OBLIKOVANJE I ANALIZA ALGORITAMA — 2. kolokvij

30. 1. 2019.

1. (25) Specijalna brdska jedinica ima n vojnika. Svakom vojniku treba dodijeliti po jedan od n parova skija. Vojnici i skije (kad stoje uspravno) mogu biti različitih visina. Visina i-tog vojnika je h_i, a visina i-tog para skija je s_i, gdje su h_i i s_i zadani prirodni brojevi (u centimetrima), za $i = 1, \ldots, n$. Dodjelu skija opisujemo permutacijom p, brojeva od 1 do n, tako da i-ti vojnik (visine h_i) dobiva skije visine $s_{p(i)}$.

Prema terenskom pravilu, skije treba podijeliti tako da se minimizira ukupna razlika u visini između svakog vojnika i njegovih skija. Drugim riječima, treba pronaći onu permutaciju p koja **minimizira** sumu

$$\sum_{i=1}^{n} |h_i - s_{p(i)}|.$$

Ulaz su broj n i polja h, s. Radi jednostavnosti, možete pretpostaviti da je polje h već **uzlazno** sortirano.

(a) Razmotrite sljedeću pohlepnu strategiju: u svakom koraku, među preostalim (nesparenim) vojnicima i skijama, "sparujemo" onaj par koji **minimizira** razliku u visini između preostalih vojnika i skija. Ovo ponavljamo sve dok ne sparimo sve vojnike i skije. Dokažite ili opovrgnite da ova strategija daje optimalno dodjeljivanje skija vojnicima.

(b) Razmotrite sljedeću pohlepnu strategiju: prvo **uzlazno** sortiramo i polje s (polje h je već uzlazno sortirano). Zatim, i-tom vojniku dodjeljujemo i-te skije iz sortiranog poretka skija, za $i = 1, \ldots, n$. Dokažite ili opovrgnite da ova strategija daje optimalno dodjeljivanje skija vojnicima.

(c) Sastavite algoritam za nalaženje optimalne permutacije p i analizirajte njegovu vremensku složenost.

2. (25) Zadan je povezan neusmjereni težinski graf $G = (V, E)$, s n vrhova (čvorova), m bridova i težinama bridova $w_e \in \mathbb{R}$, za svaki brid $e \in E$. Dodatno, **zadano** je i (neko) minimalno razapinjuće stablo T tog grafa G. Uz pretpostavku da G nije potpun, grafu G dodajemo **novi** brid $e' \notin E$, koji spaja neka dva vrha $u, v \in V$, a težina tog brida je w'.

Sastavite **efikasni** algoritam za nalaženje minimalnog razapinjućeg stabla T' tako dobivenog grafa $G' = G + e'$. Dokažite korektnost tog algoritma i analizirajte njegovu vremensku složenost. Vremenska složenost **mora** biti u $O(m)$, što vrijedi najviše 15 bodova. Složenost u $O(n)$, s dokazom toga, vrijedi 10 bodova više!

Ukratko opišite strukture podataka koje koristite za prikaz grafa, težina i minimalnog razapinjućeg stabla. Navedite sve činjenice koje su bitne za dokaz korektnosti i analizu složenosti (dovoljno ih je navesti, ne treba ih dokazivati).

OKRENITE!

3. (25) Definirajte diskretnu Fourierovu transformaciju kompleksnog vektora duljine n, u oznaci DFT_n.

(a) Neka je n paran broj. Koristeći strategiju "podijeli pa vladaj" s faktorom 2, izvedite prvi korak **brzog** algoritma za računanje DFT_n. Prvi korak, nazovimo ga D_2, je svođenje DFT_n na $\mathrm{DFT}_{n/2}$. Na osnovu toga, skicirajte rekurzivni algoritam za **brzu** diskretnu Fourierovu transformaciju (FFT) vektora duljine $n = 2^k$. Izvedite njegovu aritmetičku složenost, tj. izračunajte **točan** broj kompleksnih zbrajanja, odnosno, množenja u tom algoritmu.

(b) Neka je n djeljiv s 4. Koristeći strategiju "podijeli pa vladaj" s faktorom 4, izvedite prvi korak **brzog** algoritma za računanje DFT_n. Prvi korak, nazovimo ga D_4, ovdje je svođenje DFT_n na $\mathrm{DFT}_{n/4}$. Kolika je aritmetička složenost iterativnog dijela algoritma, **bez** rekurzivnih poziva za računanje $\mathrm{DFT}_{n/4}$?

(c) Ako je n djeljiv s 4, onda svođenje DFT_n na $\mathrm{DFT}_{n/4}$ možemo napraviti na dva načina — koristeći **jedan** korak algoritma D_4 ili **dva** koraka algoritma D_2 (prvo DFT_n na $\mathrm{DFT}_{n/2}$, a onda $\mathrm{DFT}_{n/2}$ na $\mathrm{DFT}_{n/4}$). Što od tog se više isplati, tj. ima **manje** kompleksnih aritmetičkih operacija? Precizno argumentirajte.

REZULTATI: nedjelja, 3. 2. 2019., navečer (na webu),
ponedjeljak, 4. 2. 2019. u 12 sati.

Saša Singer