Numerička matematika

Zadaci iz neprekidnih najmanjih kvadrata

Saša Singer

15. srpnja 2020.

Zadatak 1. Neprekidni najmanji kvadrati — Fourierov red

Zadana je funkcija

$$f(x) = x^2$$

na intervalu $(0, 2\pi)$. Nađite Fourierov razvoj funkcije f uz pretpostavku da je f periodička funkcija s periodom 2π. Koristeći ovaj razvoj pokažite da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Rješenje. Osnovni period funkcije f je 2π, pa njezin Fourierov red ima oblik

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos kx + b_k \sin kx \Big),$$

a koeficijenti u razvoju dani su formulama (može za $k \geq 0$, uz $b_0 = 0$)

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Treba još samo izračunati ove integrale za $f(x) = x^2$.

Koeficijent a_0 izlazi odmah

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3} \bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{8\pi^3}{3} = \frac{8\pi^2}{3}.$$

Ostali integrali, za $k > 0$, sadrže trigonometrijske funkcije i njih računamo parcijalnom integracijom. Prvo računamo koeficijente a_k, za $k > 0$.

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos kx \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x \, dx \\ dv = \cos kx \, dx & v = \dfrac{1}{k} \sin kx \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{k} \sin kx \bigg|_0^{2\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{2\pi} x \sin kx \, dx \right) = \{\text{granice: } \sin 2k\pi = \sin 0 = 0\} \\
&= -\frac{2}{k\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin kx \, dx & v = -\dfrac{1}{k} \cos kx \end{array} \right\} \\
&= -\frac{2}{k\pi} \left(-\frac{x}{k} \cos kx \bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \cos kx \, dx \right) = \{\text{granice: } \cos 2k\pi = \cos 0 = 1\} \\
&= -\frac{2}{k^2\pi} \left(-2\pi + \int_0^{2\pi} \cos kx \, dx \right) = -\frac{2}{k^2\pi} \left(-2\pi + \frac{1}{k} \sin kx \bigg|_0^{2\pi} \right) \\
&= \{\text{granice: } \sin 2k\pi = \sin 0 = 0\} = \frac{4}{k^2}.
\end{aligned}$$

Zatim računamo koeficijente b_k, za $k > 0$.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin kx\, dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x\, dx \\ dv = \sin kx\, dx & v = -\frac{1}{k}\cos kx \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{k}\cos kx\,\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{k}\int_0^{2\pi} x\cos kx\, dx\right) = \{\text{granice: } \cos 2k\pi = \cos 0 = 1\}$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left(-4\pi^2 + 2\int_0^{2\pi} x\cos kx\, dx\right) = \left\{\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos kx\, dx & v = \frac{1}{k}\sin kx \end{array}\right\}$$

$$= \frac{2}{k\pi}\left(-2\pi^2 + \frac{x}{k}\sin kx\,\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} \sin kx\, dx\right) = \{\text{granice: } \sin 2k\pi = \sin 0 = 0\}$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left(2\pi^2 + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} \sin kx\, dx\right) = -\frac{2}{k\pi}\left(2\pi^2 - \frac{1}{k^2}\cos kx\,\Big|_0^{2\pi}\right)$$

$$= \{\text{granice: } \cos 2k\pi = \cos 0 = 1\} = -\frac{4\pi}{k}.$$

Dakle, Fourierov red funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $(0, 2\pi)$ je

$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{k^2}\cos kx - \frac{4\pi}{k}\sin kx\right).$$

Znamo da je x^2 neprekidna funkcija na otvorenom intervalu $(0, 2\pi)$, pa ovaj Fourierov red konvergira prema x^2, za svaki $x \in (0, 2\pi)$.

Funkciju x^2 možemo periodički proširiti s $(0, 2\pi)$ na cijeli $\mathbb{R}$, tako da dobijemo periodičku funkciju $\widehat{f}$ s periodom 2π. No, bez obzira na to kako definiramo vrijednosti tog proširenja $\widehat{f}$ u cjelobrojnim višekratnicima od 2π, tj. u točkama $x_n = 2n\pi$, za $n \in \mathbb{Z}$, funkcija $\widehat{f}$ sigurno ima **prekide** u tim točkama.

Prema Dirichletovom teoremu, Fourierov red funkcije x^2 u točki $x_n = 2n\pi$ konverigira prema "polovini skoka" funkcije $\widehat{f}$ u toj točki, tj. vrijedi

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{k^2}\cos kx_n - \frac{4\pi}{k}\sin kx_n\right) = \frac{1}{2}\Big(\widehat{f}(x_n-) + \widehat{f}(x_n+)\Big).$$

Za $x_0 = 0$ dobivamo

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2} = \frac{1}{2}\Big(\lim_{x\to 2\pi} f(x) - \lim_{x\to 0} f(x)\Big) = \frac{1}{2}(4\pi^2 + 0) = 2\pi^2.$$

Nakon dijeljenja s 4 izlazi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Zadatak 2. Neprekidni najmanji kvadrati — trigonometrijski polinom

Zadana je funkcija

$$f(x) = x^2$$

na intervalu $[0, 2\pi]$. Za bilo koji $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite najbolju aproksimaciju funkcije f u prostoru $\mathcal{T}_n$ trigonometrijskih polinoma "stupnja" n, tj. u prostoru razapetom funkcijama

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin x,\ \ldots,\ \sin nx.$$

Rješenje. Za bilo koji $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, označimo s f_n najbolju aproksimacije funkcije f u prostoru $\mathcal{T}_n$. Znamo da je navedeni sustav funkcija **ortogonalna** baza prostora $\mathcal{T}_n$, uz integralni skalarni produkt na intervalu $[0, 2\pi]$,

$$\langle u, v\rangle := \int_0^{2\pi} u(x)v(x)\,dx.$$

Ako najbolju aproksimaciju f_n zapišemo u obliku linearne kombinacije funkcija ove baze,

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\Big),$$

onda su koeficijenti dani formulama (može za $k \geq 0$, uz $b_0 = 0$)

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx,$$

i ovi koeficijenti **ne ovise** o n. Tražena aproksimacija f_n je **konačni** komad Fourierovog reda za f, a tog smo izračunali u prošlom zadatku. Onda odmah vidimo da je

$$f_n(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{k^2}\cos kx - \frac{4\pi}{k}\sin kx\right).$$

Zadatak 3. Neprekidni najmanji kvadrati — Fourierov red

Zadana je funkcija

$$f(x) = \sin x$$

na intervalu $[0, \pi]$. Nađite Fourierov razvoj funkcije f uz pretpostavku da je f periodička funkcija s periodom π.

Rješenje. Za početak, uočimo da Fourierov red za $f(x) = \sin x$ **nije** samo $\sin x$, jer osnovni interval perioda **nije** 2π, nego samo π. Drugim riječima, gledamo samo "pola" sinusoide, odnosno, njezinu **apsolutnu** vrijednost.

Za periodičku funkciju f osnovnog perioda P, koristimo ortogonalnu bazu trigonometrijskih funkcija s tim periodom P. Ta baza sadrži funkcije

$$\cos\frac{2k\pi x}{P}, \quad k \geq 0, \qquad \sin\frac{2k\pi x}{P}, \quad k \geq 1.$$

Na bilo kojem intervalu duljine osnovnog perioda $[c, c+P]$, uz integralni skalarni produkt

$$\langle u, v \rangle := \int\limits_c^{c+P} u(x)v(x)\,dx,$$

onda vrijede sljedeće relacije ortogonalnosti

$$\int\limits_c^{c+P} \cos\frac{2k\pi x}{P} \cdot \cos\frac{2\ell\pi x}{P}\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ P, & k = \ell = 0, \\ \dfrac{P}{2}, & k = \ell > 0, \end{cases} \qquad \text{za} \quad k, \ell \geq 0,$$

$$\int\limits_c^{c+P} \sin\frac{2k\pi x}{P} \cdot \sin\frac{2\ell\pi x}{P}\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ \dfrac{P}{2}, & k = \ell, \end{cases} \qquad \text{za} \quad k, \ell \geq 1,$$

$$\int\limits_c^{c+P} \cos\frac{2k\pi x}{P} \cdot \sin\frac{2\ell\pi x}{P}\,dx = 0, \qquad \text{za} \quad k \geq 0, \quad \ell \geq 1.$$

Fourierov red funkcije f ima oblik

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{2k\pi x}{P} + b_k \sin\frac{2k\pi x}{P} \right),$$

a koeficijenti u razvoju dani su formulama (može za $k \geq 0$, uz $b_0 = 0$)

$$a_k = \frac{2}{P} \int\limits_c^{c+P} f(x) \cos\frac{2k\pi x}{P}\,dx, \qquad b_k = \frac{2}{P} \int\limits_c^{c+P} f(x) \sin\frac{2k\pi x}{P}\,dx.$$

U našem primjeru je $f(x) = \sin x$, $c = 0$ i $P = \pi$. Fourierov red za f je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos 2kx + b_k \sin 2kx \Big),$$

a traženi koeficijenti su onda

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x \cos 2kx\, dx, \qquad b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x \sin 2kx\, dx.$$

Napomena: koeficijent a_k **nije** jednak nuli po argumentu ortogonalnosti, iako sadrži različite trigonometrijske funkcije (sin, cos), jer argumenti funkcija, odnosno, granice integrala nisu kao u relacijama ortogonalnosti (na intervalu $[0,\pi]$, ili na $[0,2\pi]$).

Oba integrala najlakše se računaju pretvaranjem produkta trigonometrijskih funkcija u sumu.

Za koeficijente a_k koristimo formulu

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\Big),$$

uz $\alpha = x$ i $\beta = 2kx$. Dobivamo

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x\cos 2kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^\pi \sin(1-2k)x\,dx + \int\limits_0^\pi \sin(1+2k)x\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{1-2k}\cos(1-2k)x\,\Big|_0^\pi - \frac{1}{1+2k}\cos(1+2k)x\,\Big|_0^\pi\right)\\
&= \{\text{granice: } \cos(1\pm 2k)\pi = -1,\ \cos 0 = 1\}\\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-2k}(-1-1) + \frac{1}{1+2k}(-1-1)\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(1+2k)+(1-2k)}{1-4k^2}\\
&= -\frac{4}{(4k^2-1)\pi}.
\end{aligned}$$

Primijetimo još da su nazivnici $1\pm 2k$ uvijek neparni brojevi, pa ne možemo dobiti nulu u nazivniku. Zato ovaj rezultat vrijedi za svaki $k \geq 0$.

Za koeficijente b_k koristimo formulu

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\Big),$$

uz $\alpha = x$ i $\beta = 2kx$. Dobivamo

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x\sin 2kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^\pi \cos(1-2k)x\,dx - \int\limits_0^\pi \cos(1+2k)x\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-2k}\sin(1-2k)x\,\Big|_0^\pi - \frac{1}{1+2k}\sin(1+2k)x\,\Big|_0^\pi\right)\\
&= \{\text{granice: } \sin(1\pm 2k)\pi = 0,\ \sin 0 = 0\}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ovo vrijedi za bilo koji $k \geq 1$, iz istog razloga (nazivnici su neparni, pa ne možemo dobiti nulu u nazivniku).

Dakle, Fourierov red funkcije $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ je

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos 2kx.$$

Rezultat vrijedi i u rubovima intervala, jer je $\sin 0 = \sin \pi$, pa je periodičko proširenje funkcije f na cijeli $\mathbb{R}$ neprekidna funkcija.

Na kraju, primijetimo da je $\sin x$ "**parna**" funkcija na $[0, \pi]$ — graf je simetričan obzirom na **polovište** intervala (točka $\pi/2$). Zato Fourierov red sadrži samo **parni** dio, tj. samo kosinusne članove. No, to je, opet, zbog parnosti tog dijela baze na $[0, \pi]$ ("parnost" obzirom na polovište tog intervala).

Periodičko proširenje od f na cijeli $\mathbb{R}$ je funkcija $|\sin x|$. Ona je, globalno gledajući, **parna** funkcija, tj. graf je simetričan oko nule. Taj argument primijenjen na intervalu $[-\pi, \pi]$ kaže da f ima samo kosnusni dio standardnog Fourierovog reda (s članovima $\cos kx$).

Jači zaključak dobivamo iz parnosti na **dvostruko manjem** intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$. Od općeg kosinusnog dijela, ostaju samo članovi s "**parnim**" kosinusima (po k), tj. razvoj ima samo članove s $\cos 2kx$.

Zadatak 4. Neprekidni najmanji kvadrati — pravac uz razne težine

Zadana je funkcija

$$f(x) = x^2$$

na intervalu $[0, 1]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom

(a) $w(x) = 1$,

(b) $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - x^2}}$.

Izračunajte i najveće apsolutne pogreške ovih dviju aproksimacija na zadanom intervalu. Pokažite da je druga aproksimacija (s Čebiševljevom težinskom funkcijom), ujedno, i minimaks aproksimacija funkcije f.

Rješenje. Zadatak ćemo riješiti na dva načina. Prvo na "uobičajeni" način, preko sustava normalnih jednadžbi, koji (u principu) daje rješenje za bilo koju funkciju f. Zatim ćemo iskoristiti da je $f(x) = x^2$ polinom, pa se vrlo lako razvija po odgovarajućim ortogonalnim polinomima za zadane težinske funkcije.

Za zadanu funkciju f i zadanu težinsku funkciju w, nepoznate parametre a_0 i a_1 aproksimacijske funkcije φ određujemo po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata tako da tražimo rješenje minimizacijskog problema

$$S(a_0, a_1) = \int_0^1 w(x)\big(f(x) - (a_0 + a_1 x)\big)^2 \, dx \to \min .$$

Odavde dobivamo sustav normalnih jednadžbi za parametre a_0 i a_1

$$\begin{aligned} s_0 a_0 + s_1 a_1 &= t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 &= t_1 \end{aligned}$$

s koeficijentima

$$s_i = \int_0^1 w(x)\, x^i \, dx, \qquad t_i = \int_0^1 w(x)\, x^i f(x) \, dx.$$

(a) Za Legendreovu težinsku funkciju $w(x) = 1$, koeficijenti linearnog sustava su

$$s_i = \int_0^1 x^i \, dx, \qquad t_i = \int_0^1 x^i \cdot x^2 \, dx = s_{i+2}.$$

Integracijom dobivamo

$$s_i = \int_0^1 x^i \, dx = \frac{x^{i+1}}{i+1} \bigg|_0^1 = \frac{1}{i+1}, \quad i \geq 0.$$

Linearni sustav za a_0 i a_1 je

$$a_0 + \frac{1}{2}\,a_1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}\,a_0 + \frac{1}{3}\,a_1 = \frac{1}{4}.$$

Množenjem prve jednadžbe s $-1/2$ i dodavanjem drugoj, dobivamo

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) a_1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{12}\,a_1 = \frac{1}{12} \quad \Longrightarrow \quad a_1 = 1.$$

Iz prve jednadžbe onda izlazi

$$a_0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.$$

Prva aproksimacijska funkcija je

$$\varphi_1(x) = x - \frac{1}{6}.$$

(b) Za Čebiševljevu težinu $w(x) = 1/\sqrt{x - x^2}$, koeficijenti linearnog sustava su

$$s_i = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}\, x^i\, dx, \qquad t_i = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}\, x^i \cdot x^2\, dx = s_{i+2}.$$

Integrale s_i možemo izračunati na vrlo elegantan način, tako da nađemo **rekurzivnu** relaciju za te integrale. Osnovna ideja je parcijalna integracija u kojoj integriramo težinsku funkciju w. Međutim, ni taj integral nije lako direktno naći. Zato uočimo da $(x - x^2)^{-1/2}$ može nastati **deriviranjem** iz $(x - x^2)^{1/2}$. Preciznije, vrijedi

$$\left(\sqrt{x - x^2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x - x^2}} \cdot (1 - 2x) = \frac{1 - 2x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}.$$

Treba samo "namjestiti" prvi faktor, a to dobivamo odgovarajućom linearnom kombinacijom integrala s_i — treba gledati $(s_i - 2s_{i+1})/2$, za bilo koji $i \geq 0$,

$$\frac{s_i - 2s_{i+1}}{2} = \int_0^1 \frac{x^i - 2x^{i+1}}{2\sqrt{x - x^2}}\, dx = \int_0^1 x^i\, \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}}\, dx.$$

Parcijalnom integracijom dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{s_i - 2s_{i+1}}{2} &= \int_0^1 x^i\, \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}}\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^i & du = i x^{i-1}\, dx \\ dv = \dfrac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}}\, dx & v = \sqrt{x - x^2} \end{matrix} \right\} \\
&= x^i \sqrt{x - x^2}\, \Big|_0^1 - i \int_0^1 x^{i-1} \sqrt{x - x^2}\, dx \\
&= \Big\{ \text{granice: } \sqrt{x - x^2} = 0, \text{ za } x = 0, 1, \text{ i } x - x^2 \geq 0 \text{ na } [0, 1] \Big\} \\
&= -i \int_0^1 x^{i-1}\, \frac{x - x^2}{\sqrt{x - x^2}}\, dx = i \int_0^1 \frac{x^{i+1} - x^i}{\sqrt{x - x^2}}\, dx = i(s_{i+1} - s_i).
\end{aligned}$$

Dakle, integrali s_i zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$\frac{s_i - 2s_{i+1}}{2} = i(s_{i+1} - s_i), \quad i \geq 0.$$

Odavde dobivamo $(2i+1)s_i = (2i+2)s_{i+1}$, ili

$$s_{i+1} = \frac{2i+1}{2i+2}\, s_i, \quad i \geq 0.$$

Treba još samo izračunati početni integral s_0, a to je relativno lako.

Napomena: uobičajeni put za računanje integrala s_i ide dvostrukom supstitucijom. Za početak, prebacujemo problem s intervala $[0,1]$ na standardni interval $[-1,1]$, supstitucijom (afinom transformacijom) $t = 2x - 1$, pa je $t \in [-1,1]$. Onda je

$$x = \frac{t+1}{2}, \qquad x - x^2 = \frac{t+1}{2} - \frac{(t+1)^2}{4} = \frac{2t+2-t^2-2t-1}{4} = \frac{1-t^2}{4}.$$

Nakon ove supstitucije, za koeficijente s_i dobivamo

$$s_i = \int\limits_{-1}^{1} \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \left(\frac{t+1}{2}\right)^i \cdot \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2^i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, (t+1)^i\, dt.$$

Zatim ide "klasična Čebiševljevska" supstitucija $t = \cos\vartheta$, kojom prevodimo problem na interval $[0,\pi]$. Izlazi

$$s_i = \frac{1}{2^i} \int\limits_0^\pi (1+\cos\vartheta)^i\, d\vartheta, \quad i \geq 0.$$

Na kraju, kad izračunamo potencije pod integralom i dobijemo polinom u $\cos\vartheta$, treba još izraziti potencije $\cos^i\vartheta$ preko kosinusa višestrukog kuta ϑ. Potrebne formule su

$$\cos^2\vartheta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\vartheta, \qquad \cos^3\vartheta = \frac{3}{4}\cos\vartheta + \frac{1}{4}\cos 3\vartheta.$$

Ovim putem ima dosta posla da izračunamo potrebne vrijednosti s_i, za $i \leq 3$.

S druge strane, početnu vrijednost s_0 najlakše dobivamo upravo na taj način,

$$s_0 = \int\limits_0^\pi d\vartheta = \pi.$$

Iz rekurzije lako dobivamo preostale koeficijente

$$s_1 = \frac{1}{2}\, s_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad s_2 = \frac{3}{4}\, s_1 = \frac{3\pi}{8}, \qquad s_3 = \frac{5}{6}\, s_2 = \frac{5\pi}{16}.$$

Linearni sustav za a_0 i a_1 je

$$\begin{aligned} \pi\, a_0 + \frac{\pi}{2}\, a_1 &= \frac{3\pi}{8} \\ \frac{\pi}{2}\, a_0 + \frac{3\pi}{8}\, a_1 &= \frac{5\pi}{16}. \end{aligned}$$

Prvo skratimo π u obje jednadžbe. Množenjem prve jednadžbe s $-1/2$ i dodavanjem drugoj, dobivamo

$$\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\right)a_1=\left(\frac{5}{16}-\frac{3}{16}\right) \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{8}\,a_1=\frac{1}{8} \quad\Longrightarrow\quad a_1=1.$$

Iz prve jednadžbe onda izlazi

$$a_0=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}.$$

Druga aproksimacijska funkcija je

$$\varphi_2(x)=x-\frac{1}{8}.$$

Neka je $e(x):=f(x)-\varphi(x)$ funkcija greške aproksimacije φ, funkcije f na intervalu $[a,b]=[0,1]$. Najveća apsolutna greška

$$\|e\|_\infty:=\max_{x\in[0,1]}|e(x)|$$

može se dostići samo u rubovima intervala a, b, ili u nultočkama $x^{(1)}$ prve derivacije greške na otvorenom intervalu (a,b).

Za $e(x)=x^2-(a_0+a_1x)$, prva derivacija greške je

$$e'(x)=f'(x)-a_1=2x-a_1.$$

Iz jednadžbe $e'(x)=0$ odmah dobivamo

$$2x=a_1 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{a_1}{2}.$$

Kako je $a_1=1$ u obje aproksimacije, jedina nultočka od e' u intervalu $[0,1]$ je

$$x^{(1)}=\frac{1}{2}.$$

U toj točki imamo lokalni maksimum apsolutne greške "u sredini" intervala. Kad u obzir uzmemo i rubove intervala, najveća apsolutna pogreška aproksimacije jednaka je

$$\|e\|_\infty=\max\left\{\ |e(0)|,\ \left|e\left(\frac{1}{2}\right)\right|,\ |e(1)|\ \right\}.$$

(a) Za Legendreovu aproksimaciju $\varphi_1(x)=x-1/6$, neka je $e_1:=f(x)-\varphi_1(x)$ pripadna greška. Onda je

$$e_1(0)=\frac{1}{6},\qquad e_1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12},\qquad e_1(1)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6},$$

pa je najveća apsolutna pogreška aproksimacije φ_1 jednaka

$$\|e_1\|_\infty=\frac{1}{6},$$

a dostiže se u **rubovima** intervala. U "sredini" je greška upola manja.

(b) Za Čebiševljevu aproksimaciju $\varphi_2(x) = x - 1/8$, neka je $e_2 := f(x) - \varphi_2(x)$ pripadna greška. Onda je

$$e_2(0) = \frac{1}{8}, \qquad e_2\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = -\frac{1}{8}, \qquad e_2(1) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8},$$

pa je najveća apsolutna pogreška aproksimacije φ_2 jednaka

$$\|e_2\|_\infty = \frac{1}{8}.$$

Uočimo da se ova greška dostiže i u **rubovima**, i u "**sredini**" intervala, s tim da greška **alternira** po predznaku $(+,-,+)$. Upravo to je ključno svojstvo **minimax** aproksimacije — tzv. "ekvioscilacija" greške, pa je φ_2 i minimaks aproksimacija za f na $[0,1]$.

Do traženih aproksimacijskih funkcija možemo doći i **razvojem** funkcije f po odgovarajućim **ortogonalnim** polinomima. Neka je $\{p_k \mid k \geq 0\}$ niz ortogonalnih polinoma na intervalu $[a,b]$ s težinskom funkcijom w, i neka je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k p_k(x)$$

razvoj funkcije f po tim ortogonalnim polinomima. Znamo da za koeficijente c_k vrijedi

$$c_k = \frac{\langle f, p_k \rangle}{\|p_k\|^2}, \quad k \geq 0,$$

u odgovarajućem skalarnom produktu. Neka je φ_n najbolja aproksimacija funkcije f, u smislu najmanjih kvadrata, u prostoru $\mathcal{P}_n$, polinoma stupnja najviše jednakog n. Onda znamo da je φ_n upravo konačni komad razvoja funkcije f, do uključivo člana za $k = n$,

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k p_k(x).$$

No, u našem slučaju, funkcija $f(x) = x^2$ je polinom, pa ima **konačan** razvoj po odgovarajućim ortogonalnim polinomima

$$x^2 = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x).$$

Osim toga, koeficijente ne moramo računati preko integrala, već ih možemo i **direktno** izračunati iz ove relacije.

Trebaju nam samo odgovarajući **ortogonalni** polinomi na $[0,1]$. Njih dobivamo afinom transformacijom iz poznatih polinoma na standardnom intervalu $[-1,1]$. Ako je $t \in [-1,1]$, a $x \in [0,1]$, potrebne afine transformacije (ili supstitucije) su

$$t(x) = 2x - 1, \qquad x(t) = \frac{t+1}{2}.$$

Zadanim težinskim funkcijama $w_1(x) = 1$ i $w_2(x) = 1/\sqrt{x - x^2}$ na $[0,1]$, odgovaraju sljedeće težinske funkcije na $[-1,1]$

$$w_1(x(t)) = 1, \qquad w_2(x(t)) = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Pripadni ortogonalni polinomi su Legendreovi polinomi P_k, odnosno, Čebiševljevi polinomi prve vrste T_k.

(a) Prva tri Legendreova polinoma na intervalu $[-1,1]$ su

$$P_0(t) = 1, \qquad P_1(t) = t, \qquad P_2(t) = \frac{1}{2}\,(3t^2 - 1).$$

Pripadne Legendreove polinome na $[0,1]$ označavamo s P_k^*. Supstitucijom $t = 2x - 1$ dobivamo

$$P_0^*(x) = 1, \qquad P_1^*(x) = 2x - 1, \qquad P_2^*(x) = \frac{1}{2}\,\big(3(2x-1)^2 - 1\big) = 6x^2 - 6x + 1.$$

Razvoj funkcije $f(x) = x^2$ po ovim polinomima ima oblik

$$x^2 = c_0 P_0^*(x) + c_1 P_1^*(x) + c_2 P_2^*(x).$$

Uvrštavanjem i sređivanjem po potencijama od x, izlazi

$$\begin{aligned} x^2 &= c_0 + c_1(2x-1) + c_2(6x^2 - 6x + 1) \\ &= 6c_2x^2 + (2c_1 - 6c_2)x + (c_0 - c_1 + c_2), \end{aligned}$$

tj. dobivamo trokutasti sustav jednadžbi za koeficijente. Traženi koeficijenti su

$$c_2 = \frac{1}{6}, \qquad c_1 = 3c_2 = \frac{1}{2}, \qquad c_0 = c_1 - c_2 = \frac{1}{3}.$$

Razvoj funkcije x^2 po Legendreovim polinomima P_k^* je

$$x^2 = \frac{1}{3}\,P_0^*(x) + \frac{1}{2}\,P_1^*(x) + \frac{1}{6}\,P_2^*(x).$$

Tražena aproksimacija $\varphi_{1,1}$ polinomom **prvog** stupnja je

$$\varphi_{1,1}(x) = c_0 P_0^*(x) + c_1 P_1^*(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\,(2x-1) = x - \frac{1}{6}.$$

(b) Prva tri Čebiševljeva polinoma na intervalu $[-1,1]$ su

$$T_0(t) = 1, \qquad T_1(t) = t, \qquad T_2(t) = 2t^2 - 1.$$

Pripadne Čebiševljeve polinome na $[0,1]$ označavamo s T_k^*. Supstitucijom $t = 2x - 1$ dobivamo

$$T_0^*(x) = 1, \qquad T_1^*(x) = 2x - 1, \qquad T_2^*(x) = \big(2(2x-1)^2 - 1\big) = 8x^2 - 8x + 1.$$

Razvoj funkcije $f(x) = x^2$ po ovim polinomima ima oblik

$$x^2 = c_0 T_0^*(x) + c_1 T_1^*(x) + c_2 T_2^*(x).$$

Uvrštavanjem i sređivanjem po potencijama od x, izlazi

$$\begin{aligned} x^2 &= c_0 + c_1(2x-1) + c_2(8x^2 - 8x + 1) \\ &= 8c_2x^2 + (2c_1 - 8c_2)x + (c_0 - c_1 + c_2), \end{aligned}$$

tj. dobivamo trokutasti sustav jednadžbi za koeficijente. Traženi koeficijenti su

$$c_2 = \frac{1}{8}, \qquad c_1 = 4c_2 = \frac{1}{2}, \qquad c_0 = c_1 - c_2 = \frac{3}{8}.$$

Razvoj funkcije x^2 po Čebiševljevim polinomima T_k^* je

$$x^2 = \frac{3}{8}\,T_0^*(x) + \frac{1}{2}\,T_1^*(x) + \frac{1}{8}\,T_2^*(x).$$

Tražena aproksimacija $\varphi_{1,2}$ polinomom **prvog** stupnja je

$$\varphi_{1,2}(x) = c_0 T_0^*(x) + c_1 T_1^*(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\,(2x-1) = x - \frac{1}{8}.$$

Alternativni put do traženih aproksimacija ide tako da funkciju f transformiramo afino na standardni interval $[-1, 1]$, tamo razvijemo po poznatim ortogonalnim polinomima, a onda nađene aproksimacije afino "vratimo" na polazni interval $[0, 1]$. Ilustracija tog puta je u sljedećem zadatku.

Zadatak 5. Neprekidni najmanji kvadrati — parabola

Zadana je funkcija

$$f(x) = \sin x$$

na intervalu $[0, \pi]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite polinom drugog stupnja, tj. funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

Rješenje. Aproksimaciju φ možemo napisati kao linearnu kombinaciju ortogonalnih polinoma na intervalu $[0, \pi]$ s težinskom funkcijom $w(x) = 1$. Te ortogonalne polinome dobivamo afinom transformacijom Legendreovih polinoma P_k s intervala $[-1, 1]$, pa ih zato označavamo s P_k^*. Tražena aproksimacija polinomom drugog stupnja, po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata, je **početni** komad razvoja zadane funkcije f po tim ortogonalnim polinomima

$$\varphi(x) = c_0 P_0^*(x) + c_1 P_1^*(x) + c_2 P_2^*(x),$$

s tim da za koeficijente c_k vrijedi

$$c_k = \frac{\langle f, P_k^* \rangle}{\|P_k^*\|^2}, \quad k \geq 0,$$

u odgovarajućem skalarnom produktu. Prva tri polinoma P_k^* možemo izračunati slično kao u prošlom zadatku, pa onda nije teško naći ove koeficijente

$$c_k = \frac{\displaystyle\int_0^\pi f(x) P_k^*(x)\, dx}{\displaystyle\int_0^\pi \big(P_k^*(x)\big)^2\, dx}, \quad k \geq 0.$$

No, ako trebamo malo "dulji" komad razvoja, onda računanje polinoma P_k^* zahtijeva dosta posla, i još treba izračunati ove integrale.

Obično je lakše **afino** transformirati zadanu funkciju f na standardni interval i tamo iskoristiti **poznate** ortogonalne polinome. U ovom slučaju, zbog $w(x) = 1$, standardni interval je $[-1, 1]$, a pripadni polinomi su Legendreovi polinomi P_k. Odgovarajuća afina transformacija između varijabli $x \in [0, \pi]$ i $t \in [-1, 1]$ je

$$t(x) = \frac{2}{\pi}\, x - 1, \qquad x(t) = \frac{\pi(t + 1)}{2}.$$

Zadanoj težinskoj funkciji $w(x) = 1$ na $[0, \pi]$, odgovara "ista" težinska funkcija $w(x(t)) = 1$ na $[-1, 1]$. Afina transformacija zadane funkcije f je funkcija g

$$g(t) := f(x(t)) = \sin \frac{\pi(t + 1)}{2}.$$

Neka je ψ aproksimacija funkcije g polinomom drugog stupnja, po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata na $[-1, 1]$ s težinskom funkcijom $w(x(t)) = 1$. Onda je

$$\psi(t) = c_0 P_0(t) + c_1 P_1(t) + c_2 P_2(t),$$

s **istim** koeficijentima (zamjena varijable $x = x(t)$ u integralima)

$$c_k = \frac{\langle g, P_k \rangle}{\|P_k\|^2} = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t) P_k(t)\, dt}{\displaystyle\int_{-1}^{1} \big(P_k(t)\big)^2\, dt}, \quad k \geq 0.$$

Naime, polinome $P_k^*(x)$ smo dobili baš **inverznom** afinom transformacijom $t = t(x)$, tj. vrijedi $P_k^*(x) = P_k(t(x))$, za $k \geq 0$. Traženu aproksimaciju φ, na $[0, \pi]$, onda dobivamo na isti način — afinom transformacijom aproksimacije ψ s $[-1, 1]$, natrag na $[0, \pi]$

$$\varphi(x) = \psi(t(x)) = c_0 P_0(t(x)) + c_1 P_1(t(x)) + c_2 P_2(t(x)).$$

Prednost ovog pristupa je računanje s poznatim polinomima. Na primjer, znamo da je $\|P_k\|^2 = 2/(2k+1)$. Na kraju, sređeni oblik za $\psi(t)$ vraćamo natrag u $\varphi(x)$.

Za početak, izračunajmo integrale u brojnicima koeficijenata c_k,

$$b_k := \int_{-1}^{1} g(t) P_k(t)\, dt = \int_{-1}^{1} P_k(t) \sin \frac{\pi(t+1)}{2}\, dt,$$

za $k = 0, 1, 2$. Ideja je da ove integrale izračunamo direktno u varijabli t, **bez** supstitucije koja podintegralnu funkciju svodi na $\sin x$. U protivnom, ispast će da radimo na $[0, \pi]$ i trebat će nam polinomi P_k^*. Prva tri Legendreova polinoma (na $[-1, 1]$) su

$$P_0(t) = 1, \qquad P_1(t) = t, \qquad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1).$$

Za $k = 0$ dobivamo

$$b_0 = \int_{-1}^{1} \sin \frac{\pi(t+1)}{2}\, dt = -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi(t+1)}{2} \Big|_{-1}^{1} = -\frac{2}{\pi}(\cos \pi - \cos 0) = \frac{4}{\pi}.$$

Ostali integrali, za $k \geq 1$, računaju se parcijalnom integracijom.

$$b_1 = \int_{-1}^{1} t \sin \frac{\pi(t+1)}{2}\, dt = \left\{ \begin{array}{ll} u = t & du = dt \\ dv = \sin \dfrac{\pi(t+1)}{2}\, dt & v = -\dfrac{2}{\pi} \cos \dfrac{\pi(t+1)}{2} \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi} \left(t \cos \frac{\pi(t+1)}{2} \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \cos \frac{\pi(t+1)}{2}\, dt \right)$$

$$= -\frac{2}{\pi} \left(1 \cdot \cos \pi - (-1) \cdot \cos 0 - \int_{-1}^{1} \cos \frac{\pi(t+1)}{2}\, dt \right) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \cos \frac{\pi(t+1)}{2}\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi(t+1)}{2} \Big|_{-1}^{1} \right) = \frac{4}{\pi^2}(\sin \pi - \sin 0) = 0.$$

Zadnji brojnik b_2 računamo dvostrukom parcijalnom integracijom.

$$b_2 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,(3t^2 - 1)\,\sin\frac{\pi(t+1)}{2}\,dt = \left\{ \begin{array}{ll} u = \dfrac{1}{2}\,(3t^2-1) & du = 3t\,dt \\ dv = \sin\dfrac{\pi(t+1)}{2}\,dt & v = -\dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{\pi(t+1)}{2} \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\,(3t^2-1)\,\cos\frac{\pi(t+1)}{2}\,\Big|_{-1}^{1} - 3\int_{-1}^{1} t\,\cos\frac{\pi(t+1)}{2}\,dt\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(1\cdot\cos\pi - 1\cdot\cos 0 - 3\int_{-1}^{1} t\,\cos\frac{\pi(t+1)}{2}\,dt\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(2 + 3\int_{-1}^{1} t\,\cos\frac{\pi(t+1)}{2}\,dt\right) = \left\{ \begin{array}{ll} u = t & du = dt \\ dv = \cos\dfrac{\pi(t+1)}{2}\,dt & v = \dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi(t+1)}{2} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(2 + 3\cdot\frac{2}{\pi}\left(t\,\sin\frac{\pi(t+1)}{2}\,\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\sin\frac{\pi(t+1)}{2}\,dt\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(2 + \frac{6}{\pi}\left(1\cdot\sin\pi - (-1)\cdot\sin 0 - \int_{-1}^{1}\sin\frac{\pi(t+1)}{2}\,dt\right)\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{3}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin\frac{\pi(t+1)}{2}\,dt\right) = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{3}{\pi}\cdot\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi(t+1)}{2}\,\Big|_{-1}^{1}\right)\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{6}{\pi^2}\,(\cos\pi - \cos 0)\right) = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right).$$

Kad iskoristimo $\|P_0\|^2 = 2$, $\|P_1\|^2 = 2/3$ i $\|P_2\|^2 = 2/5$, dobivamo tražene koeficijente

$$c_0 = \frac{1}{2}\,b_0 = \frac{2}{\pi}, \qquad c_1 = \frac{3}{2}\,b_1 = 0, \qquad c_2 = \frac{5}{2}\,b_2 = \frac{10}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right).$$

Aproksimacija ψ funkcije $g(t) = \sin(\pi(t+1)/2)$ polinomom drugog stupnja na $[-1,1]$ je

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi}\,P_0(t) + \frac{10}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right)P_2(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right)\cdot\frac{1}{2}\,(3t^2 - 1).$$

Ovaj oblik se ne isplati dalje sređivati, jer ga još treba vratiti na $[0,\pi]$, da dobijemo φ. Transformacija (supstitucija) je

$$t(x) = \frac{2}{\pi}\,x - 1.$$

Prvo transformiramo samo polinom P_2. Izlazi

$$P_2^*(x) = P_2(t(x)) = \frac{1}{2}\left(3\left(\frac{2}{\pi}\,x - 1\right)^2 - 1\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{6}{\pi^2}\,x^2 - \frac{6}{\pi}\,x + 1 = \frac{6}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Prvi oblik polinoma P_2^* pogodan je za zapis aproksimacije φ u standardnoj bazi potencija

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right)\left(\frac{6}{\pi^2}\,x^2 - \frac{6}{\pi}\,x + 1\right). \\ &= \frac{60}{\pi^3}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right)x^2 \;-\; \frac{60}{\pi^2}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right)x \;+\; \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right).\end{aligned}$$

Koeficijenti a_k tražene aproksimacije φ, funkcije $f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$, su

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{12}{\pi} - \frac{120}{\pi^3} = -5.0465497778 \cdot 10^{-2}, \\ a_1 &= \frac{720}{\pi^4} - \frac{60}{\pi^2} = \quad 1.3122362048, \\ a_2 &= \frac{60}{\pi^3} - \frac{720}{\pi^5} = -4.1769775701 \cdot 10^{-1}.\end{aligned}$$

Može se pokazati da je najveća apsolutna greška ove aproksimacije za $\sin x$ na $[0, \pi]$ baš jednaka $|a_0| = 5.0465497778 \cdot 10^{-2}$, a dostiže se u **rubnim** točkama 0 i π.

Iz drugog oblika polinoma P_2^* odmah dobivamo prikaz aproksimacije φ preko Legendreovih polinoma P_k^*

$$\varphi(x) = c_0 P_0^*(x) + c_1 P_1^*(x) + c_2 P_2^*(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right)\left(\frac{6}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right).$$

Sređivanjem po potencijama od $(x - \pi/2)$ dobivamo i

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{2}{\pi} - \frac{5}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right) + \frac{60}{\pi^3}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{60}{\pi^3} - \frac{3}{\pi}\right) + \left(\frac{60}{\pi^3} - \frac{720}{\pi^5}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Ovaj rezultat iskoristit ćemo za kontrolu drugog puta do rješenja ovog zadatka.

Nepoznate koeficijente aproksimacijske funkcije φ možemo naći i direktno — minimizacijom greške po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata, što vodi na sustav normalnih jednadžbi. Obzirom na to da interval $[0, \pi]$ **nije** simetričan oko nule, zapisom funkcije φ u standardnoj bazi potencija

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

dobivamo **puni** linearni sustav za koeficijente.

Uočimo da je težnska funkcija $w(x) = 1$ simetrična ili "**parna**" oko polovišta $\pi/2$ zadanog intervala $[0, \pi]$. U tom slučaju, ako želimo brži račun "na ruke", isplati se uzeti malo drugačiju bazu za zapis funkcije φ, tako da približno **polovina** koeficijenata u matrici sustava normalnih jednadžbi bude jednaka **nuli**. Drugim riječima, treba iskoristiti "**neparnost**" oko polovišta zadanog intervala.

Baza potencija $(x - \pi/2)^k$ sadrži funkcije koje su simetrične (parne ili neparne) oko polovišta intervala $[0, \pi]$. Integrali **neparnih** potencija jednaki su nuli, zbog parnosti težinske funkcije. Zato funkciju φ prikazujemo u toj bazi

$$\varphi(x) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \tilde{a}_2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Osim toga, odmah se vidi da je $f(x) = \sin x$ "parna" funkcija oko $\pi/2$, pa zapis aproksimacije φ u toj bazi sadrži samo **parne** potencije od $(x - \pi/2)$. Tj. moramo dobiti $\tilde{a}_1 = 0$.

Koeficijente ili parametre aproksimacijske funkcije φ određujemo po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata

$$S(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \int_0^\pi w(x)\Big(f(x) - \Big[\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) + \tilde{a}_2\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2\Big]\Big)^2 \, dx \to \min.$$

Rješenje tog problema daje sustav normalnih jednadžbi za parametre $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$ i $\tilde{a}_2$

$$\begin{aligned} s_0\tilde{a}_0 + s_1\tilde{a}_1 + s_2\tilde{a}_2 &= t_0 \\ s_1\tilde{a}_0 + s_2\tilde{a}_1 + s_3\tilde{a}_2 &= t_1 \\ s_2\tilde{a}_0 + s_3\tilde{a}_1 + s_4\tilde{a}_2 &= t_2 \end{aligned}$$

s koeficijentima

$$s_i = \int_0^\pi w(x)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^i dx, \qquad t_i = \int_0^\pi w(x)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^i f(x)\, dx.$$

Za Legendreovu težinsku funkciju $w(x) = 1$ i zadanu funkciju $f(x) = \sin x$, koeficijenti linearnog sustava su

$$s_i = \int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^i dx, \qquad t_i = \int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^i \sin x\, dx.$$

Integracijom dobivamo

$$s_i = \int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^i dx = \frac{1}{i+1}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^{i+1}\Bigg|_0^\pi = \frac{1}{i+1}\big(1 - (-1)^{i+1}\big)\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{i+1},$$

pa za $i \geq 0$ vrijedi

$$s_i = \begin{cases} \dfrac{2}{i+1}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{i+1}, & i \text{ paran}, \\ 0, & i \text{ neparan}. \end{cases}$$

Odavde vidimo da se linearni sustav za koeficijente "**raspada**" na dva manja **nezavisna** sustava — za koeficijente s parnim, odnosno, neparnim indeksima,

$$\begin{aligned} s_0\tilde{a}_0 + s_2\tilde{a}_2 &= t_0 \\ s_2\tilde{a}_0 + s_4\tilde{a}_2 &= t_2 \end{aligned}, \qquad s_2\tilde{a}_1 = t_1.$$

Upravo to je i bio cilj ovakvog izbora baze. Koeficijenti u matricama ovih sustava su

$$s_0 = \pi, \qquad s_2 = \frac{\pi^3}{12}, \qquad s_4 = \frac{\pi^5}{80}.$$

Treba još izračunati koeficijente t_i na desnim stranama ovih sustava. Prvog dobivamo odmah

$$t_0 = \int_0^\pi \sin x\, dx = -\cos x\,\Bigg|_0^\pi = -(-1-1) = 2.$$

Preostala dva računamo parcijalnom integracijom. Redom, izlazi

$$t_1 = \int\limits_0^{\pi} \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) \sin x\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x - \dfrac{\pi}{2} & du = dx \\ dv = \sin x\, dx & v = -\cos x \end{matrix} \right\}$$

$$= -\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) \cos x \,\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \cos x\, dx$$

$$= -\bigg(\frac{\pi}{2} \cdot (-1) - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) \cdot 1\bigg) + \sin x \,\Big|_0^{\pi}$$

$$= \sin \pi - \sin 0 = 0.$$

Iz "neparnog" dijela sustava, tj. jednadžbe $s_2 \tilde{a}_1 = t_1$, onda slijedi $\tilde{a}_1 = 0$, prema očekivanju. Za zadnji koeficijent t_2 dobivamo

$$t_2 = \int\limits_0^{\pi} \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2 \sin x\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = \Big(x - \dfrac{\pi}{2}\Big)^2 & du = 2\Big(x - \dfrac{\pi}{2}\Big) dx \\ dv = \sin x\, dx & v = -\cos x \end{matrix} \right\}$$

$$= -\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2 \cos x \,\Big|_0^{\pi} + 2 \int\limits_0^{\pi} \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) \cos x\, dx$$

$$= -\bigg(\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2 \cdot (-1) - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big)^2 \cdot 1\bigg) + 2 \int\limits_0^{\pi} \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) \cos x\, dx$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + 2 \int\limits_0^{\pi} \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) \cos x\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x - \dfrac{\pi}{2} & du = dx \\ dv = \cos x\, dx & v = \sin x \end{matrix} \right\}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + 2\bigg(\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) \sin x \,\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx\bigg)$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + 2\bigg(\frac{\pi}{2} \cdot 0 - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) \cdot 0 + \cos x \,\Big|_0^{\pi}\bigg)$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + 2(\cos \pi - \cos 0) = \frac{\pi^2}{2} - 4.$$

Linearni sustav za "parne" koeficijente $\tilde{a}_0$ i $\tilde{a}_2$ je

$$\pi\, \tilde{a}_0 + \frac{\pi^3}{12}\, \tilde{a}_2 = 2$$

$$\frac{\pi^3}{12}\, \tilde{a}_0 + \frac{\pi^5}{80}\, \tilde{a}_2 = \frac{\pi^2}{2} - 4$$

Množenjem prve jednadžbe s $-\pi^2/12$ i dodavanjem drugoj, dobivamo

$$\bigg(\frac{\pi^5}{80} - \frac{\pi^3}{12} \cdot \frac{\pi^2}{12}\bigg) \tilde{a}_2 = \frac{\pi^2}{2} - 4 - 2\, \frac{\pi^2}{12}$$

Sređivanjem izlazi

$$\frac{9-5}{720}\,\pi^5\,\tilde{a}_2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\pi^5}{180}\,\tilde{a}_2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \quad\Longrightarrow\quad \tilde{a}_2 = \frac{60}{\pi^3} - \frac{720}{\pi^5}.$$

Iz prve jednadžbe onda slijedi

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi}\left(2 - \frac{\pi^3}{12}\left(\frac{60}{\pi^3} - \frac{720}{\pi^5}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(2 - 5 + \frac{60}{\pi^2}\right) = \frac{60}{\pi^3} - \frac{3}{\pi}.$$

Tražena aproksimacijska funkcija je

$$\varphi(x) = \left(\frac{60}{\pi^3} - \frac{3}{\pi}\right) + \left(\frac{60}{\pi^3} - \frac{720}{\pi^5}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Dakle, dobili smo isti rezultat kao i ranije, preko Legendreove baze.

Zadatak 6. Neprekidni najmanji kvadrati — razvoj po Čebiševljevim polinomima

Zadana je funkcija

$$f(x) = \arcsin x$$

na intervalu $[-1, 1]$. Nađite razvoj ove funkcije po Čebiševljevim polinomima prve vrste.

Rješenje. Čebiševljevi polinomi prve vrste T_k, za $k \geq 0$, su ortogonalni na intervalu $[-1, 1]$ s težinskom funkcijom $w(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$. Relacije ortogonalnosti su

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_k(x)\, T_\ell(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ \pi, & k = \ell = 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & k = \ell > 0. \end{cases}$$

Razvoj funkcije f po Čebiševljevim polinomima prve vrste ima oblik

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x),$$

s tim da za koeficijente c_k vrijedi

$$c_k = \frac{\langle f, T_k \rangle}{\|T_k\|^2}, \quad k \geq 0,$$

u odgovarajućem integralnom skalarnom produktu. Zbog $\|T_0\|^2 = 2\|T_k\|^2$, za $k \geq 1$, razvoj se obično piše kao i kod Fourierovih redova — s "polovičnim" prvim koeficijentom,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x),$$

tako da za sve koeficijente vrijedi "ista" formula

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\, T_k(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx, \quad k \geq 0.$$

Stvarne koristi nema. Najčešće, za $k = 0$, ovaj integral treba posebno izračunati.

Za zadanu funkciju $f(x) = \arcsin x$, koeficijenti u razvoju su

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\arcsin x \cdot T_k(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx, \quad k \geq 0.$$

Znamo da je $\arcsin x$ **neparna** funkcija na intervalu $[-1, 1]$, a Čebiševljevi polinomi T_k imaju istu parnost kao i indeks k. Odavde odmah možemo zaključiti da su svi koeficijenti **parnog** indeksa jednaki **nuli** — integral neparne funkcije je nula.

No, namjerno, to nećemo odmah iskoristiti, zato da pokažemo jedan zgodan **argument** pri računanju ovih integrala za opći k, jer se taj argument može "izgubiti" kad računamo samo koeficijente neparnog indeksa.

Ovaj integral rješavamo standardnom supstitucijom $x = \cos\varphi$, koristeći "definicijsku" relaciju za Čebiševljeve polinome prve vrste

$$T_k(\cos\varphi) = \cos k\varphi, \quad k \geq 0.$$

Za granice integracije vrijedi $-1 = \cos\pi$ i $1 = \cos 0$. Nakon supstitucije dobivamo

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{0} \frac{\arcsin(\cos\varphi)\cdot\cos k\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}\,(-\sin\varphi)\,d\varphi = \left\{\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sin\varphi, \text{za } \varphi\in[0,\pi]\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \arcsin(\cos\varphi)\cdot\cos k\varphi\,d\varphi.$$

Sad nam treba veza između $\arcsin(\cos\varphi)$ i $\varphi = \arccos(\cos\varphi)$. Tu treba biti **oprezan**, obzirom na to da je $\varphi\in[0,\pi]$, a **standardno** područje vrijednosti funkcije arcsin je interval $[-\pi/2,\pi/2]$. Znamo da za svaki $\varphi\in\mathbb{R}$ vrijedi

$$\cos\varphi = \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right).$$

Kad na ovu relaciju primijenimo funkciju arcsin, dobivamo da je

$$\arcsin(\cos\varphi) = \arcsin\left(\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

I sad, oprez! Na desnoj strani smijemo "skratiti" arcsin i sin, tako da dobijemo

$$\arcsin(\cos\varphi) = \varphi+\frac{\pi}{2},$$

ako i samo ako je $\varphi+\pi/2\in[-\pi/2,\pi/2]$, a to vrijedi **samo** za $\varphi\in[-\pi,0]$. Dakle, to **nije** dobro! Kut φ ima **krivi** predznak.

Međutim, to upućuje na korektan pristup stvarima — treba promijeniti predznak kuta u početnoj relaciji. Za svaki $\varphi\in\mathbb{R}$ vrijedi

$$\cos\varphi = \cos(-\varphi) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right).$$

Kad na ovu relaciju primijenimo funkciju arcsin, dobivamo da je

$$\arcsin(\cos\varphi) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right)$$

Opet, na desnoj strani smijemo "skratiti" arcsin i sin, ako i samo je $\pi/2-\varphi\in[-\pi/2,\pi/2]$, a to vrijedi za $\varphi\in[0,\pi]$. Dakle, sad je **dobro**, i dobivamo

$$\arcsin(\cos\varphi) = \frac{\pi}{2}-\varphi.$$

Prije nastavka računanja koeficijenata, objasnimo još zašto se ovaj argument može "izgubiti", kad gledamo samo neparne koeficijente a_{2k+1}. Onda je podintegralna funkcija **parna**, pa možemo prijeći na (dvostruki) integral po polovini intervala $[0,\pi/2]$,

$$a_{2k+1} = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \arcsin(\cos\varphi)\cdot\cos(2k+1)\varphi\,d\varphi, \quad k\geq 0.$$

Ovdje je svejedno koji predznak od φ uzmemo, pa možemo raditi i na $[-\pi/2,0]$ (zamjena $\varphi\mapsto-\varphi$), s istim rezultatom. No, onda vrijedi prva formula $\arcsin(\cos\varphi)=\varphi+\pi/2$.

Nakon uvrštavanja $\arcsin(\cos\varphi) = \pi/2 - \varphi$ dobivamo

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\cos k\varphi\, d\varphi.$$

Za $k = 0$, ovaj integral računamo posebno.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) d\varphi = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\,\varphi - \frac{1}{2}\,\varphi^2\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} - (0-0)\right) = 0.$$

Sve ostale integrale, za $k \geq 1$, računamo parcijalnom integracijom.

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\cos k\varphi\, d\varphi = \int_0^{\pi}\cos k\varphi\, d\varphi - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi\,\cos k\varphi\, d\varphi \\
&= \frac{1}{k}\sin k\varphi\,\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi\,\cos k\varphi\, d\varphi = \{\text{granice: } \sin k\pi = \sin 0 = 0\} \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi\,\cos k\varphi\, d\varphi = \left\{\begin{matrix} u = \varphi & du = d\varphi \\ dv = \cos k\varphi\, d\varphi & v = \dfrac{1}{k}\sin k\varphi \end{matrix}\right\} \\
&= -\frac{2}{k\pi}\left(\varphi\,\sin k\varphi\,\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin k\varphi\, d\varphi\right) = \{\text{granice: } \sin k\pi = \sin 0 = 0\} \\
&= \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin k\varphi\, d\varphi = \frac{2}{k\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos k\varphi\right)\Big|_0^{\pi} \\
&= \big\{\text{granice: } \cos k\pi = (-1)^k,\ \cos 0 = 1\big\} = -\frac{2}{k^2\pi}\Big((-1)^k - 1\Big) \\
&= \frac{2}{k^2\pi}\Big(1 - (-1)^k\Big).
\end{aligned}$$

Na kraju, dobivamo da je

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{4}{k^2\pi}, & k \text{ neparan}, \\ 0, & k \text{ paran}. \end{cases}$$

Dakle, razvoj funkcije $f(x) = \arcsin x$ po Čebiševljevim polinomima prve vrste je

$$\arcsin x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\,T_{2k+1}(x) = \frac{4}{\pi}\left(T_1(x) + \frac{1}{9}\,T_3(x) + \frac{1}{25}\,T_5(x) + \cdots\right).$$

Uočimo da koeficijenti u razvoju relativno **sporo** padaju

$$a_k = O(k^{-2}), \quad k \to \infty,$$

što odgovara činjenici da $\arcsin x$ ima neograničenu derivaciju u rubovima intrevala.

Funkcija $f(x) = \arcsin x$ je jedna od rijetkih funkcija za koju se koeficijenti u razvoju po Čebiševljevim polinomima mogu eksplicitno izračunati.

Zadatak. Nađite razvoj funkcije $f(x) = \arccos x$ po Čebiševljevim polinomima prve vrste.

Literatura

1. Murray R. Spiegel: Fourier Analysis, Schaum's Outline series, McGraw–Hill, New York, 1974.

   Problem 2.6, 2.7 (str. 28–29), Problem 2.11 (str. 31–32).

2. Francis Scheid: Numerical Analysis, Schaum's Outline series, McGraw–Hill, New York, 1968.

   Problem 21.31 (str. 252), Problem 21.49 (str. 256–257), Problem 21.32 (str. 252), Supplementary problem 21.89 (str. 263).