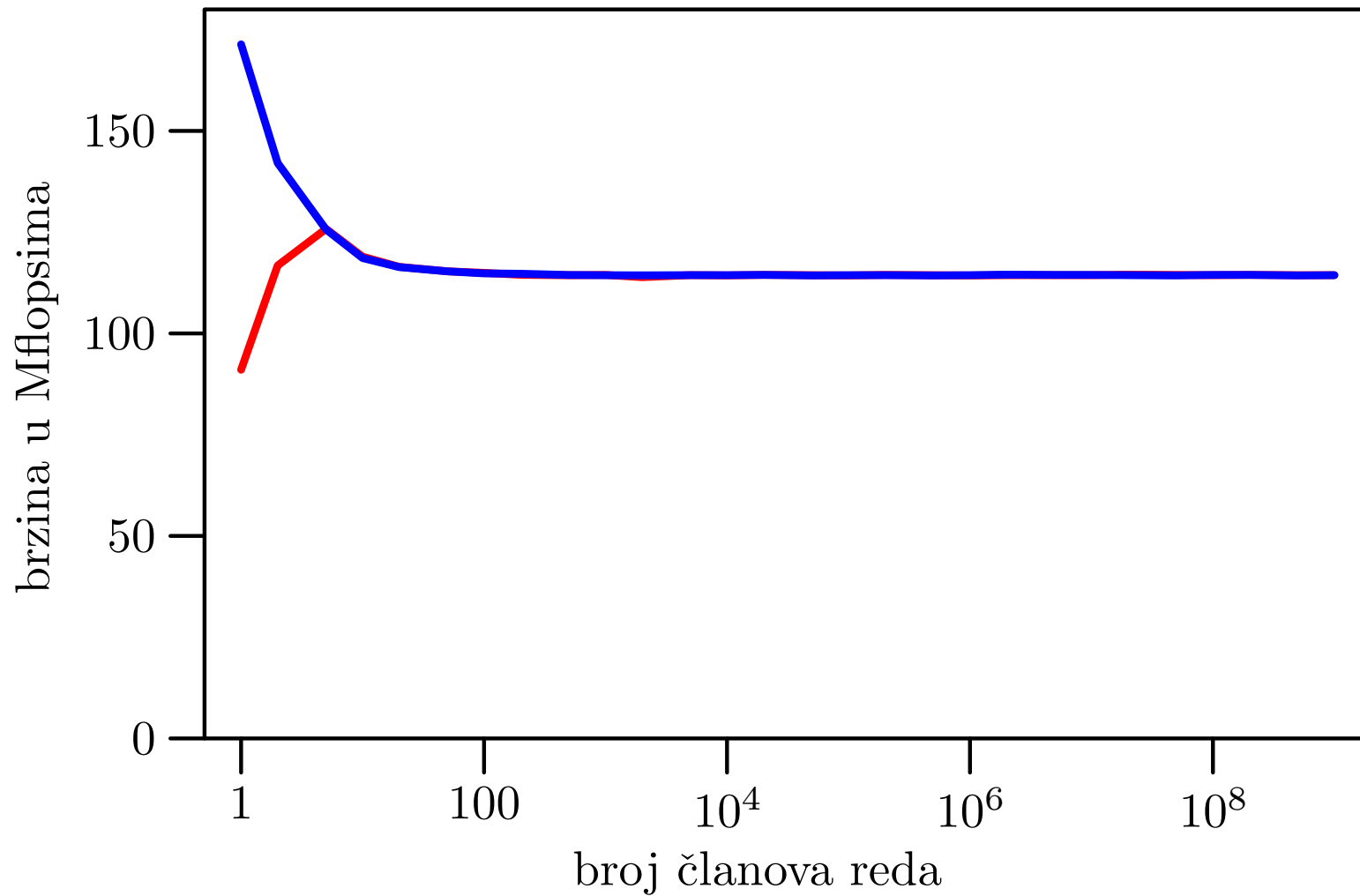
Notebook, CVF, normal — unaprijed, unatrag

Pentium 4 M, 2.2 GHz, CVF, normal – Suma reda za ln 2



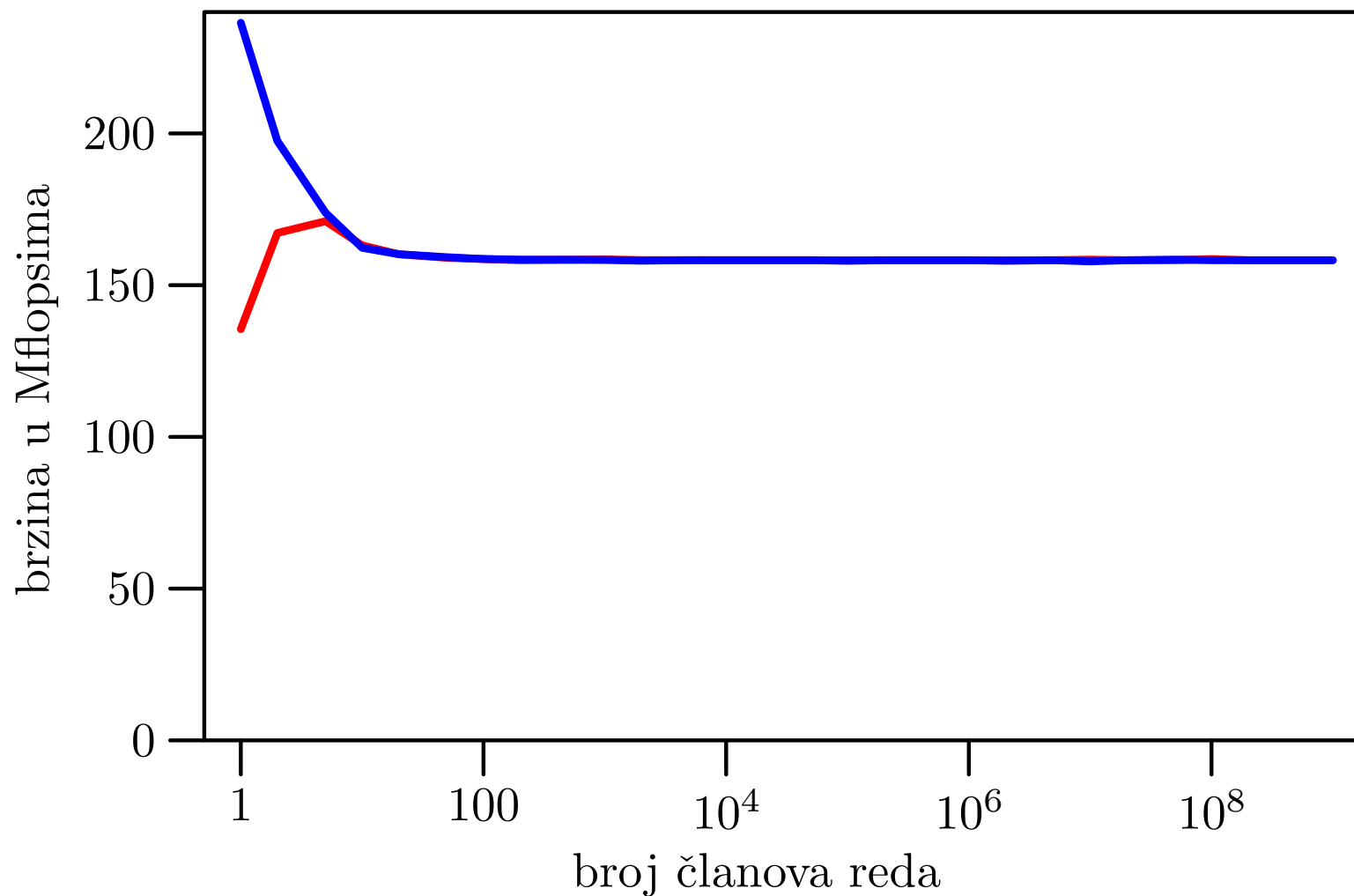
Notebook, CVF, fast — unaprijed, unatrag

Pentium 4 M, 2.2 GHz, CVF, fast – Suma reda za $\ln 2$



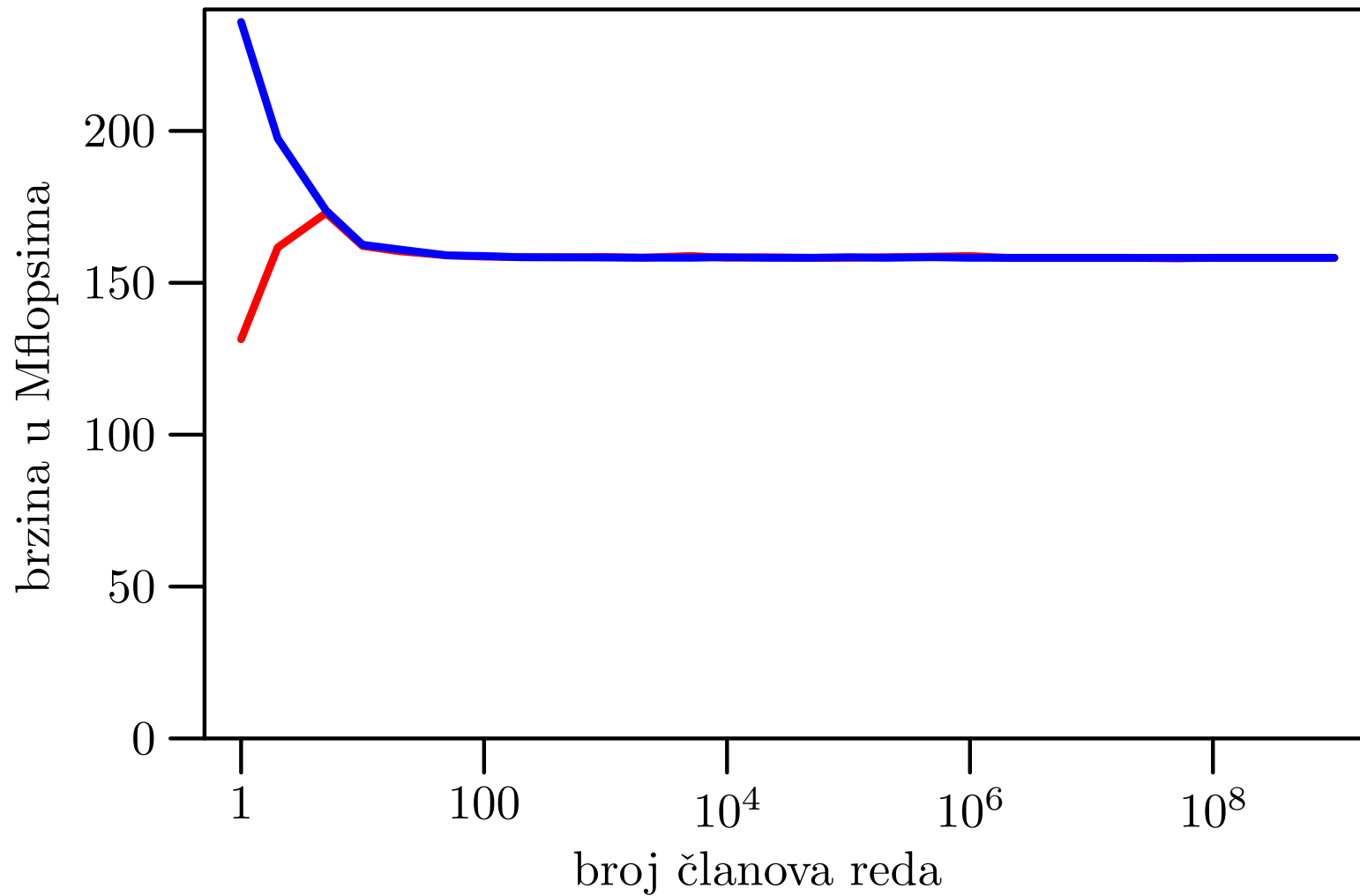
Veliki, CVF, normal — unaprijed, unatrag

Pentium 4, 3.0 GHz, CVF, normal – Suma reda za $\ln 2$



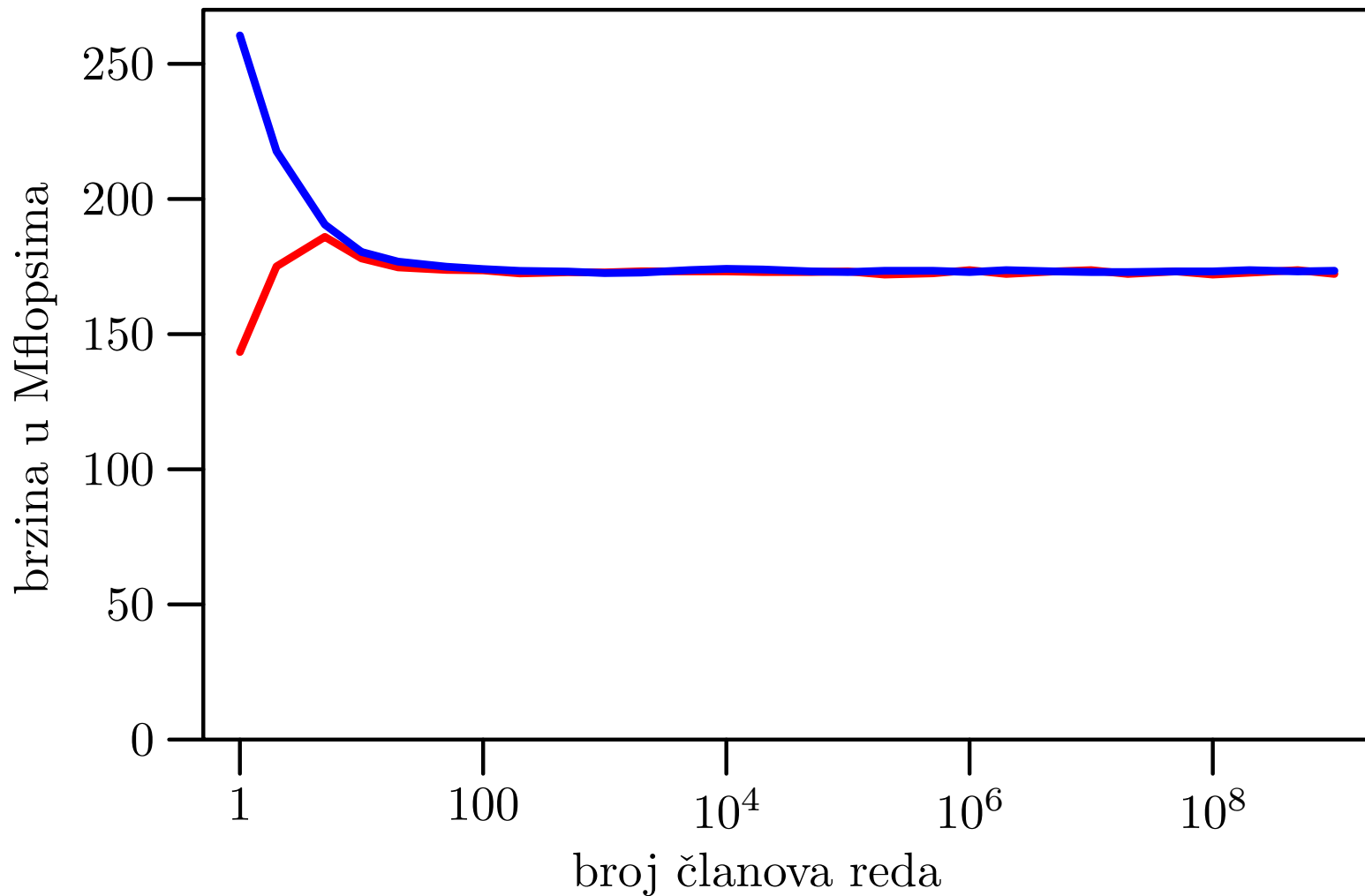
Veliki, CVF, fast — unaprijed, unatrag

Pentium 4, 3.0 GHz, CVF, fast – Suma reda za $\ln 2$



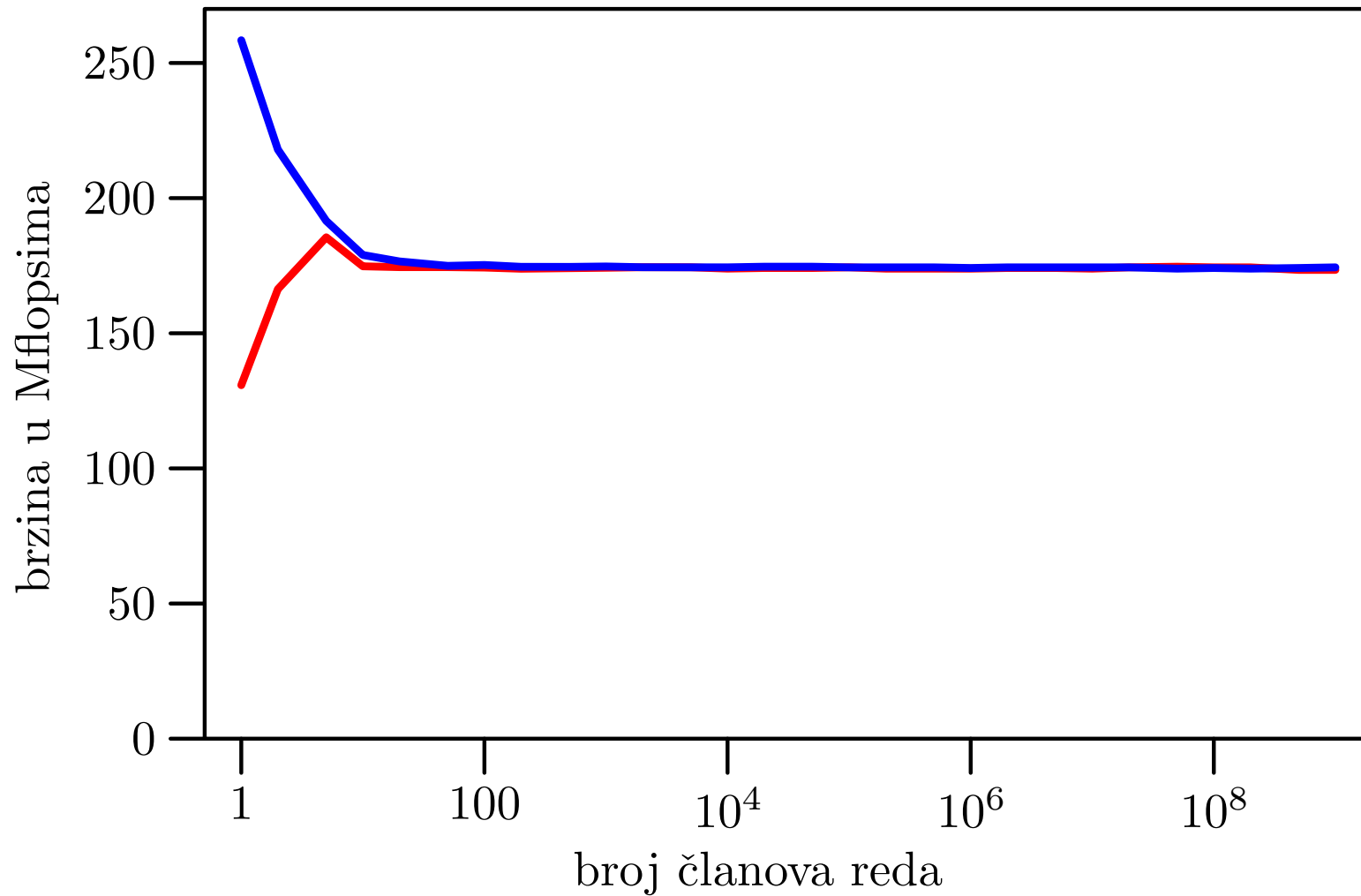
BabyBlue, CVF, normal — unaprijed, unatrag

Pentium 4/660, 3.6 GHz, CVF, normal – Suma reda za ln 2



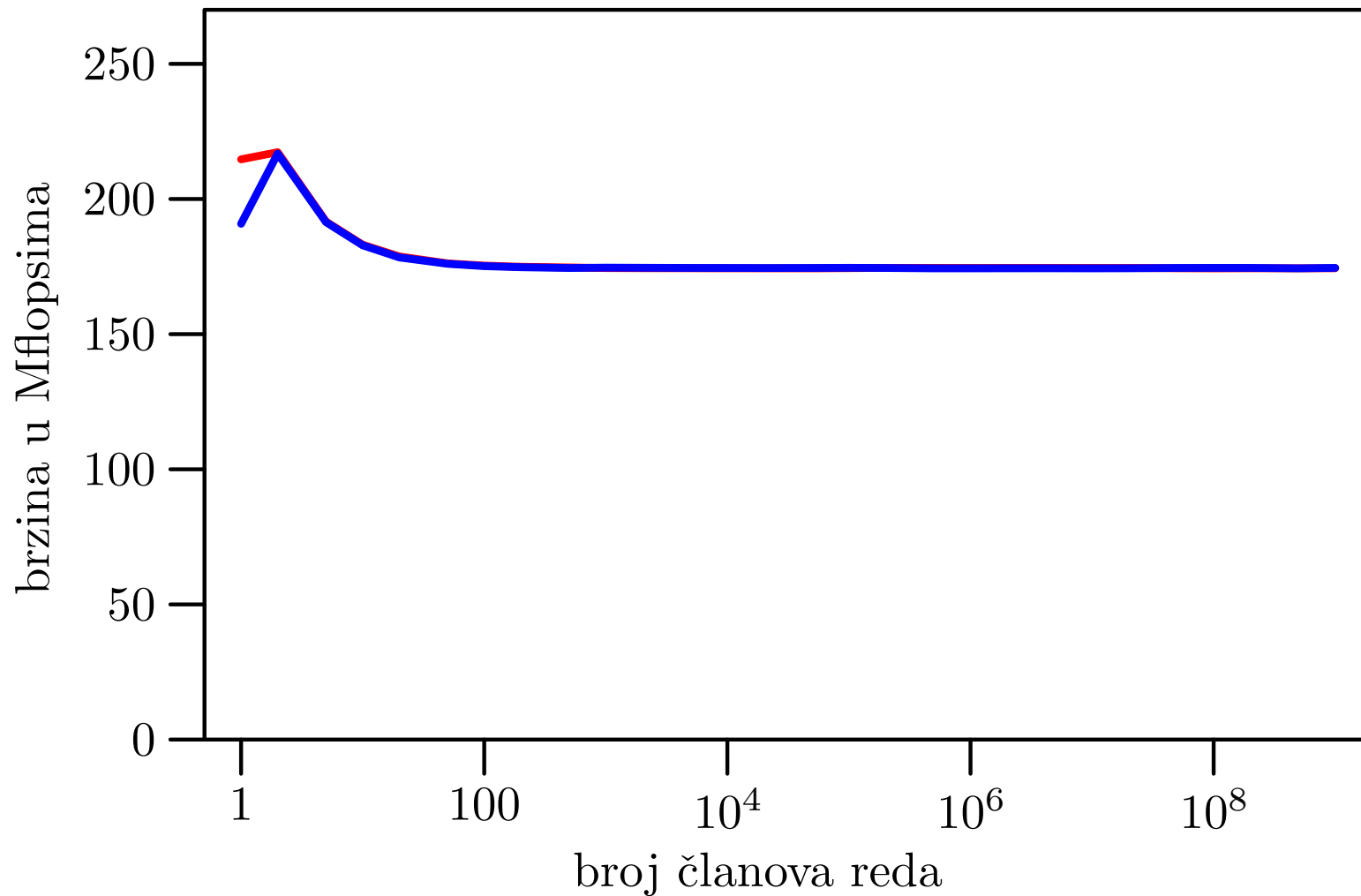
BabyBlue, CVF, fast — unaprijed, unatrag

Pentium 4/660, 3.6 GHz, CVF, fast – Suma reda za ln 2



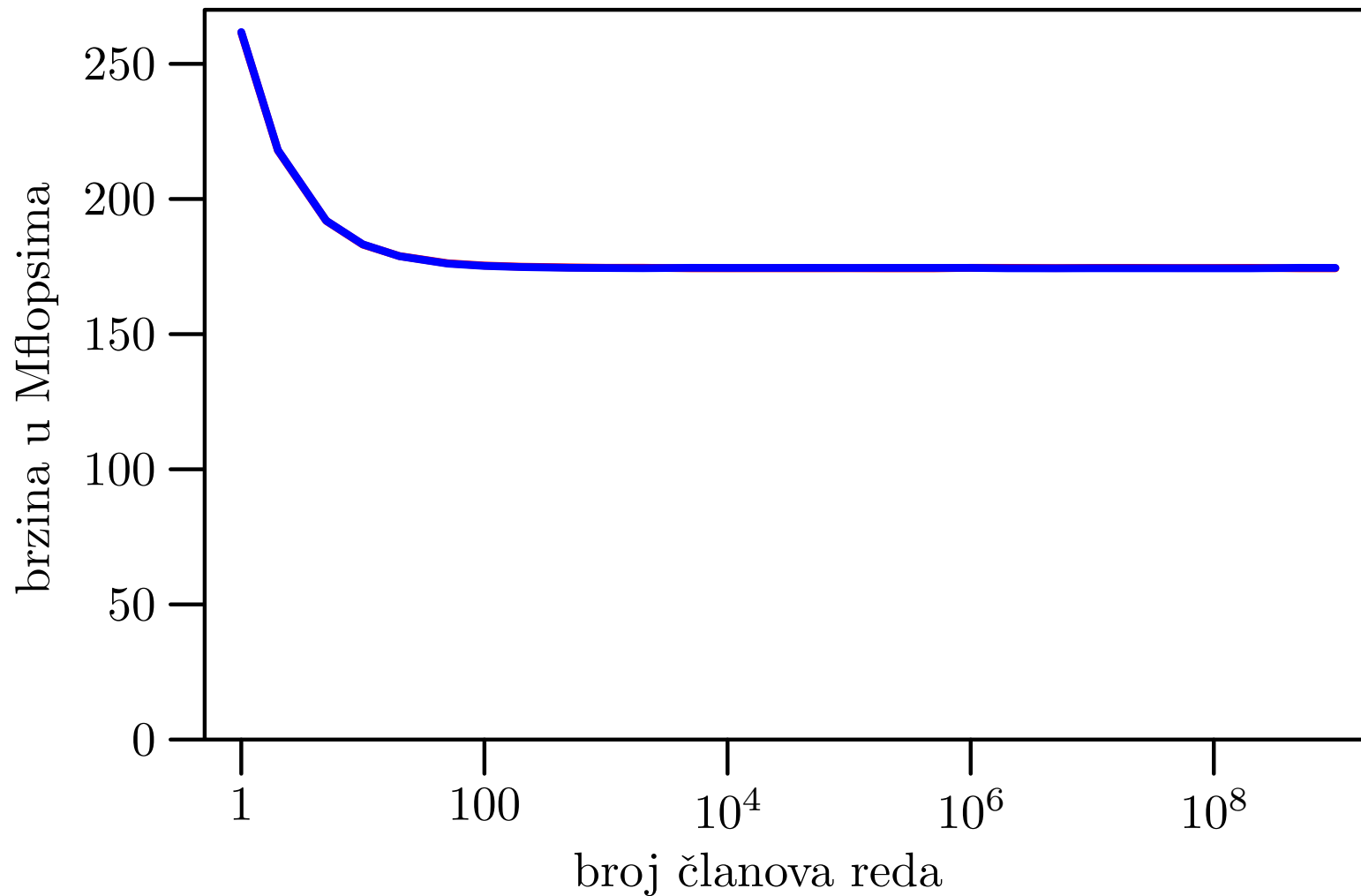
BabyBlue, IVF, normal — unaprijed, unatrag

Pentium 4/660, 3.6 GHz, IVF, normal – Suma reda za $\ln 2$



BabyBlue, IVF, fast — unaprijed, unatrag

Pentium 4/660, 3.6 GHz, IVF, fast – Suma reda za $\ln 2$



Tablica brzina za velike n

Vidimo da **nema** neke **razlike** u brzinama između:

- zbrajanja unaprijed i unazad,
- fast i normal opcija kompilera.

Usporedba brzina (u Mflops) za razna računala:

Računalo	Brzina
Klamath5	32.1
Notebook	114.4
Veliki	158.2
BabyBlue	174.4

Brzina raste **sporije** od frekvencije!

Komentar rezultata

Podatke o **brzinama** treba gledati **relativno** (za usporedbu), a **ne apsolutno** — i to samo za **velike n** .

Naš model složenosti (brojimo floating–point operacije)

$$F(n) = 2n + 1$$

je **poprilično neprecizan**. Zato dobijemo “**čudno**” ponašanje grafova **brzine** za **male n** .

Izmjerena **vremena** imaju puno “**pitomije**” ponašanje.

● Trajanje **vanjske** petlje **s ponavljanjem** je praktički **konstantno**, i dobivamo “**razuman**” broj u **sekundama**, što znači da smo **dobro** izabrali broj ponavljanja **$N(n)$** .

BabyBlue, IVF, fast — Izračunate brzine

n =	1	261.764	261.579
n =	2	218.102	217.972
n =	5	191.968	191.899
n =	10	183.223	183.125
n =	20	178.828	178.883
n =	50	176.088	176.221
...			
n =	10000000	174.385	174.506
n =	20000000	174.379	174.528
n =	50000000	174.376	174.462
n =	100000000	174.361	174.480
n =	200000000	174.360	174.523
n =	500000000	174.533	174.375
n =	1000000000	174.514	174.369

BabyBlue, IVF, fast — Izmjerena vremena

n =	1	11.461	11.469
n =	2	11.463	11.469
n =	5	11.460	11.464
n =	10	11.461	11.468
n =	20	11.464	11.460
n =	50	11.472	11.463
...			
n =	10000000	11.469	11.461
n =	20000000	11.469	11.459
n =	50000000	11.469	11.464
n =	100000000	11.470	11.463
n =	200000000	11.470	11.460
n =	500000000	11.459	11.470
n =	1000000000	11.460	11.470

Parcijalne sume reda

Ubrzanje algoritma

Leibnizov kriterij za alternirajuće redove

Zamislimo da je zadana tražena tačnost ε i treba naći sumu reda S , s greškom **manjom** od ε , tj. hoćemo

$$|S - S(n)| \leq \varepsilon.$$

Koliko članova treba zbrojiti? ($n = ?$)

Za **alternirajuće** redove

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} f_i, \quad f_i \text{ istog znaka,}$$

koristimo **Leibnizov** kriterij konvergencije:

- Ako članovi reda f_i **monotono** teže u **nulu**, onda
- red **konvergira**, suma S ima predznak **prvog** člana f_1 i vrijedi $|S| < |f_1|$.

Leibnizov kriterij za ocjenu greške

Kod nas je $f_i = 1/i$, pa red za $\ln 2$ zadovoljava pretpostavku za Leibnizov kriterij.

No, ako članovi reda f_i **monotono** teže u **nulu**, onda to **isto** vrijedi i za “**ostatak**” reda

$$S - S(n) = \sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^{i-1} f_i.$$

Zaključak: Greška $S - S(n)$ ima **predznak prvog zanemarenog člana** $(-1)^n f_{n+1}$ i vrijedi ocjena greške

$$|S - S(n)| < |f_{n+1}|.$$

Dakle, ako uzmemo n tako da je $|f_{n+1}| \leq \varepsilon$, onda je sigurno

$$|S - S(n)| < \varepsilon.$$

Brzina konvergencije reda za $\ln 2$

Konkretno, u redu za $\ln 2$, znamo da je $|\ln 2 - S(n)| < \varepsilon$, ako za **prvi zanemareni** član vrijedi

$$\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \quad \text{ili} \quad n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Ako želimo $\varepsilon = 10^{-18}$, onda treba uzeti $n = 10^{18}$ članova reda!

To će “**potrajati**” ...

- Znamo čak i koliko (v. tablicu) — oko $11.47 \cdot 10^9$ sekundi.
To je preko **300** godina!

Srećom, ima i puno **brži** način.

Ideja usrednjavanja parcijalnih suma

Greška $S - S(n)$ ima predznak prvog zanemarenog člana $(-1)^n f_{n+1}$ i još vrijedi ocjena greške $|S - S(n)| < |f_{n+1}|$.

No, članovi **alterniraju** po predznaku, pa onda

- greške **alterniraju** po predznaku, odnosno,
- parcijalne sume $S(n)$ “**osciliraju**” oko prave sume S (iznad–ispod–iznad–...).

Kad pogledamo dvije **susjedne** parcijalne sume $S(n)$ i $S(n+1)$ (jedna je **iznad** S , a druga **ispod**, ili obratno), odmah vidimo da je njihova **srednja vrijednost**

$$S(n, 1) := \frac{S(n) + S(n+1)}{2}$$

mного **bolja** aproksimacija za S — bar **2** puta **bolja** od $S(n)$.

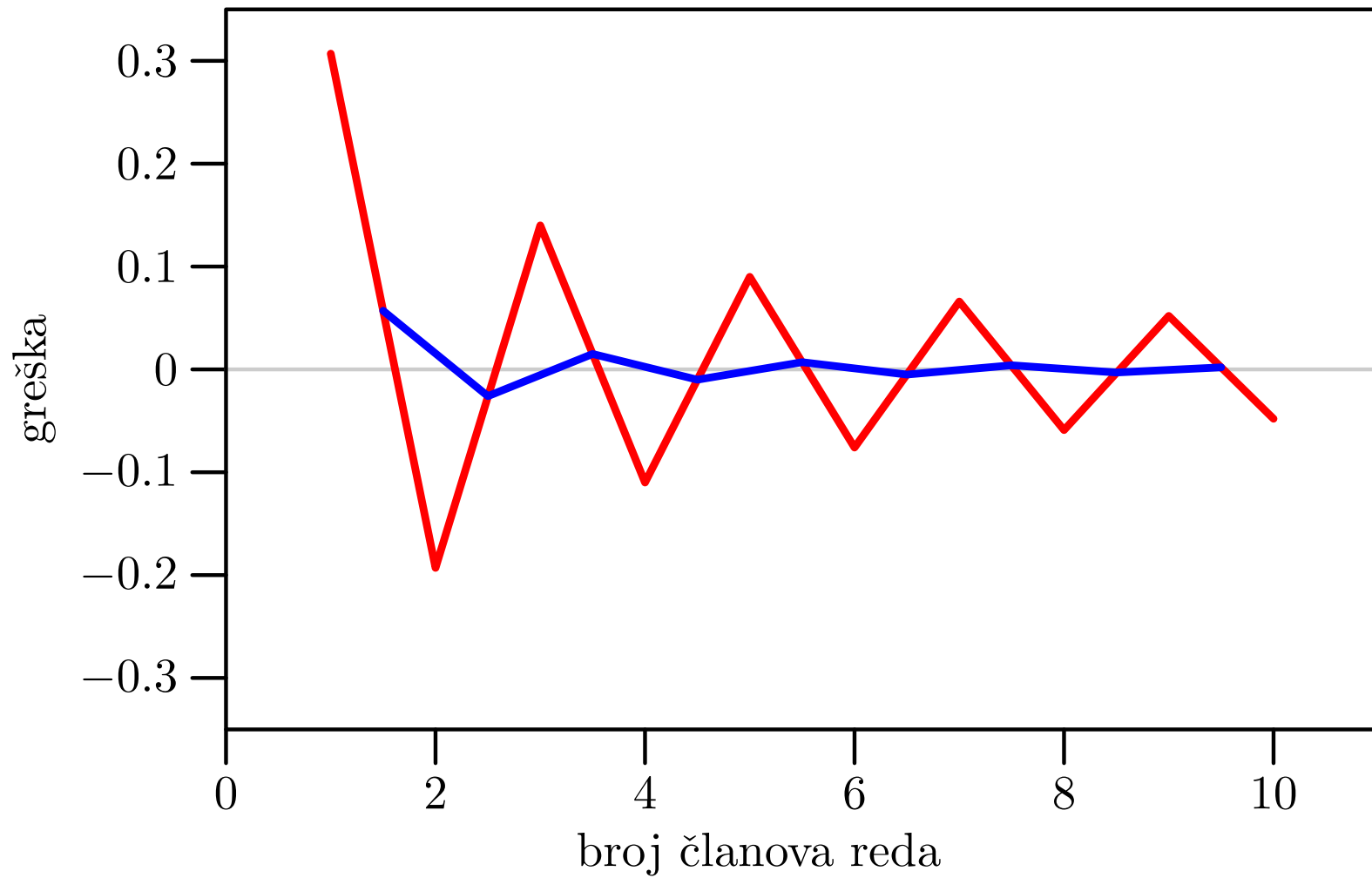
Greške nakon 0 usrednjanja

Broj usrednjanja = 0



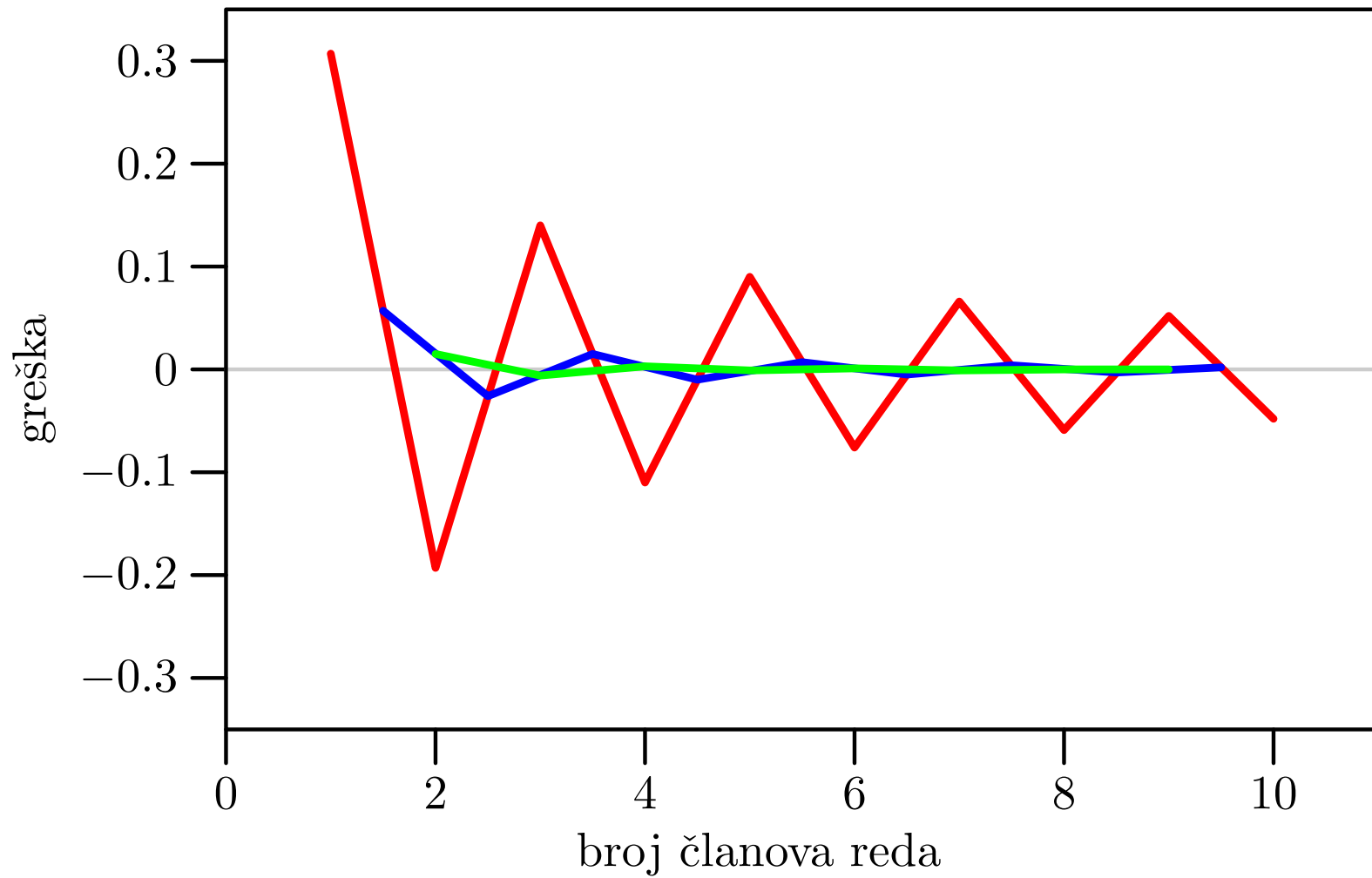
Greške nakon 1 usrednjanja

Broj usrednjanja = 1



Greške nakon 2 usrednjanja

Broj usrednjanja = 2



Ponovljeno usrednjavanje

Ako članovi polaznog reda “**ravnomjerno**” teže u **nulu**, tj.

- ako greške **usrednjenih** parcijalnih suma $S(n, 1)$ imaju **isti oblik** ponašanja kao i greške za $S(n)$,

onda ima smisla **ponoviti** usrednjavanje (kao u primjeru)!

Općenito, iz $k - 1$ -og niza, uz $S(n, 0) := S(n)$, **usrednjavanjem** dobivamo k -ti niz usrednjenih parcijalnih suma

$$S(n, k) := \frac{S(n, k - 1) + S(n + 1, k - 1)}{2}.$$

Iz N članova polaznog reda možemo izračunati **trokutastu** tablicu usrednjenih parcijalnih suma

$$S(n, k), \quad n = 1, \dots, N - k, \quad k = 0, \dots, N - 1.$$

Tablica grešaka nakon 9 usrednjavanja

Vrijednosti grešaka $S - S(n, k)$ za prvih $N = 10$ članova reda:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-0.307	0.193	-0.140	0.110	-0.090	0.076	-0.066	0.059	-0.052	0.048
1	-0.057	0.026	-0.015	0.010	-0.007	0.005	-0.004	0.003	-0.002	
2	-0.015	0.006	-0.003	0.001	-0.001	0.001	-0.000	0.000		
3	-0.005	0.001	-0.001	0.000	-0.000	0.000	-0.000			
4	-0.002	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000				
5	-0.001	0.000	-0.000	0.000	-0.000					
6	-0.000	0.000	-0.000	0.000						
7	-0.000	0.000	-0.000							
8	-0.000	0.000								
9	-0.000									

Ocjena greške, algoritam, ubrzanje, Madelung — v. [alt_red](#).

Kad je usrednjavanje dobro?

U prijevodu — što znači da

- članovi polaznog reda “**ravnomjerno**” teže u **nulu**?

Članovi reda f_i (bez znaka) su vrijednosti $f_i = f(i)$, $i \in \mathbb{N}$, tzv. **potpuno monotone** funkcije f — one za koju vrijedi:

- $f \in C[1, \infty)$, tj. f je neprekidna na $[1, \infty)$,
- $f \in C^\infty(1, \infty)$, tj. f je beskonačno puta derivabilna,
- derivacije od f su **fiksnog** znaka i ti predznaci **alterniraju**, tj. $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$, za $x \geq 1$ i za svaki $k = 0, 1, 2, \dots$

U redu za $\ln 2$ je $f(x) = 1/x$ — očito je potpuno monotona.

Što **sporije** konvergira polazni red, to je **usrednjavanje bolje!**

Zbrajanje matrica

Zbrajanje matrica

Problem: Zadan je prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ i 3 realne matrice A , B i C , reda n . Treba izračunati izraz

$$C := C + A + B.$$

Akumulacija (“nazbrajavanje”) zbroja $A + B$ u matrici C ovdje ima samo jednu svrhu:

🔴 “prevariti” optimizaciju kompilera, kod višestrukog ponavljanja eksperimenta.

Ova realizacija napravljena je po ugledu na množenje matrica (v. kasnije).

Zbrajanje matrica — formula

“Matematička” realizacija **matrične** operacije

$$C := C + A + B$$

po **elementima** je trivijalna:

$$c_{ij} := c_{ij} + a_{ij} + b_{ij},$$

za sve indekse

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$$

Dakle, “programski” — treba “zavrtiti” **dvije** petlje.

Zbrajanje matrica — potprogram

```
subroutine addij (lda, n, a, b, c)
c
c Matrix addition
c  $C(n, n) = C(n, n) + A(n, n) + B(n, n)$ .
c
c   implicit none
c
c   integer lda, n
c   double precision a(lda, lda), b(lda, lda),
c   $               c(lda, lda)
c
c   integer i, j, nn
```

Zbrajanje matrica — potprogram (nastavak)

```
c
c   IJ loop, inner
c
      nn = n
      do 20, i = 1, nn
        do 10, j = 1, nn
          c(i, j) = c(i, j) + a(i, j) + b(i, j)
10      continue
20    continue
c
      return
      end
```

Permutacija petlji

Prvu varijantu zovemo **ij** — po **poretku** (indeksa) petlji, **izvana** prema **unutra**.

Ove **dvije** petlje možemo **permutirati**, tj. zamijeniti im poredak, pa dobivamo **ji** varijantu:

```
c
c   JI loop, inner
c
      nn = n
      do 20, j = 1, nn
        do 10, i = 1, nn
          c(i, j) = c(i, j) + a(i, j) + b(i, j)
10          continue
20        continue
```

Broj operacija

U svakom prolazu kroz unutarnju petlju imamo dvije operacije
• zbrajanja matričnih elemenata.

Obje petlje imaju (svaka) točno n prolaza.

Dakle, ukupan broj operacija u obje varijante algoritma je:

$$F(n) = 2n^2.$$

Broj ponavljanja $N(n)$ izabran je tako da dobijemo približno konstantno trajanje “okolne” petlje (s ponavljanjem) kojoj mjerimo vrijeme.

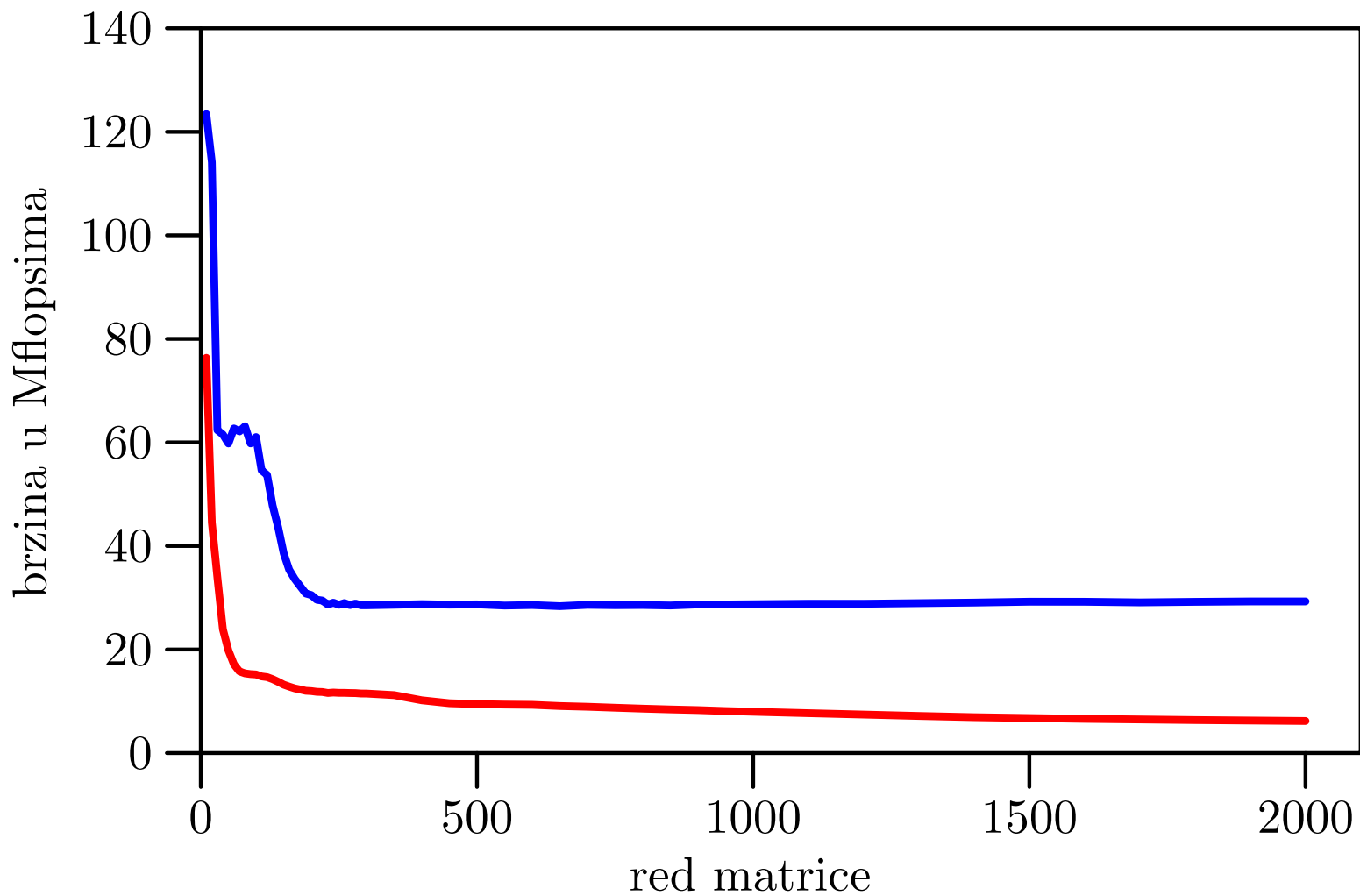
Boje na grafovima

Legenda za čitanje grafova:

- petlja **ij** — **crveno**, sporo;
- petlja **ji** — **plavo**, brzo.

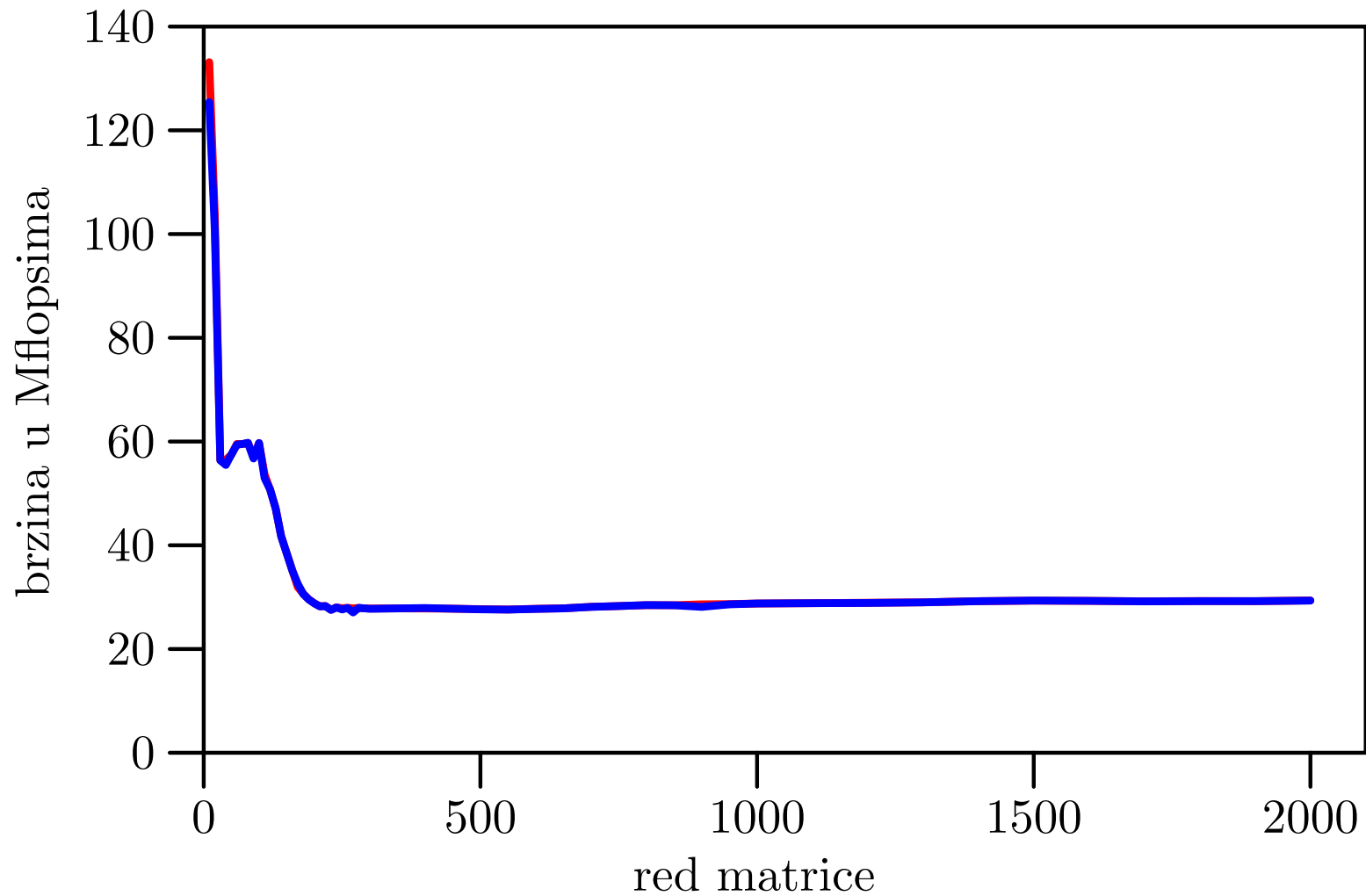
Klamath5, CVF, normal — ij , ji

Pentium III, 500 MHz, CVF, normal – Zbrajanje matrica



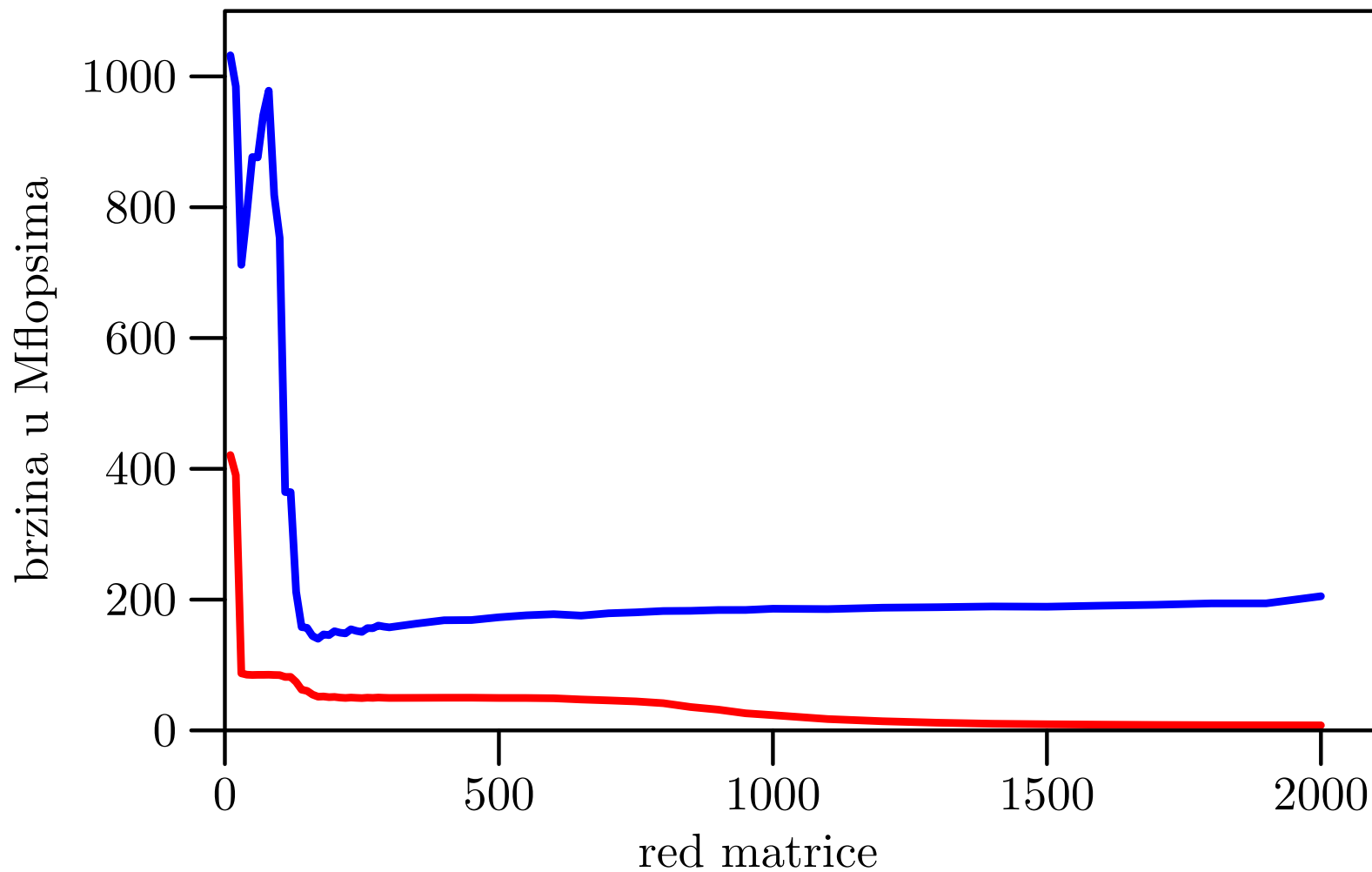
Klamath5, CVF, fast — ij , ji

Pentium III, 500 MHz, CVF, fast – Zbrajanje matrica



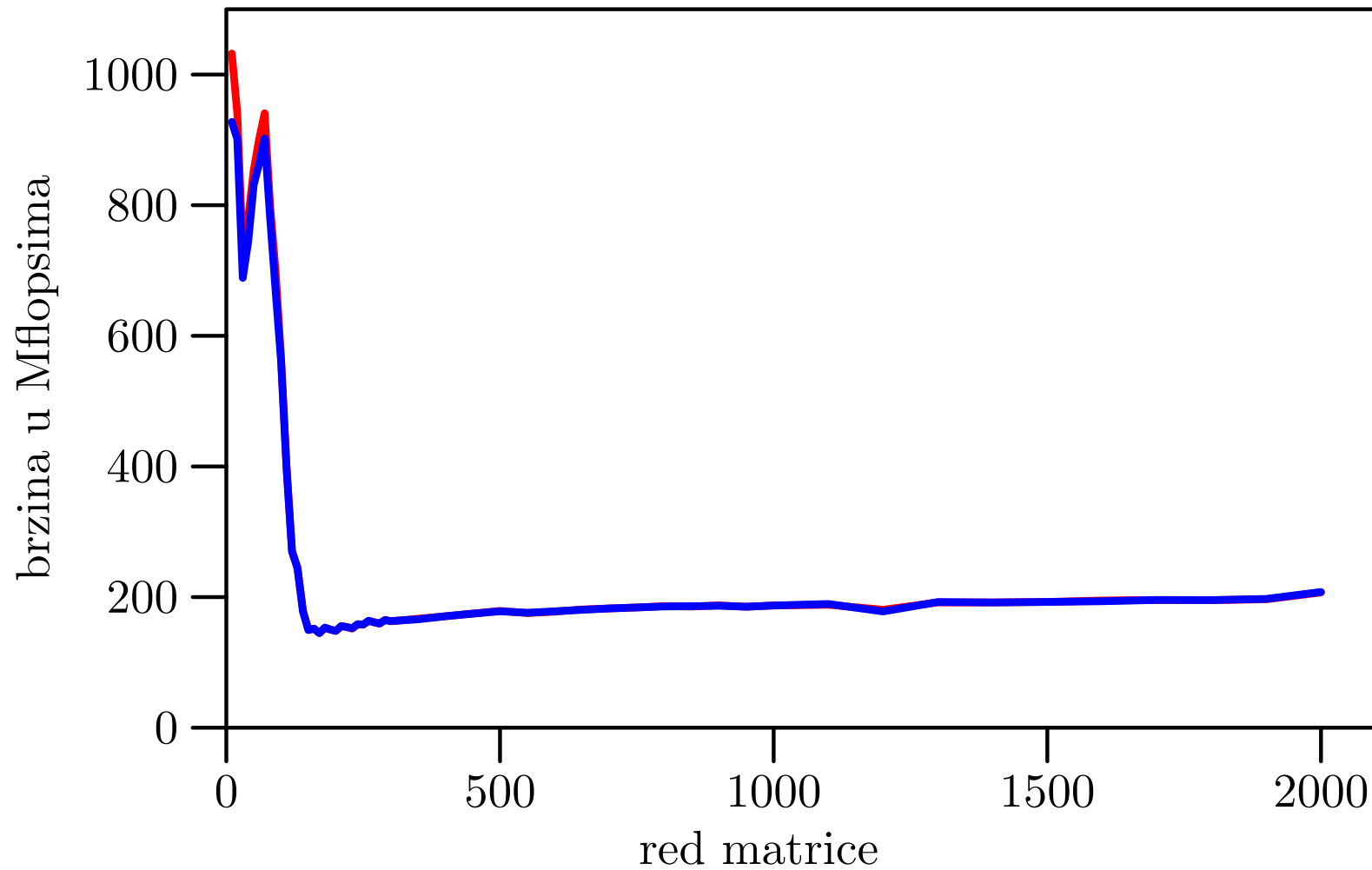
Veliki, CVF, normal — ij , ji

Pentium 4, 3.0 GHz, CVF, normal – Zbrajanje matrica



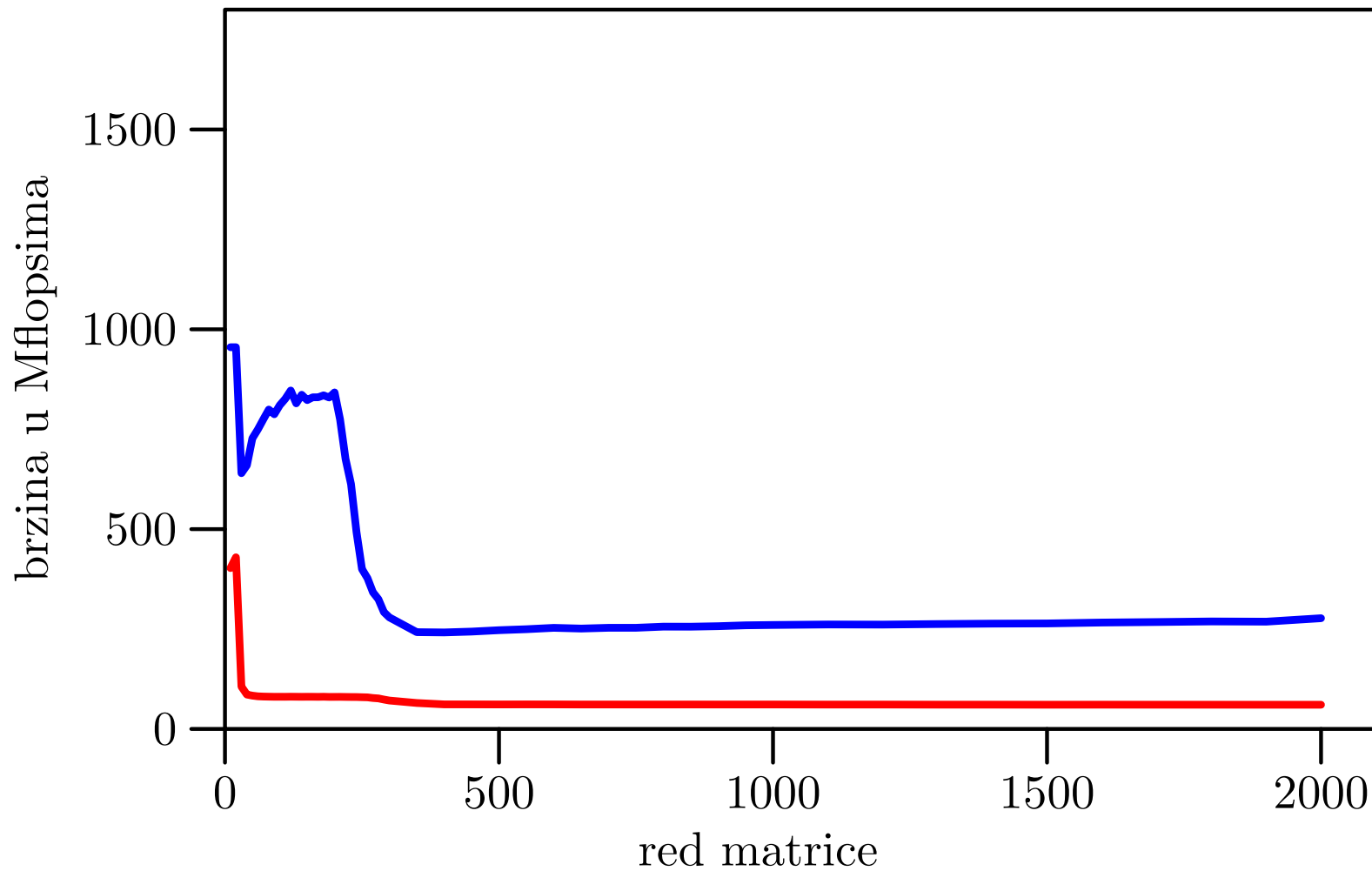
Veliki, CVF, fast — ij , ji

Pentium 4, 3.0 GHz, CVF, fast – Zbrajanje matrica



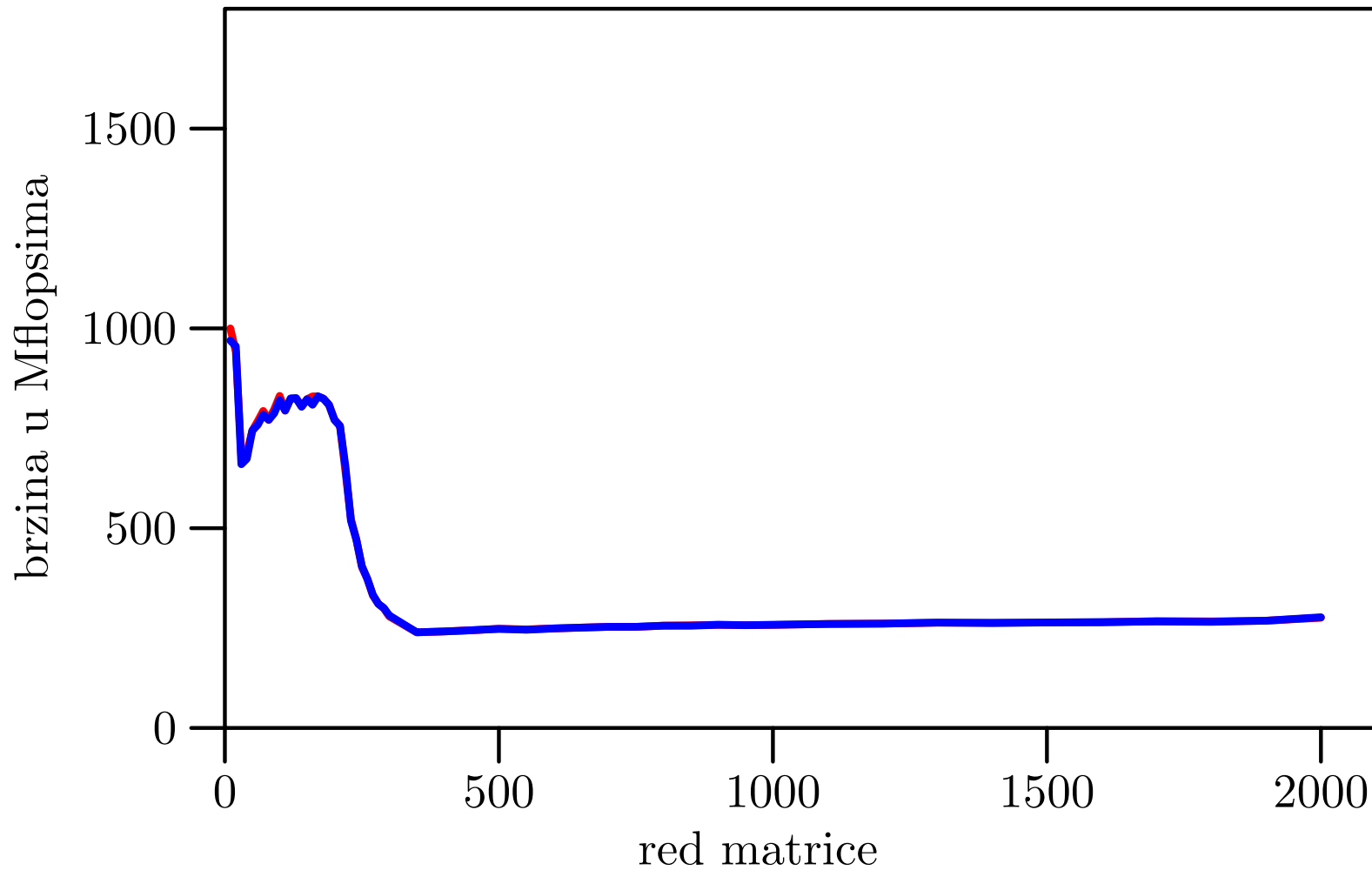
BabyBlue, CVF, normal — ij , ji

Pentium 4/660, 3.6 GHz, CVF, normal – Zbrajanje matrica



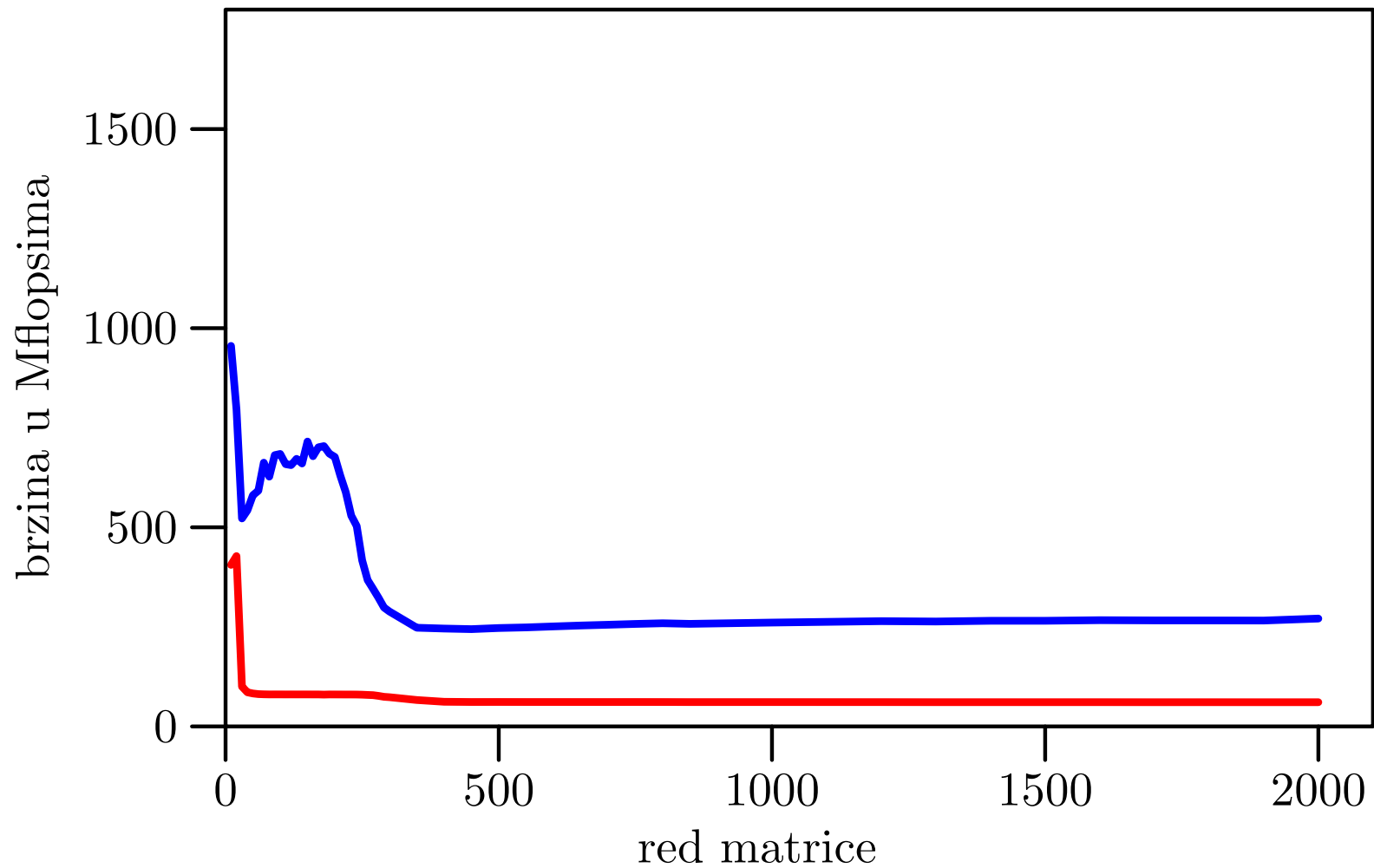
BabyBlue, CVF, fast — ij , ji

Pentium 4/660, 3.6 GHz, CVF, fast – Zbrajanje matrica



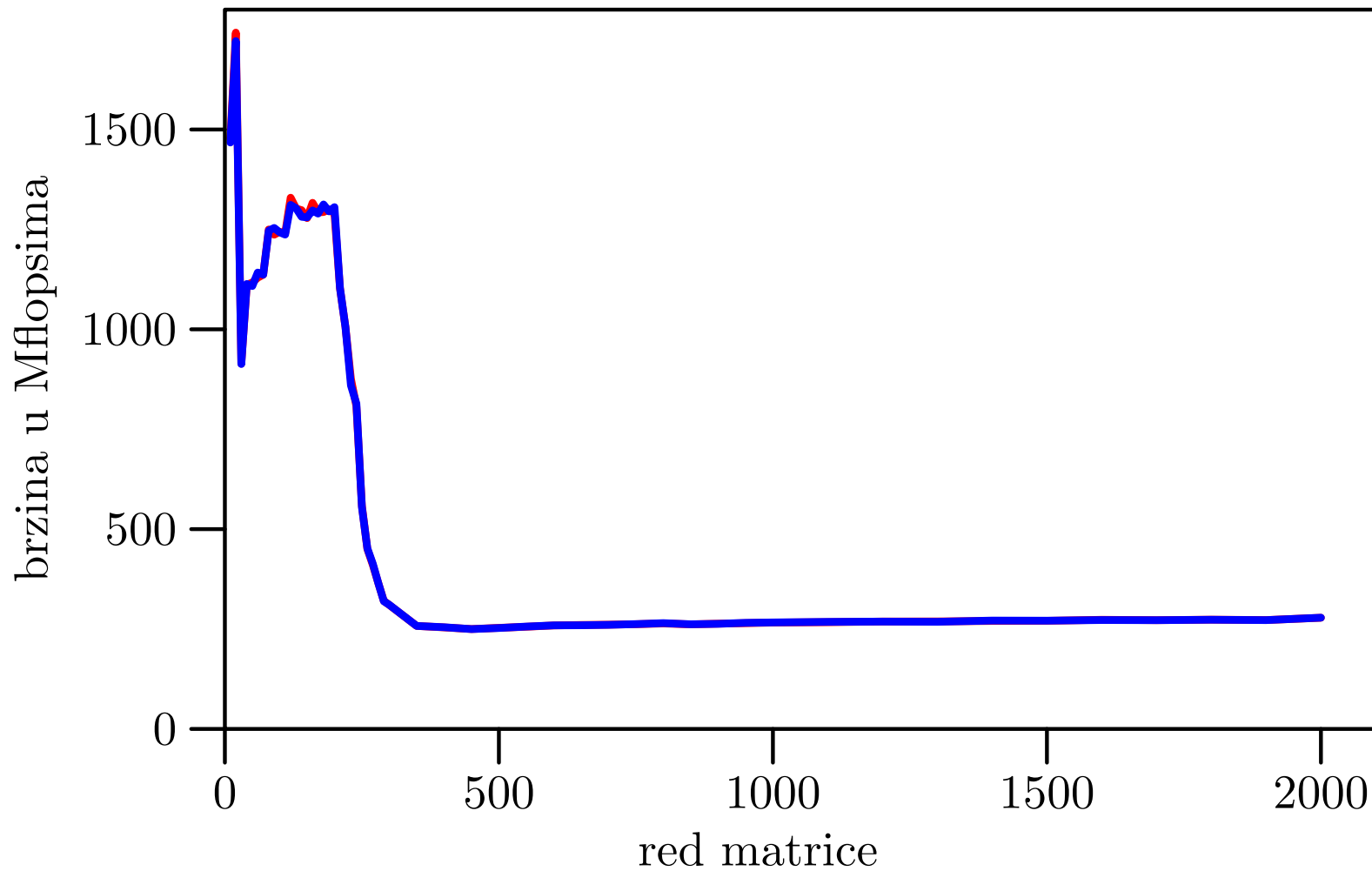
BabyBlue, IVF, normal — ij , ji

Pentium 4/660, 3.6 GHz, IVF, normal – Zbrajanje matrica



BabyBlue, IVF, fast — ij , ji

Pentium 4/660, 3.6 GHz, IVF, fast – Zbrajanje matrica



Tablica brzina za velike n

Razlika u brzini između brže ji petlje i sporije ij petlje je ogromna, a nema neke razlike u brzinama između:

- `fast` i `normal` opcija kompilera za bržu ji petlju.

Usporedba brzina (u Mflops) sporije i brže petlje za razna računala (za velike n):

Računalo	ij petlja	ji petlja
Klamath5	6.2	29.3
Veliki	7.7	205.1
BabyBlue, CVF	60.5	277.1
BabyBlue, IVF	60.8	270.8

Komentar rezultata — brža i sporija petlja

Opazanje 1. Bez optimizacije dobivamo

● ogromnu razliku u brzini između brže i sporije petlje, za bilo koje redove n .

(O razlici između malih i velikih n — malo kasnije.)

Razlog: Brzina je bitno veća kad

● podacima pristupamo redom, kako su spremljeni u memoriji

(Računanje adresa, “blok”–transfer podataka.)

Kako se spremaju matrice u pojedinim programskim jezicima?

Komentar rezultata — brže/sporije (nastavak)

FORTRAN: matrice se spremaju **po stupcima**, tj.

● “brže” se mijenja **prvi** indeks **i** (za retke).

Za **sekvencijalni** pristup podacima

● indeks **stupca j** mora biti **izvana**, a indeks **retka i** **unutra**.

Zato je **ji** petlja brža od **ij** petlje!

C i Pascal: matrice se spremaju **po recima**, tj.

● “brže” se mijenja **drugi** indeks **j** (za stupce).

Tamo je **obratno** — **ij** petlja je brža od **ji** petlje!

Komentar rezultata — “mali” i “veliki” n

Opažanje 2. Za **male** redove n dobivamo

- bitno **veće** brzine, u usporedbi s onima za **velike** n , i to bez obzira na optimizaciju.

Razlog: “Krivac” za ovo **povećanje** brzine je **cache** memorija.

Međutim, to povećanje brzine

- ne pripada** problemu **zbrajanja** matrica, jer svaki ulazni podatak koristimo **samo jednom**,
- već dolazi **samo** od višestrukog **ponavljanja** eksperimenta (pa matrice ostaju u cacheu).

Posljedica: brzinu za **velike** n **ne možemo** “popraviti” promjenom algoritma.

Stvarni “izgled” računala

Sadržaj

- Stvarni “izgled” računala:
 - Registri modernog procesora (IA-32).
 - Primjer matične ploče, blok-dijagram.
 - Hijerarhijska struktura memorije (cache).
 - “Priča o cacheu”.

Standardni kućni procesori

Standardni **kućni** procesori bazirani su na tzv. **IA-32** arhitekturi (Intel ili AMD, svejedno mi je). Osnovna svojstva:

- **riječ** = 32 bita = 4 B, (toliki je tip **int** u C-u),
- **adresa** = 32 bita (x86) ili, modernije, 64 bita (x64).

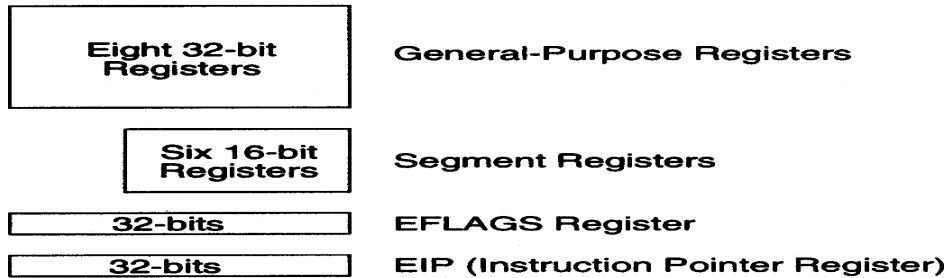
Ovi procesori imaju **gomilu registara**, raznih namjena, koji sadrže razne vrste podataka i instrukcija (ili dijelova instrukcija).

Shematski izgled **svih registara**, a onda samo **registara opće namjene** dan je na sljedeće dvije stranice.

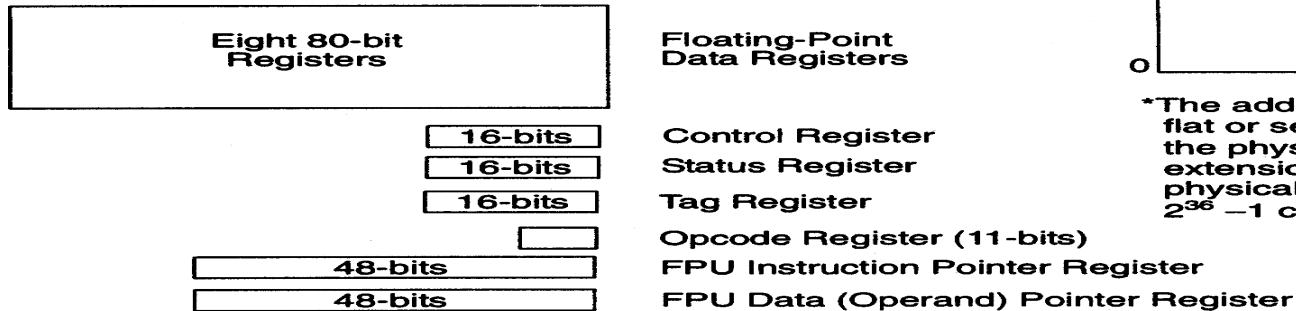
Napomena: slike odgovaraju IA-32 procesoru **Pentium 4**, serija Northwood, podnožje 478 (danas već zastarjelom).

IA-32 — Svi registri i adresni prostor

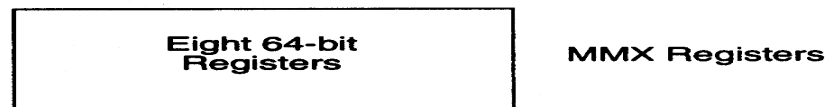
Basic Program Execution Registers



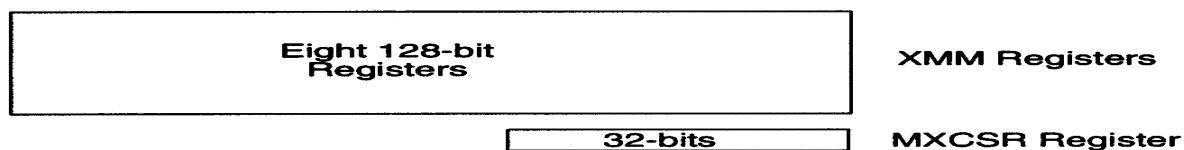
FPU Registers



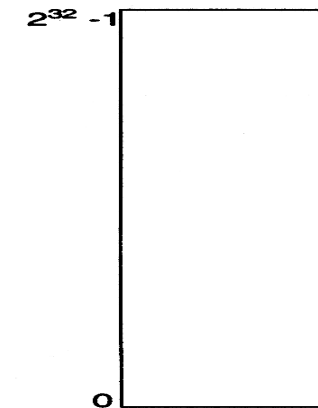
MMX Registers



SSE and SSE2 Registers

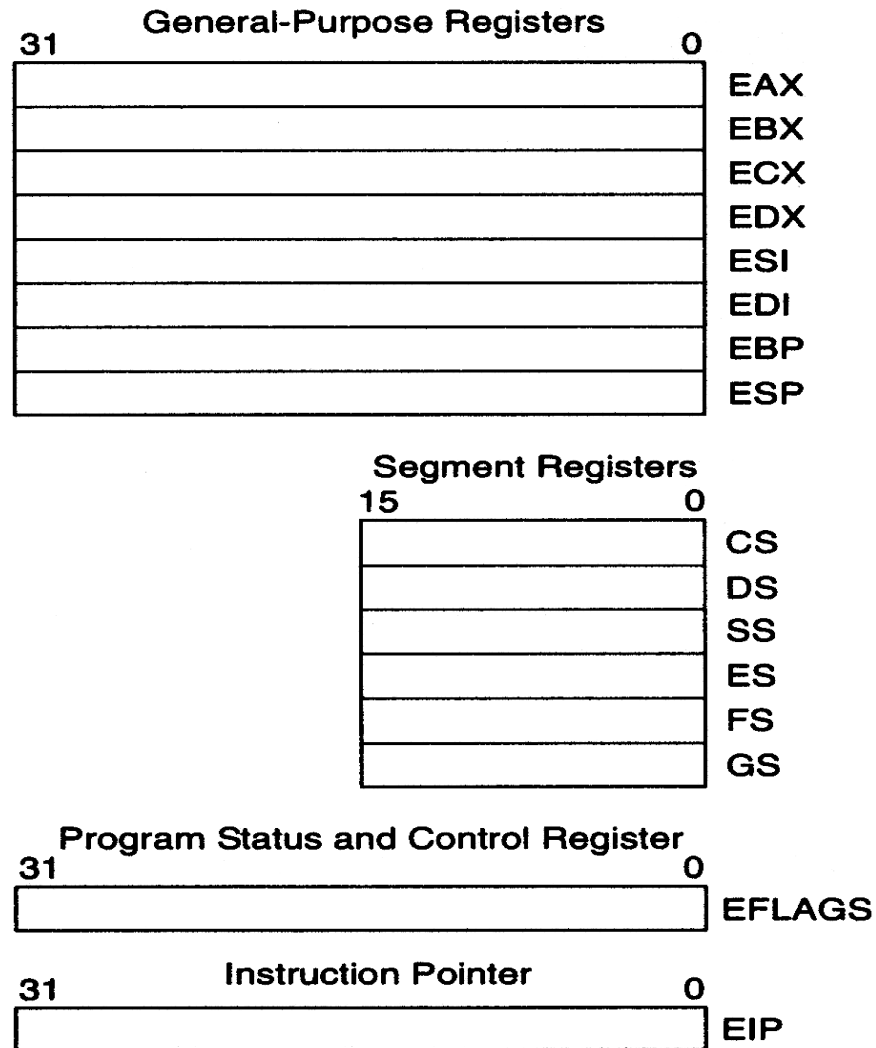


Address Space*



*The address space can be flat or segmented. Using the physical address extension mechanism, a physical address space of $2^{36} - 1$ can be addressed.

IA-32 — Osnovni izvršni registri

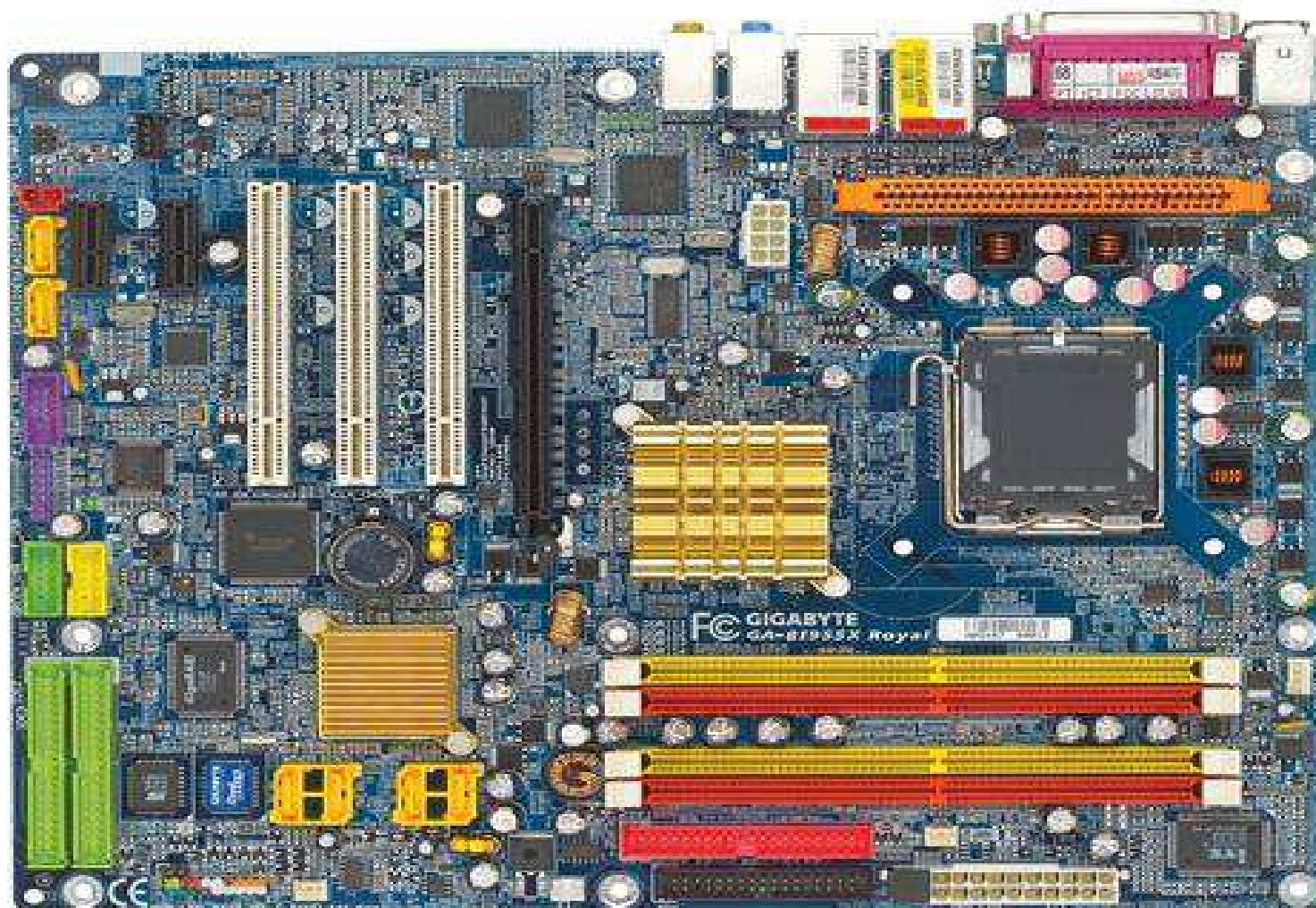


Izgled matične ploče računala

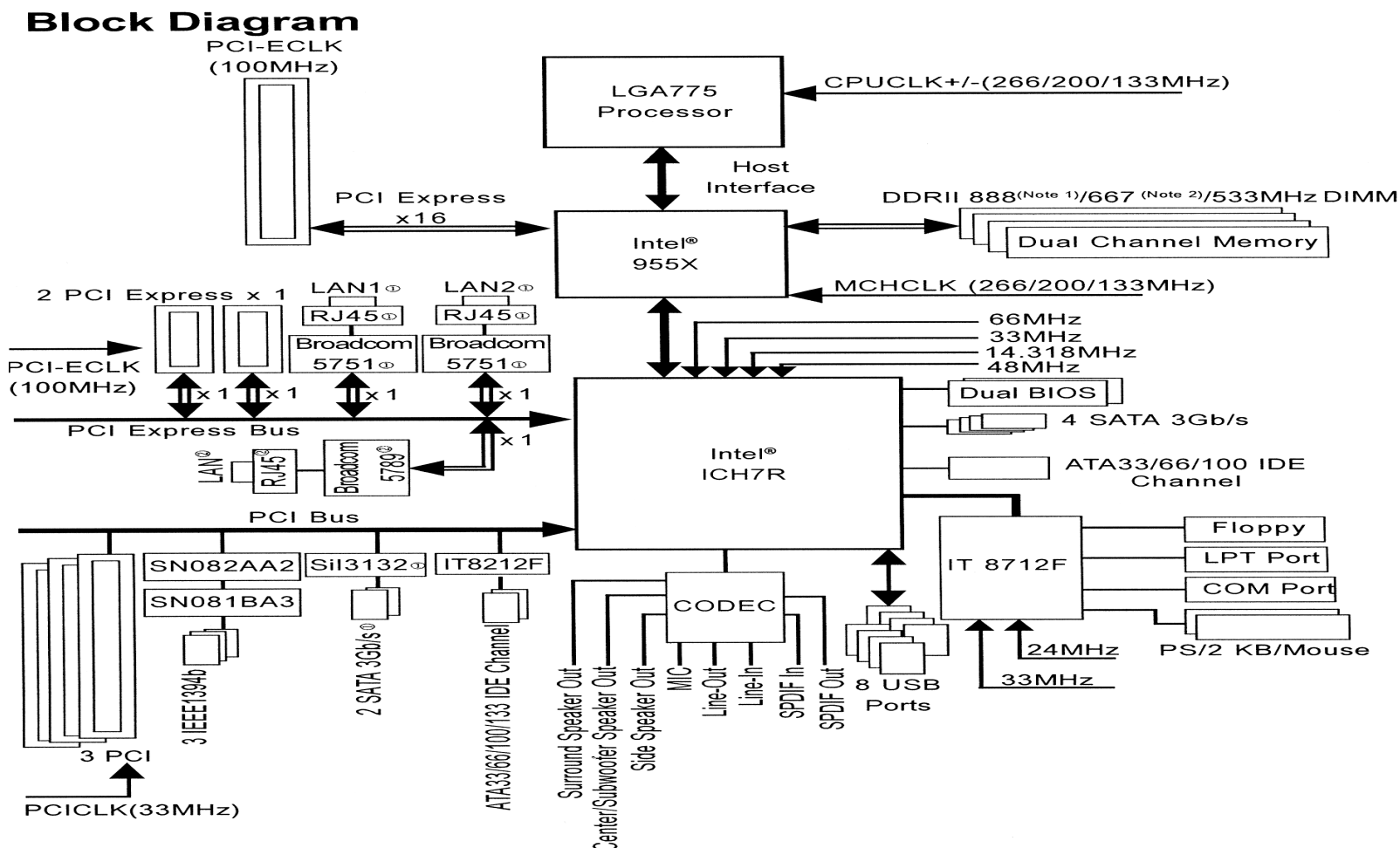
Moderna “kućna” računala, naravno, **imaju** sve standardne dijelove računala.

- Međutim, zbog “**multimedijalne**” namjene, ta računala imaju mogućnost priključivanja **velikog broja** raznih uređaja (“ulaz–izlaz”).
- Gomila toga je **već ugrađena** na modernim tzv. **matičnim pločama** (engl. **motherboard**).
- **Procesor** zauzima relativno “mali” dio površine (ili prostora), a najuočljiviji dio na njemu (nakon ugradnje) je **hladnjak**.
- Utori za **memorijske** “chipove”, također, ne zauzimaju previše prostora.

Matična ploča GA-8I955X Royal — izgled



Matična ploča — blok dijagram



(Note 1) DDR II memory can be overclocked to 888MHz (must be used with an 1066MHz FSB processor) through overclocking in BIOS. Go to GIGABYTE's website for more information about the supported DDR II memory modules for this feature.

(Note 2) To use a DDR II 667 memory module on the motherboard, you must install an 800/1066MHz FSB processor.

Izgled matične ploče računala (nastavak)

Zbog **bitno različite brzine** pojedinih dijelova računala, postoje još **dva bitna** “chipa” koji povezuju razne dijelove i kontroliraju **komunikaciju** — prijenos podataka između njih. To su:

- Tzv. “**northbridge**” (sjeverni most), koji veže procesor s “**bržim**” dijelovima računala. Standardni brzi dijelovi su:
 - memorija,
 - grafika (grafička kartica).
- Tzv. **southbridge** (južni most), na kojem “visi” većina ostalih “**sporijih**” dijelova ili vanjskih uređaja.

Izgled matične ploče računala (nastavak)

- Tipični uređaji vezani na **southbridge** su:
 - diskovi (koji mogu biti i na dodatnim kontrolerima),
 - DVD i CD uređaji,
 - diskete,
 - komunikacijski portovi,
 - port za pislač (printer),
 - USB (Universal Serial Bus) portovi,
 - tzv. Firewire (IEEE 1394a, b) portovi,
 - mrežni kontroleri,
 - audio kontroleri,
 - dodatne kartice u utorima na ploči (modem), itd.

Izgled matične ploče računala (nastavak)

Veze između pojedinih dijelova idu tzv. “**magistralama**” ili “**sabirnicama**” (engl. **bus**, koji nije autobus).

- Ima **nekoliko** magistrala, **raznih** brzina.
- Na istoj magistrali može biti **više uređaja**, i oni su, uglavnom, **podjednakih** brzina.

Uočite **hijerarhijsku** organizaciju komunikacije pojedinih dijelova:

- najsporiji su vezani na ponešto brže,
- ovi na još brže,
- i tako redom, do najbržeg — procesora.

Ova hijerarhija je **ključna** za efikasnu komunikaciju!

Hijerarhijska struktura memorije

Nažalost, ova hijerarhija komunikacije **nije dovoljna** za efikasnost modernog računala. Grubo govoreći, **fali joj vrh**, koji se ne vidi dobro na izgledu matične ploče.

- Pravo i najgore **usko grlo** u prijenosu podataka je komunikacija između **procesora** i **memorije**.

Gdje je problem?

Podsjetimo: bilo koje **operacije** nad bilo kojim podacima možemo napraviti samo u procesoru — preciznije, u **registrima** procesora. To znači da

- prije same operacije, podatak moramo “dovući” iz obične memorije u neki registar procesora.

Baš to je **sporo!**

Hijerarhijska struktura memorije (nastavak)

Na primjer, ako procesor radi na 3.6 GHz, a memorija na 533 MHz, onda će

- prijenos podatka u registar trajati okruglo 6 puta dulje od operacije na njemu.

Nažalost, isti tehnološki problem se javlja kod svih modernijih računala.

- Obična radna memorija je bitno sporija od procesora.

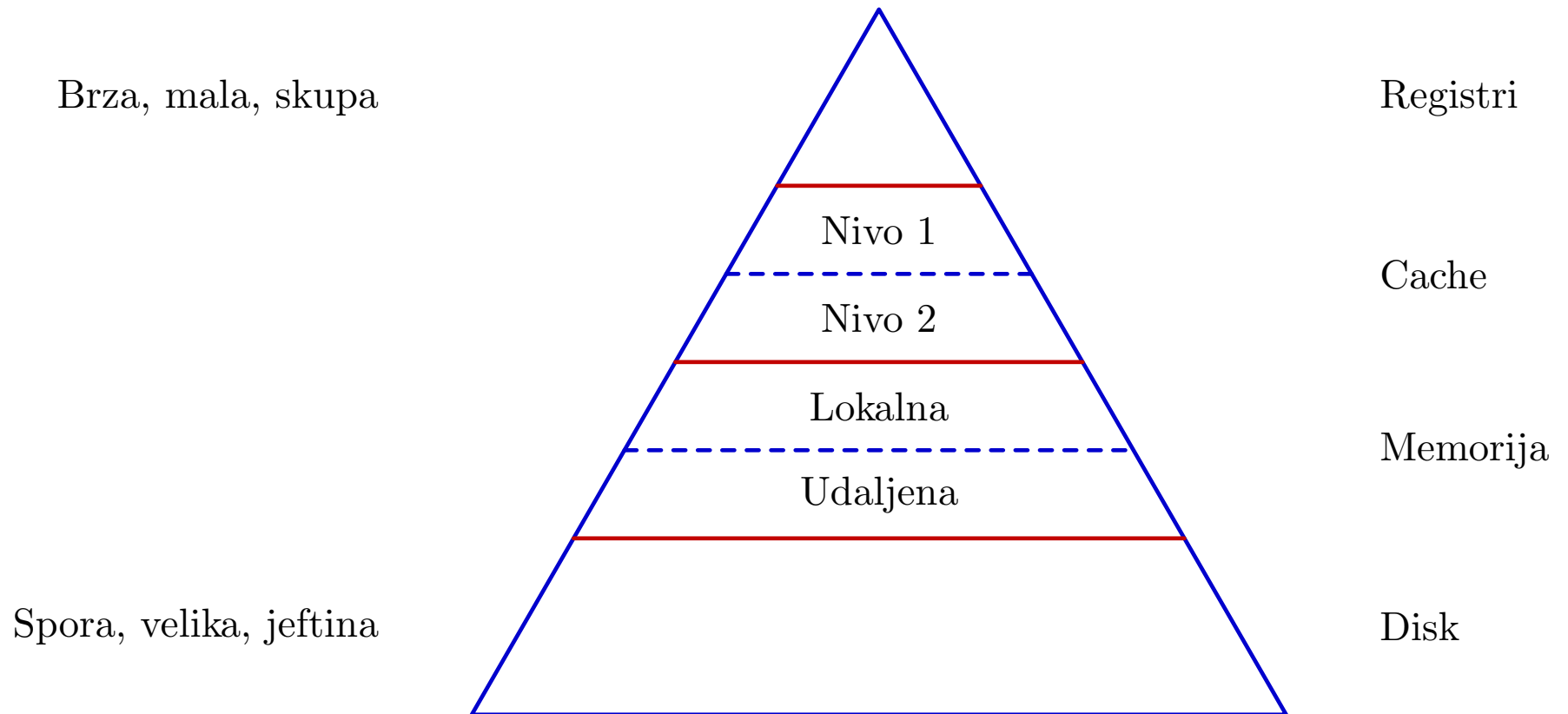
Kako se to izbjegava, ili, barem ublažava?

- Dodatnom hijerarhijskom strukturom memorije, između obične radne memorije (RAM) i registara procesora.

Ta “dodatna” memorija se tradicionalno zove cache.

Hijerarhijska struktura memorije (nastavak)

Globalna struktura memorije u računalu ima oblik:



Cache memorija

Dakle, **cache** je **mala** i **brza** “lokalna” memorija — **bliža** procesoru od obične memorije (RAM). Gdje se nalazi?

- Obično, **na samom procesorskom chipu**, da bude što bliže registrima.

Nadalje, i taj **cache** je **hijerarhijski** organiziran. U modernim procesorima postoji **nekoliko** nivoa (razina) cache memorije.

- **L1** cache za podatke i instrukcije — najbrži, veličina (trenutno) u **KB**.
- **L2** cache za podatke — nešto sporiji, danas obično **na frekvenciji procesora**, veličina već u **MB**.
- Katkad postoji i treća razina — **L3** cache.

Cache memorija (nastavak)

Na primjer, moj “notebook” ima **Intel Pentium 4–M** procesor koji na sebi ima (bez pretjeranih tehničkih detalja):

- L1 cache za podatke — 8 KByte-a,
- L1 cache za instrukcije — 12 K tzv. mikro-operacija,
- L2 cache — 512 KByte-a, na frekvenciji procesora.

Ovo su tipični omjeri veličina za **Intelove** procesore.

Za usporedbu, na **AMDovim** procesorima omjeri su bitno **drugačiji**:

- L1 cache je **veći**,
- L2 cache nešto **manji** (i, katkad, sporiji).

(Ne ulazimo u to što je bolje!)

Cache memorija (nastavak)

Kako (ugrubo) **radi** cache?

Kad računalo (tj. njegov operacijski sustav) **izvršava** neki naš **program**, onda

- uglavnom, **imamo** kontrolu **sadržaja** obične memorije koju taj naš program koristi za podatke i naredbe.

Za razliku od toga,

- **nemamo** nikakvu **izravnu** kontrolu nad sadržajem **cache** memorije.

Naime, cache **nije izmišljen** zato da bude **mala**, **brža** kopija obične memorije i tako ubrza ukupni rad računala.

Cache memorija (nastavak)

Puno je **efikasnije** da

- **cache** sadrži podatke koji se **češće** koriste.

Isto vrijedi i za instrukcije. Dakle, **osnovna ideja** je:

- “Skrati put do onog što ti često treba”.

Naravno, **ključna** stvar za efikasnost je:

- Što znači “češće” korištenje nekog podatka ili instrukcije?

Dobra **globalna** ili **prosječna** efikasnost postiže se samo ako se **to odnosi** na **sve** što računalo izvršava u nekom trenutku, tj. na sve pokrenute korisničke programe i dijelove operacijskog sustava.

Cache memorija (nastavak)

U tom svjetlu, kad malo bolje razmislite,

- zaista bi bilo **nepraktično** da svaki programer određuje što i kada treba ići u koju cache memoriju,

jer prosječna efikasnost nipošto **ne ovisi** samo o njegovom programu. Zato **nema posebnih naredbi** za

- **učitavanje** podataka u cache, ili
- **pisanje** podataka iz cachea u običnu memoriju.

Umjesto toga, **sadržajem** cachea upravljaju posebni **cache kontroleri**, koji

- raznim tehnikama “**asocijacije**” na više načina povezuju nedavno korištene podatke i instrukcije s onima koje **tek treba iskoristiti i izvršiti**.

Cache memorija (nastavak)

Bez puno tehničkih detalja, ova **asocijacija** se realizira otprilike ovako:

- Za svaki **sadržaj** (**podatak** ili **instrukciju**) u cacheu, dodatno se pamti i **adresa** (iz RAM-a), s koje je taj **sadržaj** stigao.
- Ako procesor (uskoro) **zatraži** **sadržaj** s te **adrese**, on se “**čita**” iz cachea (tj. ne treba po njega ići u RAM).
- Po istom sistemu, u cacheu se **pamte** i stvari koje se “**pišu**” u običnu memoriju (na putu u RAM).
- Tada se iz cachea **brišu** podaci koji su **najstariji**, odnosno, **najmanje korišteni** (u zadnje vrijeme, otkad su u cacheu).

Cache memorija (nastavak)

Dakle, sadržaj cachea se **stalno obnavlja**, tako da

- cache čuva **najčešće nedavno korištene sadržaje** koji bi **uskoro mogli trebati**.

Iskustvo pokazuje da se **isti sadržaji** vrlo često koriste **više puta**, pa se ovo isplati.

Očiti primjer:

- **instrukcije u petljama** se ponavljaju puno puta!

Ne zaboravimo da je upravo to svrha programiranja i osnovna korist računala.

Cache memorija (nastavak)

Malo kompliciranije je s **podacima**.

- Ako naš **algoritam** ne koristi iste podatke **puno puta**, onda nam cache **neće ubrzati** postupak.
- U suprotnom, isplati se **preurediti** algoritam tako da **iste podatke** koristi **puno puta**, ali u **kratkom vremenskom razmaku** — da ne “izlete” iz cachea. (To je **neizravna** kontrola nad sadržajem **cachea**.)

Primjeri iz **linearne algebre**:

- **zbrajanje** matrica, $C = A + B$ — cache **ne pomaže** puno;
- **množenje** matrica, $C = C + A * B$ — dobro korištenje **cachea** može ubrzati množenje matrica i za **5 puta**.