

Numerička matematika

13. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Rješavanje nelinearnih jednažbi (nastavak):
 - Metoda jednostavne iteracije.
 - Metode višeg reda konvergencije.
 - Newtonova metoda za višestruke nultočke.
 - Primjeri za jednostruke i višestruke nultočke.
 - Primjeri metoda višeg reda konvergencije.

Informacije — dogovor za usmeni, ocjene

Za eventualni **usmeni** (po želji/“kazni”):

- 📌 pogledati **obavijest** na **webu**, uz **rezultate** kolokvija!

Uobičajeno,

- 📌 **dogovor za usmeni** je u vrijeme **uvida** (ne kasnije), a **usmeni** je nekoliko dana kasnije.

Više **nema** indeksa — pa **nema** ni **upisa ocjena**.

- 📌 Ocjene šaljemo na upis u **ISVU** (studomat) nekoliko dana **nakon** uvida, a najkasnije dan nakon usmenih.

Metoda jednostavne iteracije

Uvodno o metodi jednostavne iteracije

Problem. Pretpostavimo da tražimo **rješenje** jednadžbe

$$x = \varphi(x).$$

Točke α za koje je $\alpha = \varphi(\alpha)$ zovu se **fiksne točke** funkcije φ .

Ideja. Definiramo **jednostavnu iteracijsku** funkciju (iteracijsku funkciju koja “**pamti**” samo **jednu** prethodnu točku), s

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0,$$

uz x_0 kao neku **početnu** aproksimaciju za α .

Primjer. **Newtonovu** metodu možemo interpretirati i kao jednostavnu iteraciju, uz

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Reformulacija problema $f(x) = 0$

Uobičajeno, rješavamo jednačbu $f(x) = 0$, pa taj problem treba **reformulirati** u problem jednostavne **iteracije**, odnosno, traženja **fiksne točke**. Za to postoji **mного načina**.

Primjer. Reformulirajmo problem “**kvadratnog korijena**” iz a

$$f(x) = x^2 - a = 0, \quad \text{za } a > 0,$$

u oblik **jednostavne iteracije**.

To možemo napraviti na razne načine. Nekoliko mogućnosti:

1. $x = x^2 + x - a$ (dodamo x na obje strane) ili, općenitije, $x = x + c(x^2 - a)$, za neki $c \neq 0$,
2. $x = a/x$,
3. $x = \frac{1}{2}(x + a/x)$, što izlazi iz $x = x + \frac{1}{2}(a/x - x)$.

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Prirodno je pitanje kako se različite jednostavne iteracije ponašaju. Odgovor dobivamo sljedećim nizom tvrdnji.

Lema (Egzistencija). Neka je funkcija φ neprekidna na $[a, b]$ i neka je

$$a \leq \varphi(x) \leq b, \quad \forall x \in [a, b],$$

u oznaci $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$. Tada jednostavna iteracija $x = \varphi(x)$ ima bar jedno rješenje, tj. bar jednu fiksnu točku α , na $[a, b]$.

Dokaz. Za neprekidnu funkciju $g(x) = \varphi(x) - x$ na $[a, b]$ vrijedi

$$g(a) = \varphi(a) - a \geq 0, \quad g(b) = \varphi(b) - b \leq 0.$$

Dakle, funkcija $g(x) = \varphi(x) - x$ mijenja predznak na $[a, b]$, a to može samo prolaskom kroz nultočku α (neprekidna je!). ■

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Teorem (Kontrakcija). Neka je funkcija φ neprekidna na $[a, b]$ i neka je

$$\varphi([a, b]) \subseteq [a, b].$$

Pretpostavimo da postoji konstanta q , takva da je $0 < q < 1$, i vrijedi

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

To svojstvo kaže da je φ kontrakcija na $[a, b]$ (približava točke).

Onda funkcija φ ima jedinstvenu fiksnu točku α unutar $[a, b]$.

Nadalje, za proizvoljnu startnu točku $x_0 \in [a, b]$, niz iteracija

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

konvergira prema α .

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Dokaz. Prema prethodnoj lemi, **postoji bar jedna** fiksna točka $\alpha \in [a, b]$. Pokažimo da **ne može** postojati **više** od **jedne**.

Pretpostavimo **suprotno**, tj. da postoje **barem dvije** fiksne točke. Uzmimo **bilo koje dvije** od njih, nazovimo ih α i β . Budući da su to fiksne točke za φ , onda vrijedi

$$\varphi(\alpha) = \alpha \quad \text{i} \quad \varphi(\beta) = \beta.$$

Po pretpostavci, funkcija φ je **kontrakcija** na $[a, b]$, pa je

$$|\alpha - \beta| = |\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)| \leq q|\alpha - \beta|,$$

odakle slijedi

$$(1 - q)|\alpha - \beta| \leq 0.$$

Zbog $1 - q > 0$, mora biti $\alpha = \beta$, što dokazuje i **jedinstvenost**.

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Dokažimo još **konvergenciju** niza jednostavnih iteracija $(x_n = \varphi(x_{n-1}), n \geq 1)$, za **proizvoljnu** startnu točku $x_0 \in [a, b]$.

Uočimo da $x_{n-1} \in [a, b]$ povlači da je $x_n = \varphi(x_{n-1}) \in [a, b]$.
Nadalje, jer je φ **kontrakcija**, vrijedi

$$|\alpha - x_n| = |\varphi(\alpha) - \varphi(x_{n-1})| \leq q|\alpha - x_{n-1}|.$$

Odavde, **indukcijom** po n , dobivamo

$$|\alpha - x_n| \leq q^n |\alpha - x_0|, \quad n \geq 1.$$

Ako pustimo $n \rightarrow \infty$, onda $q^n \rightarrow 0$, pa vrijedi $x_n \rightarrow \alpha$. ■

Primijetimo da posljednja formula znači da metoda **jednostavne iteracije** konvergira **linearno**, s faktorom q .

Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

Uz pretpostavke prethodnog teorema — da je

• φ neprekidna kontrakcija s faktorom $q < 1$ na $[a, b]$,
lako se izvodi ocjena greške za metodu jednostavne iteracije.

Za dvije susjedne iteracije $x_n = \varphi(x_{n-1})$ i $x_{n-1} = \varphi(x_{n-2})$ vrijedi

$$|x_n - x_{n-1}| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})| \leq q|x_{n-1} - x_{n-2}|.$$

Prethodnu relaciju, induktivno po n , možemo raspisati kao

$$|x_n - x_{n-1}| \leq q|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq q^{n-1}|x_1 - x_0|.$$

Za ocjenu prave greške trebamo ocjenu vrijednosti $|\alpha - x_n|$, za bilo koji $n \geq 0$.

Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

Zato, za **fiksni** n , gledamo ponašanje niza $|x_{n+p} - x_n|$, uz $p > 0$, s idejom da napravimo limes $p \rightarrow \infty$. Izlazi

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - \cdots + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq q^p |x_n - x_{n-1}| + \cdots + q |x_n - x_{n-1}| \\ &= q(q^{p-1} + \cdots + 1) |x_n - x_{n-1}| \\ &= q \frac{1 - q^p}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \leq (\text{vrijedi } 1 - q^p \leq 1) \\ &\leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}|. \end{aligned}$$

Na limesu kad $p \rightarrow \infty$, vrijedi $x_{n+p} \rightarrow \alpha$.

Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

Lijeva strana postaje $|\alpha - x_n|$ i izlazi sljedeća **ocjena pogreške**

$$\begin{aligned} |\alpha - x_n| &\leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \\ &\leq (\text{iskoristimo ocjenu } |x_n - x_{n-1}| \leq q^{n-1} |x_1 - x_0|) \\ &\leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Ako želimo da je $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$, **dovoljno** je tražiti da je **desna** strana **neke** od prethodnih nejednakosti **manja ili jednaka** ε .

Za **desnu** stranu možemo uzeti i **prvi** red, koji **ovisi** o x_n i x_{n-1} ,

$$\frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon,$$

pa ćemo dobiti ...

Kriteriji zaustavljanja

... **dinamički** kriterij za zaustavljanje procesa **iteracija**

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{\varepsilon(1 - q)}{q}.$$

Ako želimo “**rano**” znati potreban broj **iteracija** n , onda treba zahtijevati (donji red ovisi samo o **prve dvije** iteracije x_0 i x_1)

$$\frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon,$$

pa dobivamo

$$n \geq \frac{\log \frac{\varepsilon(1 - q)}{|x_1 - x_0|}}{\log q} = \frac{\log \varepsilon + \log(1 - q) - \log |x_1 - x_0|}{\log q}.$$

Kriteriji zaustavljanja

Kriterij zaustavljanja možemo napisati i tako da ovisi **samo** o **rubovima** intervala a i b , **neovisno** o iteracijama.

U **drugoj** lemi, kod dokaza konvergencije, pokazali smo da vrijedi

$$|\alpha - x_n| \leq q^n |\alpha - x_0|.$$

Za start x_0 vrijedi $|\alpha - x_0| \leq b - a$, pa je $|\alpha - x_n| \leq q^n (b - a)$.
Iz zahtjeva

$$q^n (b - a) \leq \varepsilon,$$

dobivamo ocjenu “**unaprijed**” za broj **iteracija** n

$$n \geq \frac{\log \frac{\varepsilon}{b - a}}{\log q} = \frac{\log \varepsilon - \log(b - a)}{\log q}.$$

Opći slučaj — kontrakcija i Banachov teorem

Napomena. U općem slučaju metode jednostavnih iteracija (ili sukcesivnih aproksimacija), iteracijska funkcija φ ne mora biti neprekidna — što smo koristili u prvoj lemi (egzistencija α).

Dovoljno je pretpostaviti da je

• φ kontrakcija, ali na potpunom metričkom prostoru X .

To je tzv. Banachov teorem o fiksnoj točki.

Skica dokaza. Prvo se dokaže da je niz iteracija Cauchyjev niz (kao u ocjeni greške, uz zamjenu $|x - y|$ s $d(x, y) =$ udaljenost)

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

Zatim, potpunost prostora $X \implies$ konvergencija niza $x_n \rightarrow \alpha$.
Na kraju se pokaže da je α fiksna točka za φ i jedinstvenost. ■

Derivabilne iteracijske funkcije i metode višeg reda

Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije

Pretpostavimo sad da je φ neprekidno derivabilna na $[a, b]$.

Po teoremu srednje vrijednosti, za bilo koje $x, y \in [a, b]$, vrijedi

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x - y),$$

gdje je ξ između x i y , tj. vrijedi $\xi \in [a, b]$. Definiramo

$$q := M_1 = \max_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)|.$$

Onda možemo pisati

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Primijetite da q , općenito, može biti i veći od 1. No, ako je $q < 1$ i još vrijedi $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$, onda je φ kontrakcija.

Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije

Teorem. Neka je $\varphi \in C^1[a, b]$, takva da je $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$.
Ako je

$$q := M_1 = \max_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)| < 1,$$

onda jednačba $x = \varphi(x)$ ima **tačno jedno** rješenje $\alpha \in [a, b]$.

• Za **proizvoljnu** startnu točku $x_0 \in [a, b]$ i niz **jednostavnih iteracija** definiran s $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, za $n \geq 0$, vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha,$$

$$|\alpha - x_n| \leq q^n |\alpha - x_0|, \quad n \geq 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \varphi'(\alpha).$$

Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije

Dokaz. Sve tvrdnje ovog teorema su dokazane u prethodnom teoremu, osim zadnje tvrdnje o **linearnoj brzini konvergencije**.

Po teoremu **srednje vrijednosti**, imamo

$$\alpha - x_{n+1} = \varphi(\alpha) - \varphi(x_n) = \varphi'(\xi_n)(\alpha - x_n), \quad n \geq 0,$$

gdje je ξ_n neki broj **između** α i x_n .

Budući da $x_n \rightarrow \alpha$, onda i $\xi_n \rightarrow \alpha$. Zbog **neprekidnosti** derivacije φ' u fiksnoj točki α , onda vrijedi i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'(\xi_n) = \varphi'(\alpha). \quad \blacksquare$$

Bitna pretpostavka $q < 1$

Pretpostavka $q < 1$ u prethodnom teoremu je **ključna**.

Kontraprimjer. Pretpostavimo “samo” da je $|\varphi'(\alpha)| > 1$, u **fiksnoj točki** α funkcije φ .

Za neku **startnu** točku $x_0 \in [a, b]$, generiramo niz **jednostavnih iteracija** $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Zbog $\alpha = \varphi(\alpha)$, onda vrijedi

$$\alpha - x_{n+1} = \varphi(\alpha) - \varphi(x_n) = \varphi'(\xi_n)(\alpha - x_n).$$

Za bilo koji x_n **dovoljno blizu** α , **mora** biti $|\varphi'(\xi_n)| > 1$. Ako je $x_n \neq \alpha$, onda je

$$|\alpha - x_{n+1}| > |\alpha - x_n|.$$

Dakle, **konvergencija** metode **nije moguća**! Upravo suprotno, imamo **divergenciju** (iteracije se udaljuju od α , ako su blizu α).

Pojednostavljeni — “lokalni” teorem

Prethodni teorem možemo izreći i u “lokalnoj” formi — oko α .

Teorem. Neka je α rješenje jednostavne iteracije $x = \varphi(x)$ i neka je φ neprekidno diferencijabilna na nekoj okolini od α . Ako je $|\varphi'(\alpha)| < 1$, onda vrijede svi rezultati prethodnog teorema — uz pretpostavku da je start x_0 dovoljno blizu α .

Dokaz. Postoji $\varepsilon > 0$ takav da za interval $I = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ vrijedi

$$\max_{x \in I} |\varphi'(x)| \leq q < 1.$$

Tada je $\varphi(I) \subseteq I$ (dovoljno je $q \leq 1$), jer $|\alpha - x| \leq \varepsilon$ povlači

$$|\alpha - \varphi(x)| = |\varphi(\alpha) - \varphi(x)| = |\varphi'(\xi)| |\alpha - x| \leq q |\alpha - x| \leq \varepsilon.$$

Sada možemo primijeniti prethodni teorem za $[a, b] = I$. ■

Primjer iteracijskih funkcija za \sqrt{a}

Primjer. Za problem $x^2 - a = 0$, gdje je $a > 0$, definirali smo tri jednostavne iteracijske funkcije:

1. $x = x^2 + x - a$, ili općenitije, $x = x + c(x^2 - a)$, za $c \neq 0$,
2. $x = a/x$,
3. $x = \frac{1}{2}(x + a/x)$.

Ispitajte **konvergenciju** ovih iteracijskih funkcija oko $\alpha = \sqrt{a}$.

1. Za $\varphi(x) = x^2 + x - a$, izlazi $\varphi'(x) = 2x + 1$. U $x = \sqrt{a}$ je

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 2\sqrt{a} + 1 > 1,$$

pa ta iteracijska funkcija **neće konvergirati**. Baš suprotno, za **bilo koji** start x_0 , ove iteracije **divergiraju!**

Primjer iteracijskih funkcija za \sqrt{a}

1. Općenito, $\varphi(x) = x + c(x^2 - a)$, pa je $\varphi'(x) = 1 + 2cx$ i

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 1 + 2c\sqrt{a}.$$

Da bismo **osigurali** lokalnu **konvergenciju**, mora biti

$$-1 < 1 + 2c\sqrt{a} < 1,$$

odnosno,

$$-\frac{1}{\sqrt{a}} < c < 0.$$

2. Za $\varphi(x) = a/x$, dobivamo $\varphi'(x) = -a/x^2$, pa je

$$\varphi'(\sqrt{a}) = -1,$$

što znači da iteracijska funkcija **neće konvergirati**. Niz iteracija je $x_0, a/x_0, x_0, a/x_0, \dots$ (periodički niz).

Primjer iteracijskih funkcija za \sqrt{a}

3. Za $\varphi(x) = \frac{1}{2} (x + a/x)$, izlazi $\varphi'(x) = \frac{1}{2} (1 - a/x^2)$, pa je

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 0.$$

Zato ova iteracijska funkcija **konvergira** u okolini $\alpha = \sqrt{a}$.

Posljednja iteracijska funkcija je baš **Newtonova** metoda za jednadžbu $x^2 - a = 0$, a poznavali su ju još **Babilonci**. ■

Vidimo da metoda **jednostavne iteracije** može imati

● lokalnu konvergenciju koja je **brža** od **linearne**.

Stvarni “krivac” za **kvadratnu** konvergenciju je $\varphi'(\alpha) = 0$.

Slično tome, **jednostavne** iteracijske funkcije mogu poslužiti za konstrukciju iterativnih metoda **proizvoljno visokog reda** p .

Iterativne metode višeg reda konvergencije

Teorem. Neka je α rješenje jednačbe $x = \varphi(x)$ i neka je φ
• p puta neprekidno diferencijabilna za sve x u okolini α ,
za neki $p \geq 2$.

Nadalje, pretpostavimo da je

$$\varphi'(\alpha) = \dots = \varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0.$$

Ako je startna točka x_0 dovoljno blizu α , onda niz iteracija

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0,$$

konvergira prema α s redom konvergencije (barem) p i vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}.$$

Iterativne metode višeg reda konvergencije

Dokaz. Funkciju φ razvijemo, u okolini od α , u **Taylorov** polinom stupnja p , s tim da **najviši** član predstavlja **ostatak**. Zatim uvrstimo $x = x_n$, pa dobijemo

$$\begin{aligned}\varphi(x_n) &= \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(x_n - \alpha) + \dots \\ &\quad + \frac{\varphi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!} (x_n - \alpha)^{p-1} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} (x_n - \alpha)^p,\end{aligned}$$

za neki ξ_n između x_n i α .

Sad iskoristimo da je $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\varphi(x_n) = x_{n+1}$ i pretpostavku da za **derivacije** vrijedi $\varphi^{(k)}(\alpha) = 0$, za $k = 1, \dots, p-1$. Izlazi

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} (x_n - \alpha)^p,$$

Iterativne metode višeg reda konvergencije

odnosno,

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} (x_n - \alpha)^p.$$

Zbog $\varphi'(\alpha) = 0 < 1$, iz “lokalnog” teorema slijedi da

- niz iteracija x_n konvergira prema α , za svaku startnu točku x_0 koja je dovoljno blizu α (lokalna konvergencija).

Iz $x_n \rightarrow \alpha$ slijedi i $\xi_n \rightarrow \alpha$. Na kraju, u gornjoj relaciji, na limesu $n \rightarrow \infty$, iskoristimo neprekidnost $\varphi^{(p)}$ u α . Izlazi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = (-1)^{p-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}. \quad \blacksquare$$

Za $p = 1$, ovaj rezultat odgovara ranijem “lokalnom” teoremu!

Primjer — analiza Newtonove metode

Primjer. Primjenom prethodnog teorema, analizirajmo red konvergencije **Newtonove metode** u okolini **jednostruke** nultočke α funkcije f . Pripadna iteracijska funkcija φ je

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Deriviranjem dobivamo da je

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Nultočka α je **jednostruka**, pa je $f(\alpha) = 0$ i $f'(\alpha) \neq 0$. Onda je

$$\varphi'(\alpha) = 0,$$

tj. **Newtonova** metoda konvergira (barem) **kvadratno** oko α .

Primjer — analiza Newtonove metode

Za detaljniju analizu, pogledajmo drugu derivaciju $\varphi''(\alpha)$.
Deriviranjem $\varphi'(x)$ u produktom obliku, dobivamo

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \left(f(x) \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \right)' = f'(x) \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} + f(x) \left(\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \right)' \\ &= \frac{f''(x)}{f'(x)} + f(x) \left(\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \right)'\end{aligned}$$

Zbog $f(\alpha) = 0$ i $f'(\alpha) \neq 0$, odmah izlazi

$$\varphi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Ako je $f''(\alpha) \neq 0$, red konvergencije Newtonove metode je 2.

Ako je $f''(\alpha) = 0$, red konvergencije je barem 3.

Newtonova metoda za višestruke nultočke

Multiplicitet nultočke funkcije

Definicija (Multiplicitet nultočke). Neka je $f(\alpha) = 0$. Ako postoji **prirodni** broj m , takav da je

$$f(x) = (x - \alpha)^m g(x), \quad g(\alpha) \neq 0,$$

gdje je g **neprekidna** funkcija u okolini od α , onda nultočka α ima **multiplicitet** (**višestrukost**, **kratnost** ili **red**) m . ■

Teorem. Pretpostavimo da funkcija f ima **neprekidnu** m -tu derivaciju u okolini od α , tj. f je **klase** C^m oko α . Onda je

● α nultočka od f **multipliciteta** m , ako i samo ako vrijedi

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Dokaz “ \Leftarrow ” ide direktno iz **Taylorovog** razvoja do stupnja m , za funkciju f oko α (slično kao malo prije — u teoremu za φ).

Nultočka funkcije i njezinih derivacija

Obrat “ \Rightarrow ” je nešto složeniji, jer g ne mora biti derivabilna. Zato ne “ide” Leibnizovo pravilo za derivaciju produkta!

Početak: Za $k = 0, \dots, m$, definiramo funkciju g_k oko α , kao

$$g_k(x) = \frac{f^{(k)}(x)}{(x - \alpha)^{m-k}}, \quad x \neq \alpha.$$

Uočimo da je $g_0(x) = g(x)$. Po pretpostavci, g_0 je neprekidna u α i vrijedi $f(\alpha) = 0$, $g_0(\alpha) \neq 0$ (baza indukcije, zbog $m \geq 1$).

Korak: Neka je $k \geq 0$ i $k < m$, i uzmimo da za k vrijedi

$$f^{(k)}(\alpha) = 0, \quad \text{i postoji } \lim_{x \rightarrow \alpha} g_k(x) = g_k(\alpha) \neq 0,$$

gdje je $g_k(\alpha)$ definiran proširenjem po neprekidnosti, tako da je g_k neprekidna u α , pa onda i oko α (iz definicije za $x \neq \alpha$).

Nultočka funkcije i njezinih derivacija

Onda je

$$\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{f^{(k)}(x)}{x - \alpha} = (x - \alpha)^{m-k-1} g_k(x).$$

Desna strana je **neprekidna** u α , pa prijelazom na limes $x \rightarrow \alpha$ slijedi

$$f^{(k+1)}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{za } k + 1 < m, \\ g_k(\alpha), & \text{za } k + 1 = m. \end{cases}$$

Treba još pokazati da **postoji** $\lim_{x \rightarrow \alpha} g_{k+1}(x)$ i da je $g_{k+1}(\alpha) \neq 0$.

Ako je $k + 1 = m$, onda je (po definiciji) $g_m(x) = f^{(m)}(x)$, pa **neprekidnost** $f^{(m)}$ u α daje

$$g_m(\alpha) = g_{m-1}(\alpha) \neq 0.$$

Nultočka funkcije i njezinih derivacija

Za $k + 1 < m$, iz definicije dobivamo neodređeni oblik $0/0$, kojeg računamo “**obratnim**” L’Hospitalovim pravilom, tj.

☞ **integriramo** brojnik i nazivnik, a ne deriviramo.

Izlazi

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \alpha} g_{k+1}(x) &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f^{(k+1)}(x)}{(x - \alpha)^{m-k-1}} = \{ \text{L'Hospital} \} \\ &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f^{(k)}(x)}{\frac{1}{m-k} (x - \alpha)^{m-k}} \\ &= (m - k) \lim_{x \rightarrow \alpha} g_k(x) = (m - k)g_k(\alpha) \neq 0.\end{aligned}$$

Na kraju, vidimo da je $g_k(\alpha) = m(m - 1) \cdots (m - k + 1)g(\alpha)$, za $k = 1, \dots, m$. Posebno, vrijedi $g_1(\alpha) = mg(\alpha)$. ■

Veza nultočke funkcije i derivacije

U nastavku, radi jednostavnosti, pretpostavljamo da je i funkcija g dovoljno **glatka** oko α , tako da ju možemo **derivirati** koliko puta treba. Onda prethodni obrat ide puno **lakše**.

Na primjer, uzmimo da je g' **neprekidna** oko α . Pokažimo da

- ako funkcija f ima nultočku **multipliciteta** m u α ,
- onda **derivacija** f' ima nultočku **multipliciteta** $m - 1$ u α .

Dokaz. Napišimo f u obliku

$$f(x) = (x - \alpha)^m g(x), \quad g(\alpha) \neq 0.$$

Onda je

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(x - \alpha)^{m-1} g(x) + (x - \alpha)^m g'(x) \\ &= (x - \alpha)^{m-1} \left(m g(x) + (x - \alpha) g'(x) \right). \end{aligned}$$

Veza nultočke funkcije i derivacije

Zatim, **definiramo** funkciju g_1 na okolini od α , kao drugi faktor iz prethodnog produkta

$$g_1(x) := mg(x) + (x - \alpha)g'(x),$$

tako da je

$$f'(x) = (x - \alpha)^{m-1}g_1(x).$$

Iz pretpostavke da je g' **neprekidna** u okolini od α , slijedi da su f' i g_1 , također, **neprekidne** oko α . U točki α je

$$g_1(\alpha) = mg(\alpha) + (\alpha - \alpha)g'(\alpha) = mg(\alpha) \neq 0,$$

što pokazuje da f' ima $(m - 1)$ -struku nultočku u α . ■

Ovu formulu za $g_1(\alpha)$ koristimo **više** puta u nastavku.

Dodatno, uzimamo da je g klase C^2 oko α , iako ide i bez toga.

Konvergenција Newtona za višestruku nultočku

Analizirajmo što će se dogoditi s konvergencijom Newtonove metode, ako funkcija f ima višestruku nultočku u α .

Newtonovu metodu promatramo kao jednostavnu iteraciju,

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Pretpostavimo da

- f ima m -struku nultočku u α , za neki $m \geq 2$, i da je
- f dovoljno glatka na okolini od α — barem klase C^{m+1} , tako da je iteracijska funkcija φ barem klase C^m .

Onda je

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \alpha)^m g(x), & g(\alpha) &\neq 0, \\ f'(x) &= (x - \alpha)^{m-1} g_1(x), & g_1(\alpha) &\neq 0. \end{aligned}$$

Konvergenција Newtona za višestruku nultočku

Kad uvrstimo ove relacije za f i f' , dobivamo

$$\varphi(x) = x - \frac{(x - \alpha)^m g(x)}{(x - \alpha)^{m-1} g_1(x)} = x - (x - \alpha) \frac{g(x)}{g_1(x)}.$$

Deriviranjem izlazi

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{g(x)}{g_1(x)} - (x - \alpha) \left(\frac{g(x)}{g_1(x)} \right)'$$

U nultočki α je

$$\varphi'(\alpha) = 1 - \frac{g(\alpha)}{g_1(\alpha)} = 1 - \frac{g(\alpha)}{m g(\alpha)} = 1 - \frac{1}{m}.$$

Za $m \geq 2$, vrijedi $\varphi'(\alpha) \neq 0$. Prema ranijem teoremu, to znači

🔴 da **Newtonova** metoda onda konvergira samo **linearno!**

Konvergenција Newtona za višestruku nultočku

Dodatno, **faktor** linearne konvergenције je $\varphi'(\alpha) = 1 - 1/m$, što je **vrlo sporo**. U prosjeku, to je

- podjednako brzo kao **bisekcija**, za $m = 2$,
- ili čak **lošije** od **bisekcije**, za $m \geq 3$.

Newtonovu metodu možemo **popraviti** na dva načina:

- ako unaprijed **točno znamo** red m nultočke,
- ako **ne znamo** red (višestruke) nultočke.

Ako **znamo** m , onda u okolini m -struke nultočke definiramo iteracijsku funkciju

$$\varphi(x) = x - m \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Newtonova metoda kad znamo red nultočke

Na **isti** način kao malo prije, redom, dobivamo

$$\varphi(x) = x - m(x - \alpha) \frac{g(x)}{g_1(x)},$$

$$\varphi'(x) = 1 - m \frac{g(x)}{g_1(x)} - m(x - \alpha) \left(\frac{g(x)}{g_1(x)} \right)',$$

pa je

$$\varphi'(\alpha) = 1 - m \frac{g(\alpha)}{g_1(\alpha)} = 1 - m \frac{g(\alpha)}{mg(\alpha)} = 1 - m \frac{1}{m} = 0.$$

To pokazuje da ova **modifikacija** Newtonove metode,

- s **m -strukom** korekcijom,
- osigurava barem **kvadratnu** konvergenciju, za bilo koji m .

Newtonova metoda kad **ne znamo red nultočke**

Što ćemo napraviti ako unaprijed **ne znamo** m ? Primijetimo da funkcija u — to je **korekcija** u običnoj Newtonovoj metodi,

$$u(x) := \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x - \alpha)^m g(x)}{(x - \alpha)^{m-1} g_1(x)} = (x - \alpha) \frac{g(x)}{g_1(x)},$$

uvijek ima **jednostruku** nultočku u α , jer je $g(\alpha)/g_1(\alpha) \neq 0$.

Dakle, **obična Newtonova** metoda, primijenjena na u (**ne** na f)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)},$$

gdje je

$$u'(x) = \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 - \frac{f''(x)}{f'(x)} u(x),$$

konvergira barem **kvadratno**, iako **ne znamo** red nultočke!

Ostale metode kad **ne** znamo red nultočke

Sasvim **isto** vrijedi i za **sve ostale** metode, koje imaju

- red konvergencije $p > 1$, u okolini **jednostruke** nultočke α .

Ako se metoda “**uspori**” u okolini **višestruke** nultočke,

- treba metodu primijeniti na $u = f/f'$, umjesto na f .

Na primjer, za višestruke nultočke, metodu **sekante** treba primijeniti na funkciju u ,

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{u(x_n) - u(x_{n-1})}.$$

Dodatna “**cijena**” = računanje još **jedne** derivacije **više**.

Na primjer, u **Newtonovoj** metodi, za u' treba računati i f'' , a u metodi **sekante**, za u treba računati i f' .

Primjeri za jednostruke nultočke

Numerički red konvergencije

U praksi se može sasvim dobro

● **numerički** procijeniti **red konvergencije** iterativne metode.

Kako se to radi?

Red konvergencije niza iteracija $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$, koji konvergira prema nultočki α , je **najveći** eksponent p , uz $p \geq 1$, za koji vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x_{n-1}|}{|\alpha - x_{n-2}|^p} = c > 0.$$

Ovdje je x_n niz iteracija generiran **nekom** metodom, uz neki start dovoljno **blizu** nultočke (ranije su indeksi bili n i $n - 1$).

Ovako dobiveni p i c su “**teorijske**” vrijednosti koje vrijede **asimptotski** — na limesu $n \rightarrow \infty$.

Numerički red konvergencije

Definicijsku relaciju ne možemo **direktno** iskoristiti za računanje p i c , jer **ne znamo** nultočku α .

Praktični pogled. Ako su iteracije x_k dovoljno blizu α , onda limes možemo “zaboraviti”, pa je

$$|\alpha - x_k| \approx c|\alpha - x_{k-1}|^p,$$

za dovoljno velike k . Umjesto α , uzmemo **aproksimaciju** za α !

Dakle, ako smo **dovoljno blizu** nultočke, onda možemo uzeti da je $\alpha \approx x_n$, a za k uzmemo $k = n - 1, n - 2$. Onda vrijedi

$$|x_n - x_{n-1}| = c_n |x_n - x_{n-2}|^{p_n},$$

$$|x_n - x_{n-2}| = c_n |x_n - x_{n-3}|^{p_n},$$

s tim da **očekujemo** da je $p_n \approx p$ i $c_n \approx c$, za dovoljno velike n .

Numerički red konvergencije

Dijeljenjem dobivamo

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n - x_{n-2}|} = \left(\frac{|x_n - x_{n-2}|}{|x_n - x_{n-3}|} \right)^{p_n},$$

pa logaritmiranjem izlazi tzv. **numerički** red konvergencije p_n

$$p_n = \frac{\log(|x_n - x_{n-1}|/|x_n - x_{n-2}|)}{\log(|x_n - x_{n-2}|/|x_n - x_{n-3}|)}.$$

Nakon toga, c_n možemo dobiti (recimo) iz prve relacije, kao

$$c_n = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n - x_{n-2}|^{p_n}}.$$

Ovaj račun možemo provesti tek za $n \geq 3$, a vrijednosti p_n i c_n **ovise** o n — pa treba **pratiti** njihovo ponašanje **kroz iteracije**.

Jednostavni primjer

Primjer. Za uspoređivanje metoda za nalaženje nultočaka, izračunajmo $\sqrt[3]{1.5}$. Problem možemo interpretirati kao traženje **realne**, **pozitivne** nultočke funkcije (polinoma)

$$f(x) = x^3 - 1.5.$$

Jednostavna lokacija nultočke je $\alpha \in [1, 2]$. Iz **neprekidnosti** funkcije f i

$$f(1) = -0.5 < 0, \quad f(2) = 6.5 > 0,$$

znamo da **sigurno** postoji nultočka $\alpha \in [1, 2]$. To je i **jedina** realna nultočka funkcije f , jer f strogo **raste** na $\langle -\infty, 0 \rangle$ (tamo je $f < 0$) i na $\langle 0, \infty \rangle$.

Svo računanje provedeno je u **extended** tipu ($u \approx 5.4 \cdot 10^{-20}$).

Metoda bisekcije

Pokažimo kako se ponaša metoda **bisekcije** ako je $[a, b] = [1, 2]$, a tražena točnost je

- $\varepsilon = 10^{-8}$,
- $\varepsilon = 10^{-18}$.

Na sljedeće dvije stranice, sa z_n je označena veličina

$$z_n := f(a_n) \cdot f(x_n).$$

Primijetite da **pogrešno** očitani **predznak** od z_n (umjesto < 0 , očitamo > 0 , ili obratno)

- možemo detektirati samo gledanjem $f(x_n)$ — uglavnom, tada $f(x_n) \not\rightarrow 0$,
- ali i dalje **ne znamo** točno **mjesto** gdje smo pogriješili.

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}$ (početak)

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	z_n
0	1.000000000	2.000000000	1.500000000	1.875000000	< 0
1	1.000000000	1.500000000	1.250000000	0.453125000	< 0
2	1.000000000	1.250000000	1.125000000	-0.076171875	> 0
3	1.125000000	1.250000000	1.187500000	0.174560547	< 0
4	1.125000000	1.187500000	1.156250000	0.045806885	< 0
5	1.125000000	1.156250000	1.140625000	-0.016017914	> 0
6	1.140625000	1.156250000	1.148437500	0.014684200	< 0
7	1.140625000	1.148437500	1.144531250	-0.000719249	> 0
8	1.144531250	1.148437500	1.146484375	0.006969355	< 0
9	1.144531250	1.146484375	1.145507813	0.003121776	< 0
10	1.144531250	1.145507813	1.145019531	0.001200444	< 0
11	1.144531250	1.145019531	1.144775391	0.000240393	< 0
12	1.144531250	1.144775391	1.144653320	-0.000239479	> 0
13	1.144653320	1.144775391	1.144714355	0.000000444	< 0

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}$ (nastavak)

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	z_n
14	1.144653320	1.144714355	1.144683838	-0.000119521	> 0
15	1.144683838	1.144714355	1.144699097	-0.000059539	> 0
16	1.144699097	1.144714355	1.144706726	-0.000029548	> 0
17	1.144706726	1.144714355	1.144710541	-0.000014552	> 0
18	1.144710541	1.144714355	1.144712448	-0.000007054	> 0
19	1.144712448	1.144714355	1.144713402	-0.000003305	> 0
20	1.144713402	1.144714355	1.144713879	-0.000001431	> 0
21	1.144713879	1.144714355	1.144714117	-0.000000493	> 0
22	1.144714117	1.144714355	1.144714236	-0.000000025	> 0
23	1.144714236	1.144714355	1.144714296	0.000000210	< 0
24	1.144714236	1.144714296	1.144714266	0.000000092	< 0
25	1.144714236	1.144714266	1.144714251	0.000000034	< 0
26	1.144714236	1.144714251	1.144714244	0.000000005	< 0
27	1.144714236	1.144714244	1.144714240	-0.000000010	

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}, 10^{-18}$

Izračunata rješenja su (uz ispis na 18 znamenki):

- za točnost 10^{-8} , rješenje je $x_{27} = 1.14471423998475075$,
- za točnost 10^{-18} , rješenje je $x_{60} = 1.14471424255333187$.

Iz ovih rezultata vidi se

- spora** konvergencija metode bisekcije — broj vodećih nula u $f(x_n)$ se, uglavnom, **linearno** povećava.

Ponegdje, kao u x_{13} , dolazi do **čudnog** povećanja broja vodećih nula u $f(x_n)$. **Objašnjenje:**

- Slučajno** smo “pogodili” **blizu** nultočke, iako je duljina intervala još uvijek **prevelika** za **zaustavljanje** iteracija.

Uočite **broj iteracija** potreban za odgovarajuću točnost!

Newtonova metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Nije teško pokazati da će **Newtonova** metoda na $[1, 2]$ **sigurno konvergirati**, ako krenemo sa **strmijeg** ruba (to je $x_0 = 2$), jer su f' i f'' fiksnog znaka na $[1, 2]$.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.5000000000000000	0.5416666666666667
1	1.4583333333333333	1.601490162037037	0.251009070294785
2	1.207324263038549	0.259834330619978	0.059419284771986
3	1.147904978266562	0.012578134527712	0.003181874908824
4	1.144723103357739	0.000034833084971	0.000008860735819
5	1.144714242621919	0.000000000269625	0.000000000068587
6	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
7	1.144714242553332	0.000000000000000	

Izračunata nultočka je $x_7 = 1.14471424255333187$ (sve **točno**).

Newtonova metoda, kvadratna konvergencija

Gledamo li **korekcije** napisane u **znanstvenoj notaciji**, vidimo područje **kvadratne** konvergencije — gdje se broj točnih znamenki u x_n , u svakom koraku, **udvostručava**.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.000000000000000000	6.50000000000E+00	5.416666667E−01
1	1.458333333333333333	1.60149016204E+00	2.510090703E−01
2	1.20732426303854875	2.59834330620E−01	5.941928477E−02
3	1.14790497826656245	1.25781345277E−02	3.181874909E−03
4	1.14472310335773870	3.48330849709E−05	8.860735819E−06
5	1.14471424262191933	2.69625000386E−10	6.858746179E−11
6	1.14471424255333187	1.08420217249E−19	2.758003708E−20
7	1.14471424255333187	1.08420217249E−19	

Isti smo zaključak mogli vidjeti i **bez** znanstvene notacije — pogledajte kako se **povećava** broj **vodećih nula** u **korekciji**.

Newtonova m., numerički red konvergencije

Prema formuli s početka ovog odjeljka, možemo izračunati i **numerički red** konvergencije p_n za **Newtonovu** metodu.

n	x_n	p_n	C_n
0	2.000000000000000000	—	—
1	1.458333333333333333	—	—
2	1.20732426303854875	—	—
3	1.14790497826656245	1.63738	4.03440E-01
4	1.14472310335773870	1.84894	5.34225E-01
5	1.14471424262191933	1.97750	7.64767E-01
6	1.14471424255333187	1.99937	8.67206E-01
7	1.14471424255333187	—	—

Završne vrijednosti p_5 i p_6 su vrlo **blizu** očekivanog **teorijskog** reda konvergencije $p = 2!$

Metoda sekante, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Za metodu **sekante** potrebne su **dvije** startne točke — to su $x_0 = 2$ i $x_1 = 1.5$. Izračunata nultočka x_{10} ima **sve** znamenke jednake aproksimaciji x_7 iz Newtonove metode.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.5000000000000000	
1	1.5000000000000000	1.8750000000000000	0.202702702702703
2	1.297297297297297	0.683325765502537	0.116233090792778
3	1.181064206504520	0.147481413791545	0.031991044609771
4	1.149073161894749	0.017200732670849	0.004223722208545
5	1.144849439686204	0.000531537856385	0.000134683664909
6	1.144714756021295	0.000002018501023	0.000000513407324
7	1.144714242613971	0.000000000238377	0.000000000060639
8	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
9	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
10	1.144714242553332	0.000000000000000	

Metoda sekante, numerički red konvergencije

Red konvergencije metode **sekante** je $p = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.6180$, a **numerički red** konvergencije p_n ga **dobro** aproksimira.

n	x_n	p_n	c_n
0	2.000000000000000000	—	—
1	1.500000000000000000	—	—
2	1.29729729729729730	—	—
3	1.18106420650451962	1.07039	3.94966E-01
4	1.14907316189474910	1.77904	9.54986E-01
5	1.14484943968620389	1.49493	6.02649E-01
6	1.14471475602129474	1.63923	9.97717E-01
7	1.14471424261397050	1.60467	8.29830E-01
8	1.14471424255333190	1.62274	9.74858E-01
9	1.14471424255333187	1.61618	8.86501E-01
10	1.14471424255333187	—	—

Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Primjer. Jedina nultočka funkcije

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$$

je $x = 0$. Međutim, Newtonova metoda **ne konvergira** iz **svake** startne točke x_0 .

- Sigurnu konvergenciju (po ranijem teoremu) **ne možemo** osigurati, jer f'' **mijenja znak** baš u **nultočki** (infleksija).

Naći ćemo točku β za koju vrijedi:

$$\begin{cases} |x_0| < |\beta| \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ konvergira,} \\ |x_0| > |\beta| \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ divergira,} \\ |x_0| = |\beta| \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ "ciklira".} \end{cases}$$

Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Kako ćemo naći točku “cikliranja” (ili “kružnja”) β ?

Funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} x$ je **neparna**, pa je dovoljno da

- **tangenta** na graf funkcije f u točki $(\beta, f(\beta))$ presiječe os x u točki $-\beta$ — dobijemo neparnu simetriju oko nule.

Jednadžba tangente na arctg u točki β je

$$y - \operatorname{arctg} \beta = \frac{1}{1 + \beta^2} (x - \beta),$$

pa će tangenta sjeći os x u $-\beta$ (tada je $y = 0$), ako je

$$\operatorname{arctg} \beta = \frac{2\beta}{1 + \beta^2}.$$

Dobili smo **nelinearnu jednadžbu** za β , koju treba riješiti.

Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Zbog neparnosti, postoje dva rješenja, suprotnih predznaka. Možemo ih izračunati, recimo, metodom bisekcije i dobijemo

$$\beta = \pm 1.39174520027073489.$$

Pokažimo ponašanje Newtonove metode ako za startnu točku uzmemo, redom,

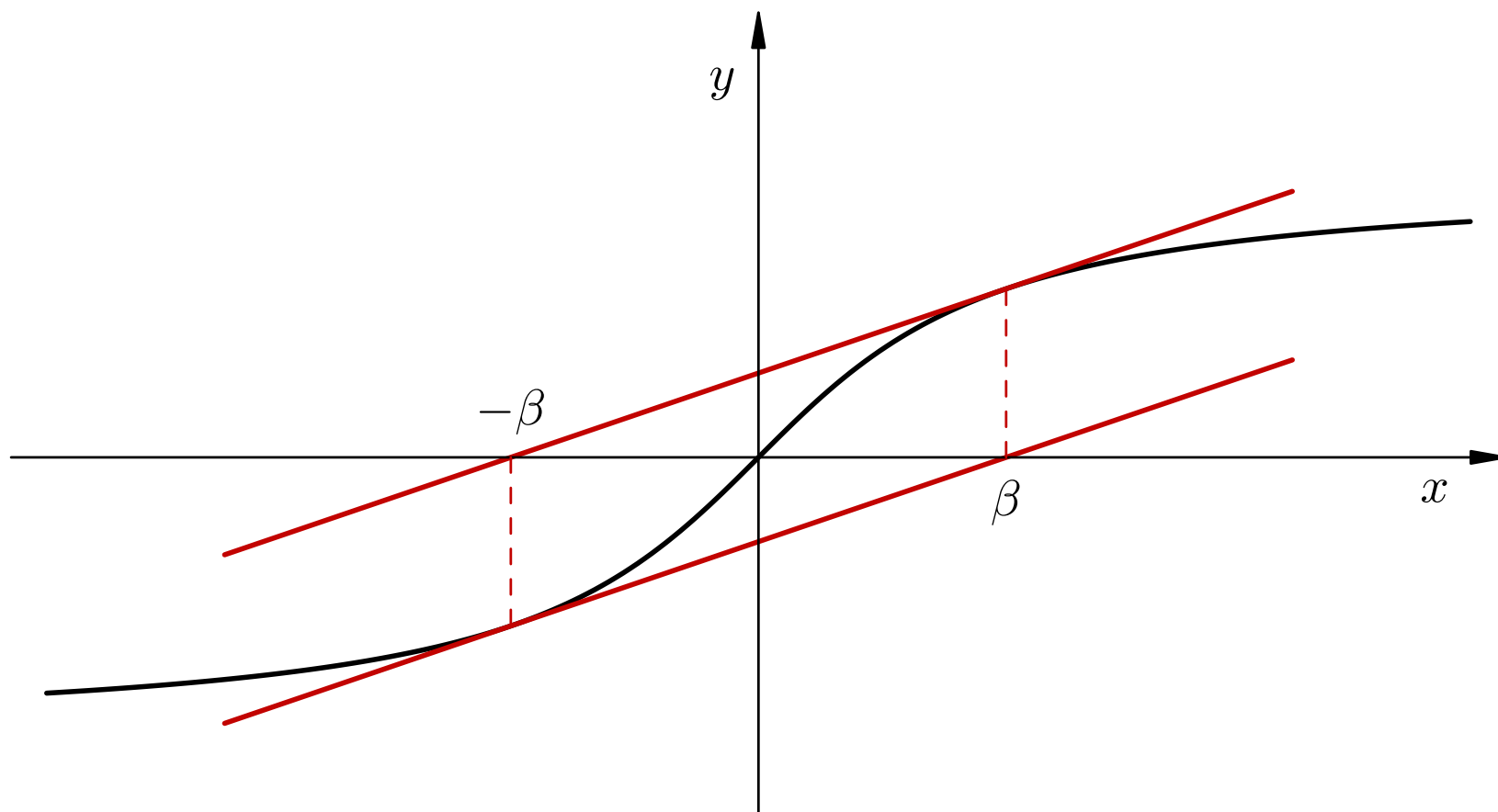
$$x_0 = \beta, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 1.5,$$

a zaustavljamo se

- ako postignemo točnost 10^{-18} za nađenu nultočku,
- ili nakon najviše 10 iteracija.

Primjer cikliranja Newtonove metode

Za $x_0 = \beta$ graf je



Primjer cikliranja Newtonove metode

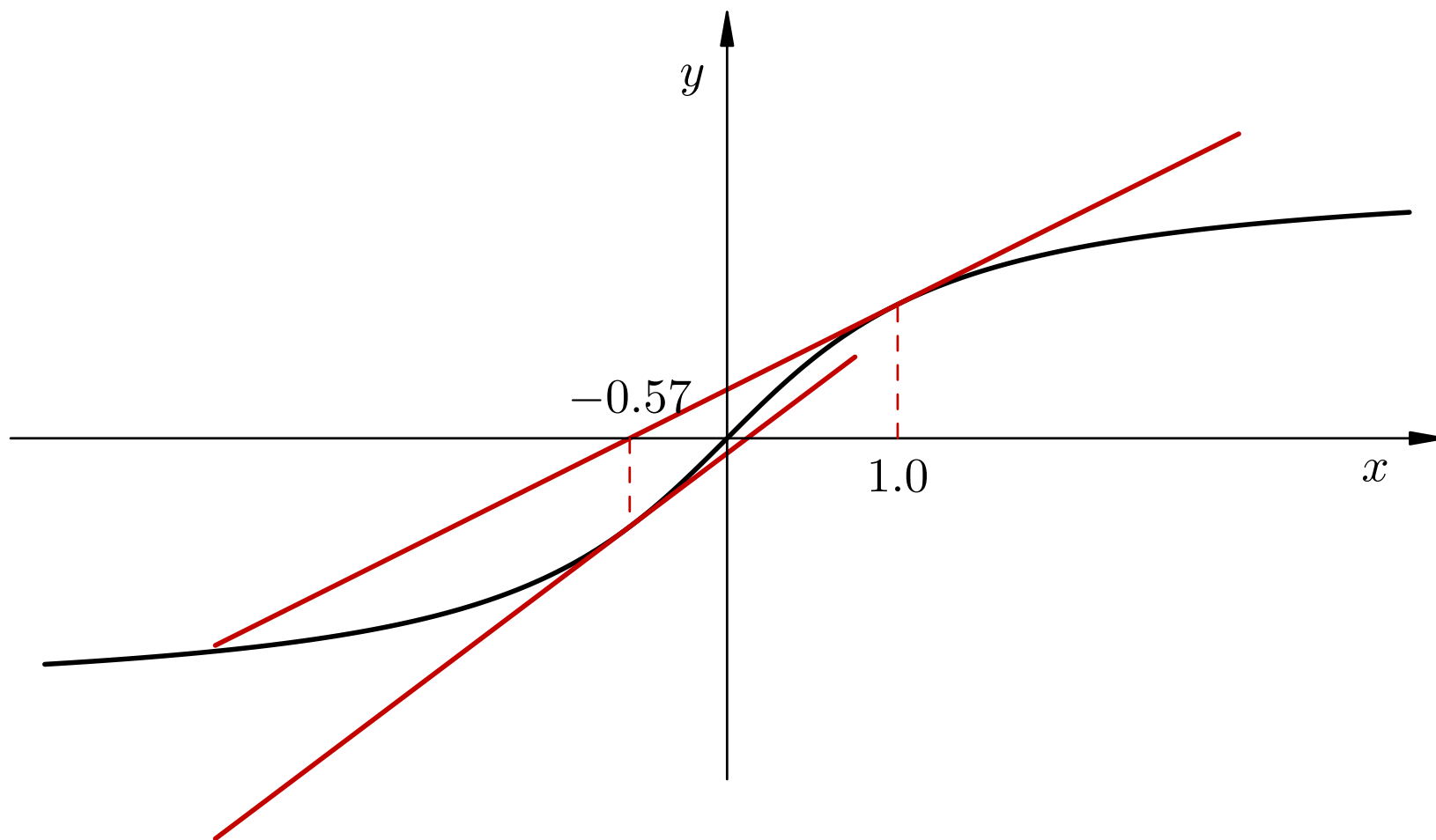
Točnost nije postignuta nakon 10 iteracija.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.391745200270735	0.947747133516990	2.783490400541470
1	-1.391745200270735	-0.947747133516990	-2.783490400541470
2	1.391745200270735	0.947747133516990	2.783490400541469
3	-1.391745200270734	-0.947747133516990	-2.783490400541468
4	1.391745200270734	0.947747133516990	2.783490400541466
5	-1.391745200270732	-0.947747133516989	-2.783490400541459
6	1.391745200270727	0.947747133516988	2.783490400541440
7	-1.391745200270713	-0.947747133516983	-2.783490400541391
8	1.391745200270678	0.947747133516971	2.783490400541262
9	-1.391745200270584	-0.947747133516939	-2.783490400540922
10	1.391745200270337	0.947747133516939	

Zbog malih grešaka zaokruživanja, metoda bi konvergirala.

Primjer konvergencije Newtonove metode

Za $x_0 = 1$ graf je



Primjer konvergencije Newtonove metode

Zadana točnost 10^{-18} se postiže nakon 6 iteracija.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.0000000000000000	0.785398163397448	1.570796326794897
1	-0.570796326794897	-0.518669369255017	-0.687656230793810
2	0.116859903998913	0.116332265113896	0.117920926115958
3	-0.001061022117045	-0.001061021718890	-0.001061022913354
4	0.000000000796310	0.000000000796310	0.000000000796310
5	-0.000000000000000	-0.000000000000000	-0.000000000000000
6	0.000000000000000	-0.000000000000000	

Metoda **kubno** konvergira (zbog $f''(0) = 0$), ali **ne** konvergira **monotono** prema nultočki $\alpha = 0$.

Newton kvg., numerički red konvergencije

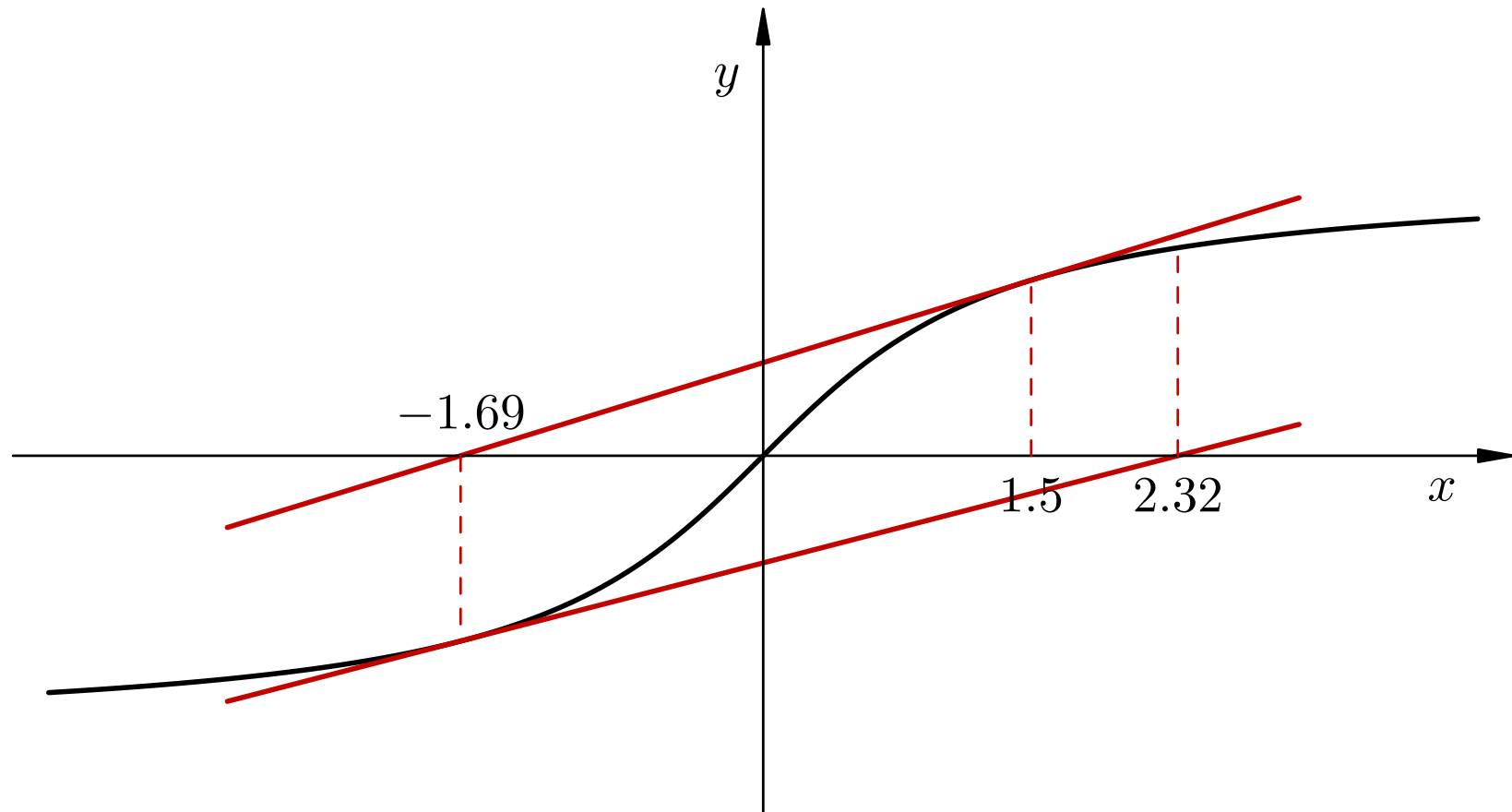
Numerički red konvergencije pokazuje da metoda zaista **kubno** konvergira prema $\alpha = 0$.

n	x_n	p_n	C_n
0	1.00000000000000000000	—	—
1	-0.57079632679489662	—	—
2	0.11685990399891305	—	—
3	-0.00106102211704472	4.02288	1.13367E+00
4	0.00000000079630960	2.97361	6.28237E-01
5	-0.00000000000000000000	2.99942	6.64032E-01
6	0.00000000000000000000	2.99655	6.51104E-01

Na **kraju** iteracija dolazi do **kraćenja**, zbog **nemonotonosti**. Zato je p_6 malo manje točan od p_5 .

Primjer divergencije Newtonove metode

Za $x_0 = 1.5$ graf je



Primjer divergencije Newtonove metode

Metoda kvadratno divergira, ali $f(x)$ “konvergira” prema $\pm\frac{\pi}{2}$.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.5000000000E+000	0.9827937232473	3.1940796006E+000
1	-1.6940796006E+000	-1.0375463591379	-4.0152065620E+000
2	2.3211269614E+000	1.1640020424220	7.4352147982E+000
3	-5.1140878368E+000	-1.3776945287028	-3.7409771751E+001
4	3.2295683914E+001	1.5398423269080	1.6076126347E+003
5	-1.5753169508E+003	-1.5701615339901	-3.8965513247E+006
6	3.8949760078E+006	1.5707960700539	2.3830292869E+013
7	-2.3830288974E+013	-1.5707963267949	-8.9202801611E+026
8	8.9202801611E+026	1.5707963267949	1.2499045994E+054
9	-1.2499045994E+054	-1.5707963267949	-2.4539946375E+108
10	2.4539946375E+108	1.5707963267949	

Primjeri za višestruke nultočke

Newtonova metoda i višestruke nultočke

Primjer. Funkcija (polinom)

$$f(x) = x^3 - 5.56x^2 + 9.1389x - 4.68999$$

ima dvostruku nultočku u $x = 1.23$ (treća nultočka je 3.1).

Pokažimo, redom, ponašanje

- obične Newtonove metode,
- Newtonove metode za dvostruku nultočku — stavljen je faktor $m = 2$ za korekciju,
- obične Newtonove metode, ali za funkciju $u = f/f'$.

Startna točka je $x_0 = 1.5$, a tražena točnost je $\varepsilon = 10^{-15}$.

- Točnost za nultočku je namjerno “slabija” nego prije.

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$ (početak)

Pažljivo promatrajte kako se ponaša $f(x_n)$ i korekcija.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.5000000000000000	-0.1166400000000000	0.147440273037543
1	1.352559726962457	-0.026248102309329	0.063506947954921
2	1.289052779007536	-0.006315190760541	0.030015778457640
3	1.259037000549896	-0.001552203168203	0.014633908572506
4	1.244403091977390	-0.000384941831542	0.007229603981965
5	1.237173487995426	-0.000095859059122	0.003593663348690
6	1.233579824646736	-0.000023918444247	0.001791630511788
7	1.231788194134948	-0.000005973865556	0.000894525173287
8	1.230893668961661	-0.000001492750955	0.000446941328040
9	1.230446727633621	-0.000000373098481	0.000223390506264
10	1.230223337127356	-0.000000093263474	0.000111675233252
11	1.230111661894104	-0.000000023314476	0.000055832614098

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$ (nastavak)

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
12	1.230055829280006	-0.000000005828445	0.000027915056720
13	1.230027914223287	-0.000000001457089	0.000013957215816
14	1.230013957007471	-0.000000000364270	0.000006978529777
15	1.230006978477694	-0.000000000091067	0.000003489245354
16	1.230003489232340	-0.000000000022767	0.000001744617791
17	1.230001744614549	-0.000000000005692	0.000000872307704
18	1.230000872306845	-0.000000000001423	0.000000436153629
19	1.230000436153216	-0.000000000000356	0.000000218076376
20	1.230000218076841	-0.000000000000089	0.000000109038186
21	1.230000109038655	-0.000000000000022	0.000000054517907
22	1.230000054520748	-0.000000000000006	0.000000027259838
23	1.230000027260910	-0.000000000000001	0.000000013624333
24	1.230000013636577	-0.000000000000000	0.000000006828241
25	1.230000006808336	-0.000000000000000	0.000000003389306

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$ (kraj)

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
26	1.2300000003419030	-0.0000000000000000	0.0000000001729681
27	1.2300000001689349	-0.0000000000000000	0.000000000823684
28	1.2300000000865665	-0.0000000000000000	0.000000000401855
29	1.230000000463810	0.0000000000000000	-0.0000000000000000
30	1.230000000463810	0.0000000000000000	

Korekcija **linearno** teži u 0, puno **sporije** nego $f(x)$. Razlog:

- 🔴 Oko **višestruke** nultočke, funkcijska vrijednost je **relativno mala**, čak i kad smo relativno **daleko** od nultočke, tj.
- 🔴 u okolini **višestruke** nultočke α , graf funkcije f se **bolje** “**priljubi**” uz os x , nego kad je nultočka **jednostruka**.

U ovom primjeru, $f(x)$ ide **kvadratno** s korekcijom ($m = 2$).

Modificirana Newtonova metoda, $m = 2$

Modificirana metoda pokazuje očitu kvadratnu konvergenciju.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.5000000000000000	-0.1166400000000000	0.294880546075085
1	1.205119453924915	-0.001173009833879	-0.024718265674538
2	1.229837719599453	-0.000000049250590	-0.000162273360038
3	1.229999992959491	-0.000000000000000	-0.000000007049176
4	1.2300000000008667	0.000000000000000	-0.000000026758865
5	1.230000026767532	-0.000000000000001	0.000000026771877
6	1.229999999995655	0.000000000000000	0.000000000000000
7	1.229999999995655	0.000000000000000	

Da smo pogriješili m — dobili bismo linearnu konvergenciju!

- 🔴 Isto se događa ako pogriješite derivaciju, a tražite jednostruku nultočku.

Newtonova metoda za funkciju $u = f/f'$

Obična **Newtonova** metoda za funkciju $u = f/f'$, također, pokazuje očitu **kvadratnu** konvergenciju prema **jednstruko**j nultočki funkcije u .

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.5000000000000000	0.147440273037543	0.243748194650388
1	1.256251805349612	0.013220017840880	0.026062273270891
2	1.230189532078721	0.000094770842551	0.000189522471849
3	1.230000009606872	0.000000004803964	0.000000009608985
4	1.229999999997887	0.000000000000000	0.000000000000000
5	1.229999999997887	0.000000000000000	

Cijena:

- 🕒 računanje vrijednosti **druge** derivacije funkcije f — za u' .

Primjeri metoda višeg reda konvergencije

Uvodno o primjerima

Dosad smo promatrali samo metode do reda konvergencije 2 za jednostruke nultočke.

● Mogu li se napisati i koristiti metode višeg reda?

Navest ćemo (samo kao ilustraciju) neke primjere metoda višeg reda i pokazati kako one rade za jednostavni primjer nultočke funkcije

$$f(x) = x^3 - 1.5,$$

na intervalu $[1, 2]$, uz traženu točnost $\varepsilon = 10^{-18}$.

Korigirane Newtonove metode — inverzna f -a

Neka je f funkcija koja je, u okolini izolirane **nultočke** α ,

- **monotona**, tj. f' je različita od **nula** (α je jednostruka), i
- njezina **derivacija** $f^{(p)}$ je **neprekidna** na toj okolini, $p \geq 2$.

Tada postoji **inverzna** funkcija $\mathcal{F} := f^{-1}$ funkcije f , i njezina p -ta derivacija $\mathcal{F}^{(p)}$ je, također, **neprekidna** u okolini **nule**.

Razvijemo funkciju \mathcal{F} u **Taylorov polinom** oko točke $y = f(x)$, tako da zadnji član ima $(p - 1)$ -u derivaciju od \mathcal{F} ,

$$\mathcal{F}(t) \approx Q_{y,p-1}(t) := \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\mathcal{F}^{(k)}(y)}{k!} (t - y)^k.$$

Tražimo $\alpha = \mathcal{F}(0) = f^{-1}(0)$. Za $t = 0$, **desna** strana $Q_{y,p-1}(0)$ je aproksimacija nultočke α , s greškom reda veličine y^p .

Korigirane Newtonove metode — inverzna f -a

Kad uvrstimo $y = f(x)$ i sve gledamo kao **funkciju** od x , onda

$$E_p(x) := Q_{f(x), p-1}(0) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\mathcal{F}^{(k)}(f(x))}{k!} (-f(x))^k$$

definira jednostavnu **iteracijsku funkciju** $\varphi := E_p$, a pripadna iterativna metoda je $x_{n+1} = E_p(x_n)$.

Uz oznaku $z^{[k]}(x) := \mathcal{F}^{(k)}(f(x))$, ove funkcije iz **brojnika** možemo **rekurzivno** računati na sljedeći način (**E. Schröder**):

$$z^{[0]}(x) = x, \quad z^{[1]}(x) = \frac{1}{f'(x)},$$

$$z^{[k]}(x) = \frac{1}{f'(x)} \cdot \frac{d}{dx} z^{[k-1]}(x), \quad k = (1), 2, \dots$$

Korigirane Newtonove metode — inverzna f -a

Metoda E_p ima **red konvergencije** (barem) p . Ako je

$$z^{[p]}(\alpha) f'(\alpha) = \mathcal{F}^{(p)}(0) f'(\alpha) \neq 0,$$

onda je **red** E_p metode baš **jednak** p .

Za male vrijednosti p , dobivamo sljedeće **iteracijske funkcije** φ

$$E_2(x) = x - u, \quad (\text{obična Newtonova m.})$$

$$E_3(x) = E_2 - A_2 u^2, \quad (\text{korigirana Newtonova m. } E_3)$$

$$E_4(x) = E_3 - (2A_2^2 - A_3)u^3, \quad (\text{korigirana Newtonova m. } E_4)$$

pri čemu je

$$u = \frac{f}{f'}, \quad A_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{f^{(k)}}{f'}, \quad k \geq 2.$$

E_3 metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Startna točka je $x_0 = 2$.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.5000000000000000	0.6883680555555556
1	1.3116319444444444	0.756503210473290	0.162957102798705
2	1.148674841645739	0.015623490256523	0.003960520886559
3	1.144714320759180	0.000000307435976	0.000000078205848
4	1.144714242553332	0.0000000000000000	0.0000000000000000
5	1.144714242553332	0.0000000000000000	

Izračunata nultočka je $x_5 = 1.14471424255333187$.

E_3 metoda, kubna konvergencija

Ispišemo li rezultat u znanstvenoj notaciji, vidimo da se broj točnih znamenki u x_n približno utrostručuje.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.000000000000000000	6.50000000000E+00	6.88368055556E-01
1	1.311631944444444444	7.56503210473E-01	1.62957102799E-01
2	1.14867484164573903	1.56234902565E-02	3.96052088656E-03
3	1.14471432075918001	3.07435976264E-07	7.82058481467E-08
4	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	2.75800370811E-20
5	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	

E_3 metoda, numerički red konvergencije

Numerički red konvergencije pokazuje da je metoda E_3 zaista kubno konvergentna.

n	x_n	p_n	C_n
0	2.000000000000000000	—	—
1	1.311631944444444444	—	—
2	1.14867484164573903	—	—
3	1.14471432075918001	2.28964	2.38750E-01
4	1.14471424255333187	2.89555	7.06390E-01
5	1.14471424255333187	—	—

Metode izvedene iz Taylorovih polinoma

Funkciju f možemo aproksimirati Taylorovim polinomom P_s , stupnja s , u okolini točke x , i naći njegove nultočke.

Ako polinom stupnja 1 izjednačimo s nulom, dobijemo običnu Newtonovu metodu. Kad to napravimo za polinom stupnja 2,

$$P_2(t) = f(x) + f'(x)(t - x) + \frac{1}{2!} \cdot f''(x)(t - x)^2 = 0,$$

i riješimo po t , onda dobivamo iteracijsku funkciju φ za tzv. Laguerreovu metodu, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, pri čemu je

$$\varphi(x) = x - \frac{2u}{1 \pm (1 - 4A_2u)^{1/2}}, \quad (\text{kraćenje} \implies + \text{ znak})$$

Za metode viših redova moraju se rješavati polinomne jednačbe sve viših stupnjeva (preko 4 ne ide egzaktno).

Laguerreova metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Za početnu točku uzimamo $x_0 = 1$, jer za $x_0 = 2$, drugi korijen koji javlja u metodi **ne** daje realan broj.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.0000000000000000	-0.5000000000000000	-0.145497224367903
1	1.145497224367903	0.003080095095887	0.000782981936678
2	1.144714242431225	-0.000000000480015	-0.000000000122107
3	1.144714242553332	0.0000000000000000	0.0000000000000000
4	1.144714242553332	0.0000000000000000	

Izračunata nultočka je $x_4 = 1.14471424255333187$.

Laguerreova metoda, kubna konvergencija

Ponovno, **korekcija** pokazuje da se broj točnih znamenki u x_n približno **utrostručava**.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.000000000000000000	-5.00000000000E-01	-1.45497224368E-01
1	1.14549722436790281	3.08009509589E-03	7.82981936678E-04
2	1.14471424243122508	-4.80015464226E-10	-1.22106786356E-10
3	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	2.75800370811E-20
4	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	

Laguerreova m ., numerički red konvergencije

Kao što i očekujeno, **numerički red** konvergencije je 3.

n	x_n	p_n	c_n
0	1.000000000000000000	—	—
1	1.14549722436790281	—	—
2	1.14471424243122508	—	—
3	1.14471424255333187	3.00297	2.59843E-01
4	1.14471424255333187	—	—

Metode izvedene iz razvoja $1/f$

Razvijemo li funkciju $1/f$ u Taylorov polinom, iz koeficijenata tog razvoja, također, možemo dobiti metode bilo kojeg reda konvergenције za nalaženje jednostruke nultočke funkcije f .

Podloga za konstrukciju ovih metoda je tzv. Königov teorem.

Neka f ima konvergentan Taylorov razvoj (analitička je) na nekom krugu oko točke x (općenito, u kompleksnoj ravnini \mathbb{C}), koji sadrži točno jednu jednostruku nultočku α od f .

Onda i funkcija $h = 1/f$ ima konvergentan Taylorov razvoj

$$h(t) := \frac{1}{f(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(x)}{k!} (t - x)^k,$$

(tj. analitička je) na krugu $|t - \alpha| < |x - \alpha|$ (opet, u \mathbb{C}).

Metode izvedene iz razvoja $1/f$

Za $p \geq 2$, neka je $Q_{p-1}(x)$ omjer **susjednih** koeficijenata u ovom razvoju,

$$Q_{p-1}(x) := \frac{h^{(p-2)}(x) / (p-2)!}{h^{(p-1)}(x) / (p-1)!} = (p-1) \frac{(1/f(x))^{(p-2)}}{(1/f(x))^{(p-1)}}.$$

Onda **iteracijska** funkcija

$$\varphi_p(x) := x + Q_{p-1}(x)$$

konvergira prema α , i to s **redom konvergencije** (barem) p . ■

Za $p = 2$, i ovdje dobivamo **Newtonovu** metodu (provjerite).

Za $p = 3$, izlazi **iteracijska** funkcija za tzv. **Halleyevu** metodu

$$\varphi(x) = x - \frac{u}{1 - A_2 u}.$$

Halleyeva metoda — lakši izvod

Funkciju f , u okolini točke x , aproksimiramo **Taylorovim polinomom** P_2 , stupnja 2, kao kod **Laguerreove** metode,

$$P_2(t) = f(x) + f'(x)(t - x) + \frac{f''(x)}{2} (t - x)^2.$$

U **najvišem** članu $(t - x)^2$, za **jedan** faktor $(t - x)$ iskoristimo **Newtonovu** aproksimaciju

$$t - x \approx -u = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Stupanj polinoma **pada** za 1, pa dobivamo **linearni** polinom \tilde{P}_1 ,

$$\tilde{P}_1(t) = f(x) + \left(f'(x) - \frac{f''(x)}{2} u \right) (t - x).$$

Iz $\tilde{P}_1(t) = 0$, izlazi upravo **Halleyeva** metoda (**red** je barem 3).

Halleyeva metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Ponovno startamo iz $x_0 = 2$.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.5000000000000000	0.742857142857143
1	1.257142857142857	0.486798833819242	0.111805016364194
2	1.145337840778664	0.002452770217608	0.000623598102057
3	1.144714242676607	0.000000000484607	0.000000000123275
4	1.144714242553332	0.0000000000000000	0.0000000000000000
5	1.144714242553332	0.0000000000000000	

Izračunata nultočka je $x_5 = 1.14471424255333187$.

Halleyeva metoda, kubna konvergencija

Gledanjem znanstvenog zapisa, vidi se kubna konvergencija.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.000000000000000000	6.500000000000E-00	7.42857142857E-01
1	1.25714285714285714	4.86798833819E-01	1.11805016364E-01
2	1.14533784077866351	2.45277021761E-03	6.23598102057E-04
3	1.14471424267660666	4.84607030069E-10	1.23274793178E-10
4	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	2.75800370811E-20
5	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	

Halleyeva metoda, numerički red konvergencije

Numerički red konvergencije Halleyeve metode je blizu 3.

n	x_n	p_n	c_n
0	2.000000000000000000	—	—
1	1.25714285714285714	—	—
2	1.14533784077866351	—	—
3	1.14471424267660666	2.56001	1.67754E-01
4	1.14471424255333187	2.97168	4.12474E-01
5	1.14471424255333187	—	—

Metode s pamćenjem

Metode s pamćenjem imaju **barem dvije** startne točke. Takva je, na primjer, metoda **sekante**.

I za metode s pamćenjem možemo konstruirati metode **višeg reda** od 2. Na primjer, metoda ${}^*E_{1,2}$ definirana **iteracijskom funkcijom**

$${}^*E_{1,2} = x_n - u_n - \frac{u_n^2}{f'_n} \cdot \left[\frac{1}{x_n - x_{n-1}} (2f'_n + f'_{n-1} - 3f[x_n, x_{n-1}]) \right]$$

ima svojstvo da treba **jednako** izvrednjavanja funkcije kao i Newtonova metoda (pamte se vrijednosti funkcije i derivacije).

Indeksi u formuli znače izvrednjavanje u odgovarajućoj točki!

Njezin **red konvergencije** je $p = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73$.

Metoda $*E_{1,2}$, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Metodu startamo iz $x_0 = 2$, tako da x_1 dobijemo po Newtonovoj metodi, pa imamo **dvije** startne točke.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.5000000000000000	0.5416666666666667
1	1.4583333333333333	1.601490162037037	0.294212878320100
2	1.164120455013233	0.077588606715436	0.019397373047930
3	1.144723081965303	0.000034748987607	0.000008839411970
4	1.144714242553333	0.0000000000000003	0.0000000000000001
5	1.144714242553332	0.0000000000000000	0.0000000000000000
6	1.144714242553332	0.0000000000000000	

Izračunata nultočka je $x_6 = 1.14471424255333187$.

Metoda $*E_{1,2}$, konvergencija

Gledanjem znanstvenog zapisa, uočavamo brzu konvergenciju metode.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.000000000000000000	6.500000000000E+00	5.41666666667E-01
1	1.458333333333333333	1.60149016204E+00	2.94212878320E-01
2	1.16412045501323302	7.75886067154E-02	1.93973730479E-02
3	1.14472308196530270	3.47489876068E-05	8.83941196996E-06
4	1.14471424255333275	3.45318391937E-15	8.78424181034E-16
5	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	2.75800369996E-20
6	1.14471424255333187	1.08420217249E-19	

Metoda $*E_{1,2}$, numerički red konvergencije

Numerički red konvergencije metode $*E_{1,2}$ ovdje ide prema 3!

n	x_n	p_n	C_n
0	2.00000000000000000000	—	—
1	1.45833333333333333333	—	—
2	1.16412045501323302	—	—
3	1.14472308196530270	2.77393	4.83862E-01
4	1.14471424255333275	2.76510	4.79113E-01
5	1.14471424255333187	2.99347	1.17873E+00
6	1.14471424255333187	—	—

Napomena. Za kubni polinom $f(x) = x^3 - 1.5$, stvarni red konvergencije metode je zaista jednak 3.

Međutim, za polinom višeg stupnja ($x^4 - 2$), ili neku drugu funkciju ($e^x - 3$), numerički red konvergencije je blizu $1 + \sqrt{3}$.