Numerička matematika — dodatak
Christoffel–Darbouxov identitet i dokaz

Teorem (Christoffel–Darbouxov identitet).

Neka je $\{p_n \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom w. Pretpostavimo da je $x \neq y$. Onda vrijedi

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{p_j(x)p_j(y)}{\gamma_j} = \frac{p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)}{a_{n-1}\gamma_{n-1}(x-y)}, \quad n \geq 1.$$

Prijelazom na limes $y \to x$, dobivamo Christoffel–Darbouxov identitet u jednoj točki x

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\big(p_j(x)\big)^2}{\gamma_j} = \frac{p'_n(x)p_{n-1}(x) - p'_{n-1}(x)p_n(x)}{a_{n-1}\gamma_{n-1}}.$$

Dokaz. Obje tvrdnje su izravna posljedica tročlane homogene rekurzije za ortogonalne polinome, samo je "tehnička" manipulacija formulama nešto **složenija**, jer su formule "dugačke" (i upravo zato **nisu** za slajdove).

Za početak, radi potpunosti, ponovimo rezultat o tročlanoj rekurziji za danu familiju ortogonalnih polinoma $\{p_n \mid n \geq 0\}$. Navodimo samo onaj dio rezultata koji je potreban u ovom dokazu.

Za $n \geq 0$, neka je A_n vodeći koeficijent polinoma p_n, uz potenciju x^n (znamo da je $A_n \neq 0$) i neka je γ_n kvadrat norme polinoma p_n u pripadnom skalarnom produktu,

$$\gamma_n = \|p_n\|_2^2 > 0, \quad n \geq 0.$$

Za danu familiju ortogonalnih polinoma vrijedi tročlana homogena rekurzija

$$p_{n+1}(x) = (a_n x + b_n)p_n(x) - c_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Koeficijenti u rekurziji dani su formulama

$$a_n = \frac{A_{n+1}}{A_n}, \quad c_n = \frac{a_n\gamma_n}{a_{n-1}\gamma_{n-1}}.$$

Formula za b_n **nije** potrebna u dokazu, pa ju zato ne navodimo. Osim toga, za a_n bitno je samo da je $a_n \neq 0$, tako da ni gornja formula za a_n **nije** potrebna.

Uočimo još da za **prva** dva polinoma vrijedi

$$p_1(x) = (a_0 x + b_0)p_0(x),$$

uz $p_0(x) = A_0 \neq 0$, a b_0 se izračuna iz polinoma p_1. Onda možemo uzeti da rekurzija vrijedi i za $n = 0$, uz dogovor da je $p_{-1} = 0$, a pripadni koeficijent c_0 može biti bilo što.

Neka je $n \geq 1$. Za $x \neq y$, na lijevoj strani Christoffel–Darbouxovog identiteta javlja se suma članova oblika

$$\frac{p_j(x)p_j(y)}{\gamma_j}.$$

Ideja dokaza je izraziti taj član preko tročlane rekurzije za $p_{j+1}(x)$, odnosno, $p_{j+1}(y)$.

Uzmemo bilo koji indeks j, takav da je $0 \leq j < n$. Prvo napišemo tročlanu rekurziju za p_{j+1} u varijabli x i pomnožimo ju s $p_j(y)$, pa dobijemo

$$p_{j+1}(x)p_j(y) = (a_j x + b_j)p_j(x)p_j(y) - c_j p_{j-1}(x)p_j(y).$$

Zatim napišemo rekurziju za p_{j+1} u varijabli y i pomnožimo ju s $p_j(x)$, pa dobijemo

$$p_{j+1}(y)p_j(x) = (a_j y + b_j)p_j(y)p_j(x) - c_j p_{j-1}(y)p_j(x).$$

Kad od prve relacije oduzmemo drugu, članovi $b_j p_j(x)p_j(y)$ se skrate (i zato b_j ne treba za dokaz), tako da razlika glasi

$$p_{j+1}(x)p_j(y) - p_{j+1}(y)p_j(x) = a_j(x-y)p_j(x)p_j(y) - c_j\big(p_{j-1}(x)p_j(y) - p_{j-1}(y)p_j(x)\big).$$

Prvi član s desne strane izrazimo preko ostalih i okrenemo strane jednadžbe. Usput, sve produkte napišemo tako da prvo ide faktor u varijabli x, a onda faktor u varijabli y. Izlazi

$$a_j(x-y)p_j(x)p_j(y) = \big(p_{j+1}(x)p_j(y) - p_j(x)p_{j+1}(y)\big) + c_j\big(p_{j-1}(x)p_j(y) - p_j(x)p_{j-1}(y)\big).$$

Na kraju, obrnemo poredak članova u drugoj zagradi, tako da poredak za polinome u varijabli x bude padajući po indeksima,

$$a_j(x-y)p_j(x)p_j(y) = \big(p_{j+1}(x)p_j(y) - p_j(x)p_{j+1}(y)\big) - c_j\big(p_j(x)p_{j-1}(y) - p_{j-1}(x)p_j(y)\big).$$

Kad usporedimo prvu i drugu zagradu, vidimo da one imaju **isti** oblik, samo su indeksi u drugoj **manji za jedan**. Za kraći zapis, uvedimo sljedeću oznaku (indeks odgovara drugoj zagradi)

$$Q_j(x,y) := p_j(x)p_{j-1}(y) - p_{j-1}(x)p_j(y), \quad j = 0,\ldots,n.$$

Zbog dogovora $p_{-1}(x) = p_{-1}(y) = 0$, vidimo da je $Q_0(x,y) = 0$. Onda j-ta jednadžba postaje

$$a_j(x-y)p_j(x)p_j(y) = Q_{j+1}(x,y) - c_j Q_j(x,y), \quad j = 0,\ldots,n-1,$$

s tim da, za $j = 0$, nema drugog člana na desnoj strani.

Da bismo dobili željeni oblik lijeve strane, ovu jednadžbu **podijelimo** s $a_j\gamma_j$ — tu je bitno da je $a_j \neq 0$ i $\gamma_j \neq 0$. Nakon toga, dobivamo

$$(x-y)\,\frac{p_j(x)p_j(y)}{\gamma_j} = \frac{Q_{j+1}(x,y)}{a_j\gamma_j} - \frac{c_j Q_j(x,y)}{a_j\gamma_j}.$$

Ovdje iskoristimo formulu za c_j iz rekurzije, tako da je

$$\frac{c_j}{a_j\gamma_j} = \frac{a_j\gamma_j}{a_{j-1}\gamma_{j-1}} \cdot \frac{1}{a_j\gamma_j} = \frac{1}{a_{j-1}\gamma_{j-1}}.$$

Ovo vrijedi samo za $j > 0$. Za $j = 0$, možemo dogovorno definirati bilo koje vrijednosti za a_{-1} i γ_{-1} (recimo, $a_{-1} = \gamma_{-1} = 1$), jer pripadni faktor množi $Q_0(x,y) = 0$. Kad to uvrstimo u jednadžbe, izlazi

$$(x-y)\,\frac{p_j(x)p_j(y)}{\gamma_j} = \frac{Q_{j+1}(x,y)}{a_j\gamma_j} - \frac{Q_j(x,y)}{a_{j-1}\gamma_{j-1}}.$$

Na kraju, zbrojimo sve ove jednadžbe, za $j = 0,\ldots,n-1$. Onda dobijemo

$$(x-y)\sum_{j=0}^{n-1} \frac{p_j(x)p_j(y)}{\gamma_j} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{Q_{j+1}(x,y)}{a_j\gamma_j} - \frac{Q_j(x,y)}{a_{j-1}\gamma_{j-1}} \right).$$

U sumi na desnoj strani, **skrate** se svi članovi osim prvog, za $j = n - 1$, a znamo da je $Q_0(x, y) = 0$. Dakle, vrijedi

$$(x - y) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{p_j(x)p_j(y)}{\gamma_j} = \frac{Q_n(x, y)}{a_{n-1}\gamma_{n-1}}.$$

Kad uvrsimo $Q_n(x, y)$ i sve podijelimo s $x - y$, izlazi prvi Christoffel–Darbouxov identitet

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{p_j(x)p_j(y)}{\gamma_j} = \frac{p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)}{a_{n-1}\gamma_{n-1}(x - y)}.$$

Za dokaz drugog identiteta, gledamo limes obje strane kad $y \to x$. Na lijevoj strani odmah dobivamo to što treba, jer su polinomi p_j neprekidni u x,

$$\lim_{y \to x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{p_j(x)p_j(y)}{\gamma_j} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(p_j(x))^2}{\gamma_j}.$$

Desnu strano prvo proširimo s $\mp p_n(y)p_{n-1}(y)$ i onda računamo limes

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(p_j(x))^2}{\gamma_j} &= \lim_{y \to x} \frac{p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)}{a_{n-1}\gamma_{n-1}(x - y)} \\
&= \lim_{y \to x} \frac{p_n(x)p_{n-1}(y) - p_n(y)p_{n-1}(y) + p_n(y)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)}{a_{n-1}\gamma_{n-1}(x - y)} \\
&= \{ \text{ spojimo prva dva i druga dva člana u brojniku } \} \\
&= \frac{1}{a_{n-1}\gamma_{n-1}} \left(\lim_{y \to x} \frac{p_n(x) - p_n(y)}{x - y} \, p_{n-1}(y) - \lim_{y \to x} \frac{p_{n-1}(x) - p_{n-1}(y)}{x - y} \, p_n(y) \right) \\
&= \{ \ p_n \text{ i } p_{n-1} \text{ su neprekidni i derivabilni u } x \ \} \\
&= \frac{1}{a_{n-1}\gamma_{n-1}} \big(p_n'(x)p_{n-1}(x) - p_{n-1}'(x)p_n(x) \big).
\end{aligned}$$

■