OBLIKOVANJE I ANALIZA ALGORITAMA — popravni kolokvij

15. 2. 2017.

1. (10) Napišite precizne definicije sljedećih pojmova:

   (a) za funkcije f, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vrijedi $f(n) \in \Theta(g(n))$, kad $n \to \infty$,

   (b) funkcija f **blago eksponencijalno raste**.

   Kojoj klasi rasta pripada funkcija $f : D \to f(D)$

$$f(x) = x^{1/x} \log^2 x,$$

   gdje je D prirodna domena ove funkcije? Precizno argumentirajte odgovor.

2. (10) Zadana je rekurzivna relacija

$$T(n) = 6\,T(n/3) + f(n), \quad f(n) = n^2,$$

   uz početni uvjet $T(1) = d > 0$. Nađite uvjetno asimptotsko ponašanje relacijom Θ za rješenje $T(n)$, ako je n potencija od 3. Može li se dobiveno rješenje proširiti tako da asimptotsko ponašanje vrijedi bezuvjetno, za svaki dovoljno veliki $n \in \mathbb{N}$, za rekurziju

$$T(n) = 3\,T(\lfloor n/3 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/3 \rceil) + n^2, \quad \text{za } n \geq 2,$$

   uz početne uvjete $T(0) = 0$ i $T(1) = d > 0$?

3. (35) Banka je zaplijenila n bankovnih kartica, sumnjajući na pokušaj prijevare. Svaka kartica pripada točno jednom bankovnom računu i sadrži kôdirani zapis podataka o tom računu na čipu i magnetskoj traci. Dvije kartice su **ekvivalentne** ako pripadaju istom računu. Banka treba provjeriti postoji li među zaplijenjenim karticama podskup od strogo **preko** $n/2$ kartica koje su sve međusobno ekvivalentne, tj. pripadaju istom računu.

   Izravno dekôdiranje zapisa na kartici je vrlo skupo. Zato banka ima visokotehnološki uređaj koji prima dvije kartice i samo **provjerava** jesu li te dvije kartice ekvivalentne ili ne. Algoritamski rečeno, za kartice s rednim brojevima i, j, ova provjera odgovara pozivu funkcije $\mathit{iste}(i, j)$, koja vraća logičku vrijednost — 0 (laž), ili 1 (istina).

   Sastavite algoritam koji, za zadani broj kartica n, vraća odgovor na postavljeno pitanje koje zanima banku. Složenost algoritma mjerimo brojem poziva funkcije iste.

   Red veličine složenosti algoritma mora biti $O(n \log n)$. Analizirajte složenost vašeg algoritma i pokažite da ona zadovoljava ovaj uvjet. Uputa: iskoristite princip “podijeli, pa vladaj” na “polovinama” zadanog niza kartica (od 1 do $n/2$, i preostalim).

OKRENITE!

4. (30) Natjecanje u trijatlonu ima tri dijela: plivanje u malom bazenu na 800 m, zatim vožnju biciklom na 10 km i, na kraju, trčanje na 3 km. Za svakog pojedinog natjecatelja nema odmora između ovih dijelova. Zbog sigurnosnih propisa, u bazenu se u bilo kojem trenutku smije nalaziti samo **jedan** natjecatelj. Na biciklističkoj i trkačoj stazi nema takvog ograničenja, tj. više natjecatelja može istovremeno biti na svakoj od tih staza.

Umjesto skupnog starta, natjecatelji startaju jedan za drugim — čim prethodni natjecatelj izađe iz bazena, tog trena starta sljedeći natjecatelj, i tako redom, pa se bazen koristi bez prekida.

Ukupno je prijavljeno n natjecatelja, a prijava i-tog natjecatelja sadrži očekivana vremena za svaki od tri dijela utrke: p_i za plivanje, b_i za vožnju bicikla i t_i za trčanje.

Za minimizaciju troškova pratnje, organizatori natjecanja žele naći **redoslijed** kojim trebaju startati natjecatelji tako da **cijela** utrka — od starta prvog natjecatelja, do trena kad svi natjecatelji završe trčanje, ima **najkraće** očekivano trajanje (izračunato na osnovu očekivanih vremena iz prijava).

(a) Analizirajte slučaj $n = 2$ i nađite **pohlepni** kriterij koji daje najmanje trajanje cijele utrke. Dokažite optimalnost tog kriterija za bilo koji n.

(b) Sastavite algoritam koji nalazi optimalni startni redoslijed i nađite njegovu složenost. Ulazni argumenti su broj n i polja očekivanih vremena p, b i t. Izlaz algoritma je permutacija brojeva od 1 do n, koja sadrži optimalni startni redoslijed, i pripadno najmanje očekivano trajanje cijele utrke T. Složenost algoritma mora biti $O(n^2)$.

5. (35) Definirajte što je diskretna Fourierova transformacija (DFT) kompleksnog vektora duljine n i što je inverzna transformacija.

(a) Skicirajte rekurzivni algoritam za **brzu** diskretnu Fourierovu transformaciju (FFT) vektora duljine $n = 2^k$ i izvedite njegovu složenost, uz pretpostavku sekvencijalnog izvršavanja operacija. Ukratko opišite kako se iz ovog algoritma dobiva algoritam za inverznu Fourierovu transformaciju.

(b) Opišite tzv. "leptir" (butterfly) operaciju. Koliko takvih operacija je istovremeno potrebno za idealno paralelno računanje FFT-a i kolika je pripadna paralelna vremenska složenost?

Zadana su dva polinoma A i B, stupnja najviše $n-1$, s kompleksnim koeficijentima. Koeficijente svakog polinoma prikazujemo vektorom duljine n.

(c) Opišite osnovne korake **brzog** algoritma za računanje produkta $C = A \cdot B$ zadanih polinoma, korištenjem brze diskretne Fourierove transformacije vektora čija duljina je potencija broja 2. Kolika je složenost tog algoritma?

Napomena: odgovori na pojedine dijelove zadatka vrednuju se nezavisno.

REZULTATI: nedjelja, 19. 2. 2017., navečer (na webu),
ponedjeljak, 20. 2. 2017. u 12 sati.

Saša Singer