Numerička matematika
5. predavanje

Saša Singer

singer@math.hr

web.math.pmf.unizg.hr/~singer

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Interpolacija polinomima:
  - Lagrangeova baza.
  - Računanje Lagrangeovog oblika IP.
  - Ocjena pogreške za dovoljno glatke funkcije.
  - Newtonova baza i podijeljene razlike.
  - Računanje Newtonovog oblika IP.
  - Newton za ekvidistantne čvorove, konačne razlike.
  - Koliko je dobar interpolacijski polinom?
  - Primjer Runge.
  - Optimalni izbor čvorova i Čebiševljeva mreža.
  - Hermiteova interpolacija i ocjena greške.
  - Newtonov oblik Hermiteovog IP.

Informacije — predavanja

Trenutno nema konkretnih informacija.

- Pratite web stranice fakulteta!
- Za “nastavu na daljinu” pratite web stranice kolegija.

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Da bismo našli koeficijente interpolacijskog polinoma, nije potrebno (ni dobro) rješavati linearni sustav za koeficijente.

Interpolacijski polinom p_n treba zapisati u nekoj drugoj bazi.

Po definiciji, Lagrangeova baza $\{\ell_k, k = 0, \ldots, n\}$ u prostoru polinoma $\mathcal{P}_n$ je ona baza za koju je

- matrica sustava za interpolaciju baš jedinična matrica, tj.
- za koeficijente interpolacijskog polinoma vrijedi $a_k = f_k$.

Dakle, Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma p_n je

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \ell_k(x).$$

Koeficijenti su zadani podaci f_k, a problem je izračunati bazu!

Lagrangeova baza — kardinalna interpolacija

U Lagrangeovoj bazi, elementi matrice A sustava interpolacije su $A_{ik} = \ell_k(x_i)$, za $i, k = 0, \ldots, n$. Iz uvjeta $A = I$ dobivamo:

Polinomi ℓ_k Lagrangeove baze su rješenja posebnih problema interpolacije

$$\ell_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k, \end{cases}$$

u kojima su desne strane (zadane vrijednosti) upravo jedinični vektori e_{k+1} standardne baze u $\mathbb{R}^{n+1}$, za $k = 0, \ldots, n$.

Raniji teorem $\Longrightarrow$ postoje jedinstveni polinomi $\ell_k \in \mathcal{P}_n$ koji zadovoljavaju ove — tzv. kardinalne uvjete interpolacije.

- Iz njih odmah slijedi da je $\{\ell_k, k = 0, \ldots, n\}$ baza u $\mathcal{P}_n$ (katkad se zove i kardinalna baza). Dokažite to!

Lagrangeova baza — eksplicitni oblik polinoma

Kardinalni uvjeti interpolacije za polinom ℓ_k

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k, \end{cases}$$

zadaju sve nultočke i još jednu vrijednost za ℓ_k. Odavde slijedi

$$\ell_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})\,(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})\,(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} := \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Iz ovog oblika vidimo da je za računanje vrijednosti polinoma $p_n(x)$ u Lagrangeovoj formi potrebno $O(n^2)$ operacija.

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

To je ubrzanje obzirom na $O(n^3)$ iz sustava, ali može još brže.

Polinom

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

zovemo polinom čvorova.

Polinome $\ell_k(x)$ Lagrangeove baze možemo napisati preko $\omega(x)$,

$$\ell_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\,\omega_k(x_k)}.$$

Nadalje, derivacijom ω kao produkta izlazi $\omega_k(x_k) = \omega'(x_k)$, pa je

$$p_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{(x - x_k)\,\omega'(x_k)}.$$

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Forma

$$p_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{(x - x_k)\,\omega'(x_k)}$$

se može koristiti za računanje vrijednosti polinoma u točki $x \neq x_k$, za $k = 0, \ldots, n$ (za $x = x_k$ znamo da je $p_n(x_k) = f_k$). Broj operacija za svaku točku x je $O(n)$, tj. linearan u n.

Ipak, svrha Lagrangeovog oblika interpolacijskog polinoma

- nije računanje vrijednosti u točki, već se uglavnom koristi za teoretske svrhe (dokaze).

Ako znamo neke informacije o funkciji f, možemo napraviti i ocjenu greške interpolacijskog polinoma. Razumno u praksi:

- f je "malo više" netrivijalno glatka od polinoma p_n.

Greška interpolacijskog polinoma

Teorem. Pretpostavimo da

- funkcija f ima $(n+1)$-u derivaciju na segmentu $[a, b]$ za neki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \ldots, n$, su međusobno različiti čvorovi interpolacije, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$;
- p_n je interpolacijski polinom za f u tim čvorovima.

Za bilo koju točku $x \in [a, b]$, postoji točka ξ

$$x_{\min} := \min\{x_0, \ldots, x_n, x\} < \xi < \max\{x_0, \ldots, x_n, x\} =: x_{\max}$$

takva da za grešku interpolacijskog polinoma vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} \, f^{(n+1)}(\xi).$$

Greška interpolacijskog polinoma

Dokaz. 1. slučaj — ako je $x = x_k$, tj. x je čvor interpolacije.

Tada je $e(x_k) = \omega(x_k) = 0$, pa su obje strane posljednje relacije jednake 0, a ξ je proizvoljan. Dakle, tvrdnja vrijedi!

2. slučaj — pretpostavimo da x nije čvor interpolacije.

Tada je $\omega(x) \neq 0$ i grešku interpolacije prikazujemo u obliku

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \omega(x) s(x),$$

s time da je $s(x)$ korektno definiran (broj), čim x nije čvor.

Fiksirajmo x, a zatim definiramo funkciju $g = g_x$ u varijabli t

$$g(t) = e(t) - \omega(t) s(x) = e(t) - \omega(t) \frac{e(x)}{\omega(x)}, \quad t \in [a, b].$$

Greška interpolacijskog polinoma

Gledamo derivabilnost od g po t, s tim da su p_n i ω polinomi. Zaključci:

- funkcija pogreške e ima točno onoliko derivacija (po t) koliko i f, i one su neprekidne kad su to i derivacije od f;
- x nije čvor, pa je $g^{(n+1)}$ korektno definirana na $[a, b]$.

Nađimo koliko nultočaka ima funkcija g. Ako za t uvrstimo čvor x_k, dobivamo

$$g(x_k) = e(x_k) - \omega(x_k)\,\frac{e(x)}{\omega(x)} = 0, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Jednako tako je i

$$g(x) = e(x) - e(x) = 0.$$

Drugim riječima, g ima barem $n+2$ nultočke na $[x_{\min}, x_{\max}]$.

Greška interpolacijskog polinoma

Sad iskoristimo da $g^{(n+1)}$ postoji na $[x_{\min}, x_{\max}] \subseteq [a, b]$.

Zbog $n \geq 0$, funkcija g je derivabilna na $[x_{\min}, x_{\max}]$, pa

- Rolleov teorem $\Longrightarrow$ g' ima barem $n+1$ nultočku unutar $(x_{\min}, x_{\max})$.

Induktivnom primjenom Rolleovog teorema zaključujemo da

- $g^{(j)}$ ima barem $n+2-j$ nultočaka na $(x_{\min}, x_{\max})$, za $j = 0, \ldots, n+1$;
- Na kraju, za $j = n+1$ dobivamo da $g^{(n+1)}$ ima bar jednu nultočku $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$.

Ova nultočka ξ, naravno, ovisi o x, isto kao i funkcija g.

Za kraj dokaza, treba izračunati $g^{(n+1)}$ i uvrstiti nultočku ξ.

Greška interpolacijskog polinoma

Znamo da su p_n i ω polinomi odgovarajućih stupnjeva:

- p_n je polinom stupnja najviše n, pa je $p_n^{(n+1)} = 0$,
- ω je polinom stupnja točno $n + 1$.

Onda je

$$e^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t), \quad \omega^{(n+1)}(t) = (n+1)!\,.$$

Uvrštavanjem ovih relacija u izraz za $g^{(n+1)}(t)$, dobivamo

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(t) &= e^{(n+1)}(t) - \omega^{(n+1)}(t)\,\frac{e(x)}{\omega(x)} \\ &= f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\,\frac{e(x)}{\omega(x)}. \end{aligned}$$

Greška interpolacijskog polinoma

Kad uvažimo da je $g^{(n+1)}(\xi) = 0$, onda je

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\,\frac{e(x)}{\omega(x)},$$

odnosno,

$$e(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi).$$

Uočite sljedeće bitne stvari u tvrdnji i dokazu:

- Dovoljno je samo da $f^{(n+1)}(x)$ postoji, za svaki $x \in [a, b]$, bez daljnjih zahtjeva (ograničenost, neprekidnost, i sl.).
- Faktor $\omega(x)$ osigurava poništavanje greške u čvorovima. Lijepi oblik $\Rightarrow$ treba $n+1$-a derivacija. Zato nam treba prijelaz na t i "trik" s x, kao dodatnom nultočkom za g.

Za drugačije glatkoće od f postoje tzv. Jacksonovi teoremi.

Ocjena greške interpolacijskog polinoma

Pojačanje tvrdnje.

- Ako je $f^{(n+1)}$ ograničena na $[a,b]$, ili, jače,
- ako je $f \in C^{n+1}[a,b]$, tj. f ima neprekidnu $(n+1)$-u derivaciju na $[a,b]$,

onda vrijedi sljedeća “globalna” ocjena greške interpolacijskog polinoma p_n za funkciju f, u bilo kojoj točki $x \in [a,b]$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|\omega(x)|}{(n+1)!} M_{n+1}, \qquad M_{n+1} := \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Ova ocjena slijedi direktno iz prošlog teorema, a korisna je ako relativno jednostavno možemo

- izračunati ili odozgo ocijeniti vrijednost M_{n+1}.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma (IP)

- nije pogodan za dodavanje čvorova, tj. za postupno povećanje stupnja interpolacijskog polinoma.

Postoji i Newtonova forma interpolacijskog polinoma (IP),

- koja se može izvesti tako da se interpolacijskom polinomu dodaju nove točke interpolacije (x_k, f_k), tj. povećava se stupanj interpolacijskog polinoma.

Početak konstrukcije = interpolacijski polinom stupnja 0:

Krećemo od čvora x_0 i konstante p_0 koja interpolira funkciju f u čvoru x_0

$$p_0(x) = f_0.$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Prvi korak = interpolacijski polinom stupnja 1:

- Dodajmo još jedan čvor interpolacije, x_1.

Polinom p_1 napišimo kao zbroj polinoma p_0 i korekcije r_1,

$$p_1(x) = p_0(x) + r_1(x).$$

Prvo uočimo:

- r_1 mora biti stupnja (najviše) 1.

Zatim, iz uvjeta interpolacije u ranijem čvoru x_0 imamo

$$f_0 = p_1(x_0) = p_0(x_0) + r_1(x_0) = f_0 + r_1(x_0),$$

tj. mora biti $r_1(x_0) = 0$. Dakle, r_1 mora imati oblik

$$r_1(x) = a_1(x - x_0).$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Na kraju, iz uvjeta interpolacije u novom čvoru x_1 imamo

$$f_1 = p_1(x_1) = p_0(x_1) + r_1(x_1) = f_0 + r_1(x_1),$$

tj. mora biti $r_1(x_1) = f_1 - f_0$. Iz $r_1(x_1) = a_1(x_1 - x_0)$ izlazi

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.$$

Drugi korak = interpolacijski polinom stupnja 2:

- Dodajmo još jedan čvor interpolacije, x_2.

Polinom p_2 napišimo kao zbroj polinoma p_1 i korekcije r_2,

$$p_2(x) = p_1(x) + r_2(x).$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Opet, korekcija r_2 mora biti stupnja (najviše) 2.

Iz uvjeta interpolacije u ranijim čvorovima x_0 i x_1 imamo

$$f_k = p_2(x_k) = p_1(x_k) + r_2(x_k) = f_k + r_2(x_k), \quad k = 0, 1,$$

tj. mora biti $r_2(x_0) = r_2(x_1) = 0$. Dakle, r_2 mora imati oblik

$$r_2(x) = a_2(x - x_0)(x - x_1).$$

Na kraju, koeficijent a_2 računamo iz uvjeta interpolacije u novom čvoru x_2.

U nastavku konstrukcije, na isti način dobivamo iste zaključke:

- Korekcija mora imati nultočke u svim ranijim čvorovima,
- a koeficijent izlazi iz uvjeta interpolacije u novom čvoru.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Nastavimo li postupak do čvora x_n, dobit ćemo interpolacijski polinom

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k),$$

zapisan u "donjoj trokutastoj" ili Newtonovoj bazi

$$1, \quad (x - x_0), \quad (x - x_0)(x - x_1), \quad \ldots, \quad \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)$$

u prostoru $\mathcal{P}_n$ polinoma stupnja manjeg ili jednakog n.

Sada samo treba odrediti koeficijente a_k. Prethodni postupak odgovara supstituciji unaprijed (probajte). Međutim, može i elegantnije, što otkriva dodatna svojstva koeficijenata a_k!

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Već smo pokazali da je

$$a_0 = f_0, \quad a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.$$

Budući da dižemo stupanj interpolacijskog polinoma, onda a_k ovisi samo o funkciji f i “trenutnim” čvorovima $x_0, \ldots, x_k$.

Oznaka i definicija za koeficijente u Newtonovom obliku IP:

$$a_k = f[x_0, \ldots, x_k], \quad k = 0, \ldots, n,$$

a veličinu $f[x_0, \ldots, x_k]$ zovemo

- k-ta podijeljena razlika funkcije f s čvorovima $x_0, \ldots, x_k$.

Katkad se koristi “operatorska” oznaka $[x_0, \ldots, x_k]f$.

Podijeljene razlike

Lema. Za međusobno različite čvorove $x_0, \ldots, x_n$, podijeljena razlika $f[x_0, \ldots, x_n]$ ne ovisi o permutaciji čvorova σ, tj.

$$f[x_0, \ldots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n)}].$$

Dokaz. Označimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_n

- s a_k — ako je poredak čvorova $x_0, \ldots, x_n$,
- s b_k — ako je poredak čvorova $x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$.

Dakle,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \\ &= b_0 + b_1(x - x_{\sigma(0)}) + \cdots + b_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_{\sigma(k)}). \end{aligned}$$

Podijeljene razlike

Oba zapisa predstavljaju isti polinom p_n, pa

- koeficijenti uz odgovarajuće potencije od x moraju biti jednaki.

Uspoređivanjem koeficijenata uz x^n vidimo da je $a_n = b_n$. ■

Kasnije ćemo vidjeti da čvorovi ne moraju biti različiti.

Ostaje još samo pitanje kako efikasno računati $f[x_0, \ldots, x_n]$.

Lema. Za podijeljene razlike vrijedi sljedeća rekurzija

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0},$$

s tim da je $f[x_k] = f_k$. Ovdje pretpostavljamo da je $x_0 \neq x_n$.

Podijeljene razlike

Dokaz. Označimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_n u odgovarajućem Newtonovom obliku

- s a_k — ako je poredak čvorova $x_0, \ldots, x_n$,
- s b_k — ako je poredak čvorova $x_n, \ldots, x_0$.

Dakle,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k) \\ &= b_0 + b_1(x - x_n) + \cdots + b_n \prod_{k=1}^{n}(x - x_k). \end{aligned}$$

U prethodnoj lemi je dokazano da je $a_n = b_n$. Usporedimo sad koeficijente uz x^{n-1}.

Podijeljene razlike

Koeficijent uz x^{n-1} dobivamo kao zbroj dva koeficijenta:

- koeficijent uz pretposljednji član u p_n, što je a_{n-1} u jednom slučaju, a b_{n-1} u drugom,
- u posljednjem članu — u produktu faktora $\prod_{k=\cdots}^{\cdots}(x - x_k)$, uzmemo iz jedne zagrade $-x_k$, a iz svih ostalih x.

Izjednačavanjem koeficijenata dobivamo

$$a_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k = b_{n-1} - b_n \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Uvažimo da je $a_n = b_n$

$$a_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k = b_{n-1} - a_n \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Podijeljene razlike

Skratimo iste članove $x_1, \ldots, x_{n-1}$ u obje sume, pa ostaje

$$b_{n-1} - a_{n-1} = a_n(x_n - x_0),$$

ili

$$a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{x_n - x_0}.$$

Kad uvrstimo da je

$$\begin{aligned} a_n &= f[x_0, \ldots, x_n], \\ a_{n-1} &= f[x_0, \ldots, x_{n-1}], \\ b_{n-1} &= f[x_n, \ldots, x_1] = f[x_1, \ldots, x_n], \end{aligned}$$

odmah izlazi tražena rekurzija.

Start rekurzije je $f[x_k] = f_k$, što se vidi iz konstantnog interpolacijskog polinoma. ■

Tablica podijeljenih razlika

Tablica svih potrebnih podijeljenih razlika ima ovaj oblik:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
x_k & f[x_k] & f[x_k, x_{k+1}] & f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] & \cdots & f[x_0, \ldots, x_n] \\
\hline
x_0 & f[x_0] & & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & & f[x_1, x_2] & & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & f[x_0, \ldots, x_n] \\
 & & f[x_{n-2}, x_{n-1}] & & \iddots & \\
x_{n-1} & f[x_{n-1}] & & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & & \\
 & & f[x_{n-1}, x_n] & & & \\
x_n & f[x_n] & & & &
\end{array}
$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Konačni izgled Newtonovog interpolacijskog polinoma je

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Od tablice podijeljenih razlika treba nam samo "gornji rub". To se može izračunati u jednom jednodimenzionalnom polju.

Algoritam računanja podijeljenih razlika

```
za i = 1 do n radi {
  za j = n do i radi {
    f[j] = (f[j] - f[j - 1])/(x[j] - x[j - i]);
  };
};
```

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Nakon završetka algoritma za računanje podijeljenih razlika

- "gornji rub" $f[x_0, \ldots, x_i]$ se nalazi, redom, u polju `f`.

Algoritam izvrednjavanja interpolacijskog polinoma p_n u nekoj točki x ima oblik Hornerove sheme.

Algoritam izvrednjavanja interpolacijskog polinoma

```
sum = f[n];
za i = n - 1 do 0 radi {
  sum = sum * (x - x[i]) + f[i];
};
/* Na kraju je p_n(x) = sum. */
```

Složenost je $O(n)$ operacija po svakoj točki x.

Zapis greške interpolacijskog polinoma

Izraz za grešku interpolacijskog polinoma p_n na $[a, b]$ iz ranijeg teorema, možemo pisati korištenjem podijeljenih razlika.

Ideja. U Newtonov oblik polinoma p_n dodajmo još jedan čvor $x_{n+1} \in [a, b]$, s tim da x_{n+1} nije jednak ni jednom od polaznih čvorova $x_0, \ldots, x_n$. Dobivamo polinom p_{n+1} za kojeg vrijedi

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ &\qquad + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &\qquad + f[x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}]\,(x - x_0) \cdots (x - x_n). \\ &= p_n(x) + (x - x_0) \cdots (x - x_n)\, f[x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}] \\ &= p_n(x) + \omega(x)\, f[x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}], \end{aligned}$$

gdje je ω polinom čvorova za polazne čvorove $x_0, \ldots, x_n$.

Zapis greške interpolacijskog polinoma

Uvjet interpolacije za polinom p_{n+1} u dodanom čvoru x_{n+1} je

$$p_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_{n+1}).$$

On služi samo tome da dobijemo f, umjesto p_{n+1}, na lijevoj strani. A sad, zaboravimo na p_{n+1} i pogledajmo što to kaže o polinomu p_n od kojeg smo krenuli. Dobivamo

$$f(x_{n+1}) = p_n(x_{n+1}) + \omega(x_{n+1})\, f[x_0, \ldots, x_{n+1}],$$

odakle odmah slijedi izraz za grešku interpolacije u točki x_{n+1}

$$f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}) = \omega(x_{n+1})\, f[x_0, \ldots, x_{n+1}].$$

Ovo je algebarski identitet — tu nema nikakvih "čudesa"!

Obično se piše x, umjesto x_{n+1}, zato da naglasimo da ta točka može varirati, a zadane čvorove $x_0, \ldots, x_n$ smatramo fiksnima.

Greška interpolacijskog polinoma

Teorem. Neka je f funkcija definirana na segmentu $[a, b]$. Neka je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i

- neka su $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \ldots, n$, međusobno različiti čvorovi interpolacije, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$,
- i neka je p_n interpolacijski polinom za f u tim čvorovima.

Za bilo koju točku $x \in [a, b]$, takvu da je $x \neq x_0, \ldots, x_n$, tj. čim x nije čvor interpolacije, za grešku interpolacije vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \omega(x)\, f[x_0, \ldots, x_n, x]. \qquad \blacksquare$$

Bitno: Ovo vrijedi bez ikakvih dodatnih pretpostavki na f.

- Faktor $f[x_0, \ldots, x_n, x]$ ovisi samo o zadanim podacima (x_k, f_k), za $k = 0, \ldots, n$, i točki $(x, f(x))$ — gdje gledamo grešku.

Podijeljena razlika s dvostrukim čvorom

Ako želimo da prethodna formula vrijedi i kad je x jednak nekom od čvorova interpolacije, onda treba osigurati da je

- izraz $f[x_0, \ldots, x_n, x]$ korektno definiran, kad je $x = x_i$.

Pitanje: Što je podijeljena razlika u dvostrukom čvoru?

Definicija ide proširenjem po neprekidnosti. Neka su x_0 i $x_1 = x_0 + h$ dva čvora i pustimo da $h \to 0$. Tada je

$$f[x_0, x_0] = \lim_{h \to 0} f[x_0, x_0 + h] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Dakle, podijeljena razlika $f[x_0, x_0]$ je korektno definirana ako i samo ako prva derivacija f' postoji u x_0.

Uz to proširenje, podijeljene razlike višeg reda računaju se na uobičajeni način — vrijedi rekurzija.

Proširenje — greška interpolacije u čvorovima

Proširenje. Ako f' postoji u svim čvorovima interpolacije, onda prethodna formula za grešku interpolacije polinomom p_n

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \omega(x)\, f[x_0, \ldots, x_n, x]$$

vrijedi za sve $x \in [a, b]$, tj. i kad je x jednak nekom čvoru. ∎

Velika prednost ovog oblika = može se derivirati i integrirati kao funkcija od x, uz odgovarajuću glatkoću funkcije f. Osim toga, ova formula vrijedi i kad čvorovi nisu međusobno različiti (v. Hermiteova interpolacija).

Usporedimo to s izrazom za grešku iz ranijeg teorema

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi),$$

za neki $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$, pazeći na pretpostavke i tvrdnju!

Veza podijeljene razlike i derivacije istog reda

Teorem. Neka su zadani čvorovi $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \ldots, n$, i pretpostavimo da $f^{(n+1)}$ postoji na cijelom $[a, b]$. Onda za svaku točku $x \in [a, b]$, postoji točka $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$, takva da za podijeljenu razliku vrijedi

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Tvrdnja vrijedi i kad čvorovi nisu međusobno različiti. ■

Kad stavimo $x = x_{n+1}$, dobijemo

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Za $n = 0$, usporedite ovo s Lagrangeovim teoremom srednje vrijednosti, ili odnosom “sekanta” $\leftrightarrow$ “tangenta”!
Gornja formula je generalizacija za $n \geq 1$ (za više derivacije).

Podijeljene razlike visokog reda za polinome

Iz formule

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

direktno izlazi još i ovaj rezultat.

Korolar. Ako je $f \in \mathcal{P}_n$ polinom stupnja najviše n, onda je

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = 0, \quad \text{za} \quad k \geq n+1,$$

za bilo koji izbor čvorova $x_0, \ldots, x_k$.

Dokaz. Za $k \geq n+1$ vrijedi $f^{(k)}(\xi) = 0$ u svakoj točki ξ. ■

Podijeljena razlika — kao funkcija argumenata

Za ilustraciju, pogledajmo kako se ponaša podijeljena razlika

$$f[x,y] = \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

kao funkcija dvije varijable $x, y \in [a,b]$, na kvadratu $S = [a,b] \times [a,b] \subseteq \mathbb{R}^2$, s dijagonalom $D = \{\, (x,x) \mid x \in [a,b] \,\}$.

Ovisno o svojstvima funkcije f na $[a,b]$, za $f[x,y]$ vrijedi:

- f definirana na $[a,b] \Longrightarrow f[x,y]$ definirana na $S \setminus D$,
- f neprekidna na $[a,b] \Longrightarrow f[x,y]$ neprekidna na $S \setminus D$,
- f derivabilna na $[a,b] \Longrightarrow f[x,y]$ definirana na cijelom S,
- f neprekidno derivabilna na $[a,b] \Longrightarrow f[x,y]$ neprekidna na cijelom S.

Newtonov oblik IP za ekvidistantne čvorove

Newtonov oblik — ekvidistantni čvorovi

Newtonova forma interpolacijskog polinoma može se pojednostavniti

- ako su čvorovi ekvidistantni.

Prisjetimo se, Newtonov interpolacijski polinom izgleda ovako:

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Pojednostavljenje računanja radi se u

- podijeljenim razlikama $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$,
- faktoru $(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$.

Ekvidistantni čvorovi — konačne razlike

Pojednostavnimo prvo podijeljenu razliku.

Točke su ekvidistantne s “razmakom” (ili korakom) h, ako je

$$x_j = x_0 + j \cdot h, \quad j = 0, \ldots, n.$$

Konačnu razliku unaprijed definiramo kao

$$\Delta f_j = f_{j+1} - f_j.$$

Operator Δ zovemo operator konačnih razlika unaprijed.

Konačnu razliku reda k, za $k \in \mathbb{N}$, definiramo rekurzivno kao

$$\Delta^k f_j = \Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j,$$

uz dogovor (definiciju) $\Delta^0 f_j = f_j$.

Podijeljene i konačne razlike

Nađimo vezu podijeljenih i konačnih razlika.

Lema. Ako su točke x_j ekvidistantne, za bilo koji $k \geq 0$ vrijedi

$$f[x_j, \ldots, x_{j+k}] = \frac{1}{k!\, h^k}\, \Delta^k f_j.$$

Dokaz. Ide indukcijom po redu k.

Za $k = 0$, rezultat je očito istinit — po definiciji.

Baza indukcije. Za $k = 1$ imamo

$$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f_{j+1} - f_j}{x_{j+1} - x_j} = \frac{\Delta f_j}{h},$$

pa tvrdnja vrijedi za $k = 1$.

Podijeljene i konačne razlike

Korak indukcije. Pretpostavimo da za sve uzastopne točke $x_j, \ldots, x_{j+k-1}$, za bilo koji "dozvoljeni" j, vrijedi

$$f[x_j, \ldots, x_{j+k-1}] = \frac{1}{(k-1)!\, h^{k-1}} \Delta^{k-1} f_j.$$

Zaključak. Ako je $j + k \leq n$, onda je

$$\begin{aligned}
f[x_j, \ldots, x_{j+k}] &= \frac{f[x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}] - f[x_j, \ldots, x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j} \\
&= \frac{f[x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}] - f[x_j, \ldots, x_{j+k-1}]}{k \cdot h} = (\text{pretp. ind.}) \\
&= \frac{1}{kh} \left(\frac{1}{(k-1)!\, h^{k-1}} \Delta^{k-1} f_{j+1} - \frac{1}{(k-1)!\, h^{k-1}} \Delta^{k-1} f_j \right) \\
&= \frac{1}{k!\, h^k} (\Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j) = \frac{1}{k!\, h^k} \Delta^k f_j.
\end{aligned}$$

Ekvidistantni čvorovi — Newtonova baza

Pojednostavnimo još faktor $(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$.

Zapišimo prvo točku x preko početnog čvora x_0 i koraka h,

$$x = x_0 + s \cdot h.$$

s tim da, ovdje, s može biti i realan broj. Tada je

$$x - x_j = x_0 + s \cdot h - (x_0 + j \cdot h) = (s - j)h,$$

pa je

$$\prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) = \prod_{j=0}^{k-1} \big((s - j)h\big) = h^k \prod_{j=0}^{k-1} (s - j).$$

Ekvidistantni čvorovi — Newtonova baza

Po definiciji binomnih koeficijenata, s tim da i ovdje smije biti $s \in \mathbb{R}$, imamo

$$\binom{s}{0} = 1, \qquad \binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}, \quad k > 0.$$

Odavde odmah slijedi da je

$$h^k \prod_{j=0}^{k-1} (s-j) = h^k k! \binom{s}{k}.$$

Sada možemo napisati Newtonov oblik interpolacijskog polinoma s ekvidistantnim čvorovima.

Newtonov oblik — ekvidistantni čvorovi

Uočimo da se faktor $h^k k!$ skrati:

- u nazivniku dolazi od podijeljenih razlika $f[x_0, \ldots, x_k]$,
- a u brojniku dolazi od produkta $\prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$.

Onda interpolacijski polinom izgleda ovako:

$$
\begin{aligned}
p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\
+ f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\
+ \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\
= \Delta^0 f_0 + \binom{s}{1} \Delta^1 f_0 + \cdots + \binom{s}{n} \Delta^n f_0,
\end{aligned}
$$

pri čemu je

$$
x = x_0 + s \cdot h.
$$

Ekvidistantni čvorovi — tablica konačnih razlika

Tablica svih potrebnih konačnih razlika ima ovaj oblik:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_k & f_k & \Delta f_k & \Delta^2 f_k & \cdots & \Delta^n f_k \\
\hline
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & \Delta f_0 & & & \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & & \\
 & & \Delta f_1 & & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \Delta^n f_0 \\
 & & \Delta f_{n-2} & & \iddots & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & \Delta^2 f_{n-2} & & \\
 & & \Delta f_{n-1} & & & \\
x_n & f_n & & & &
\end{array}
$$

Ova tablica se računa u jednom jednodimenzionalnom polju, kao i kod podijeljenih razlika.

Koliko je “dobar” interpolacijski polinom?

Koliko je dobar interpolacijski polinom?

U praksi se obično koriste

- interpolacijski polinomi niskih stupnjeva — do 5.

Zašto?

Za neke funkcije i za neke izbore točaka interpolacije, povećavanje stupnja interpolacijskog polinoma

- može dovesti do povećanja grešaka.

Promotrimo nekoliko karakterističnih primjera. Legenda:

- crna boja — funkcija f,
- crvena boja — interpolacijski polinom p_n.

Ekvidistantna mreža s $n + 1$ čvorova u intervalu $[a, b]$ ima čvorove $x_k^{(n)} = a + k \cdot h_n$, za $k = 0, \ldots, n$, uz $h_n = (b - a)/n$.

Primjer — logaritamska funkcija

Promotrimo grafove interpolacijskih polinoma stupnjeva 1–6 koji interpoliraju funkciju

$$f(x) = \log_{10}(x)$$

na ekvidistantnoj mreži za $x \in [0.1, 10]$.

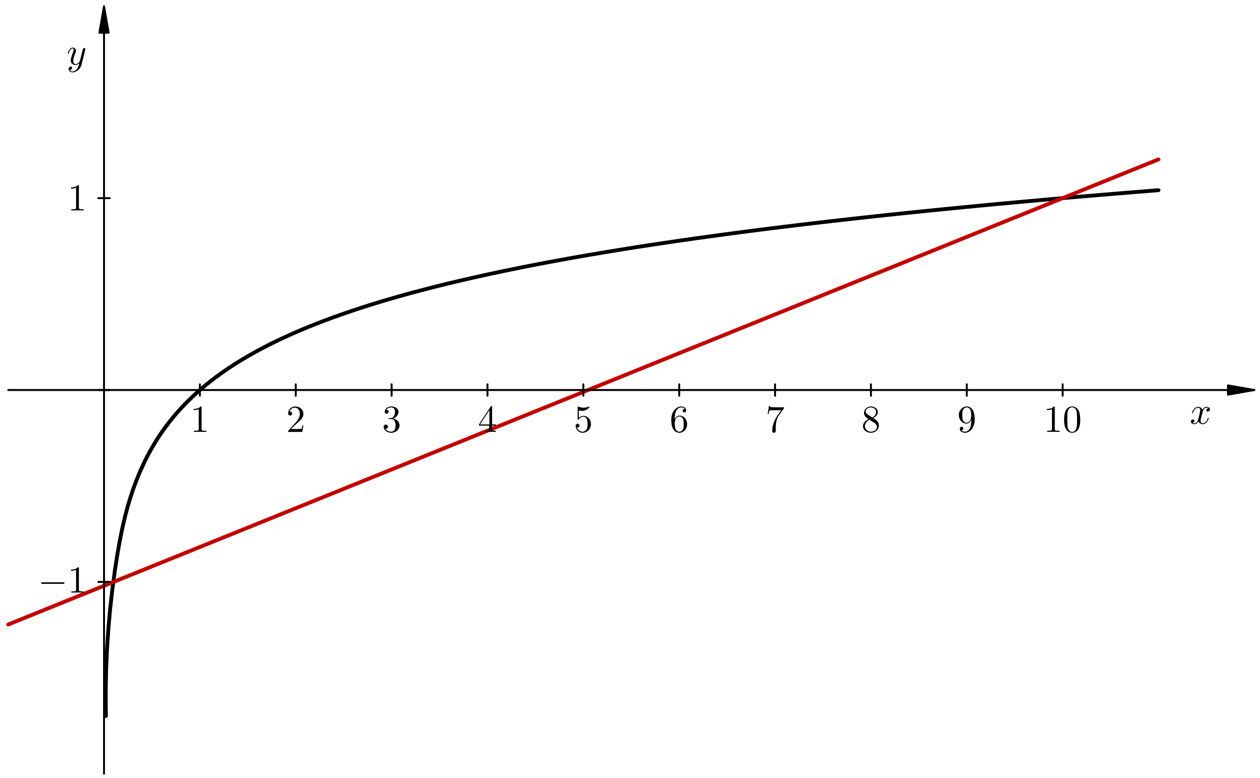
Primijetit ćete da je greška interpolacije

- najveća na prvom intervalu.

Razlog: funkcija $\log_{10}(x)$ ima singularitet u 0, a početna točka interpolacije 0.1 je vrlo blizu tog singulariteta.

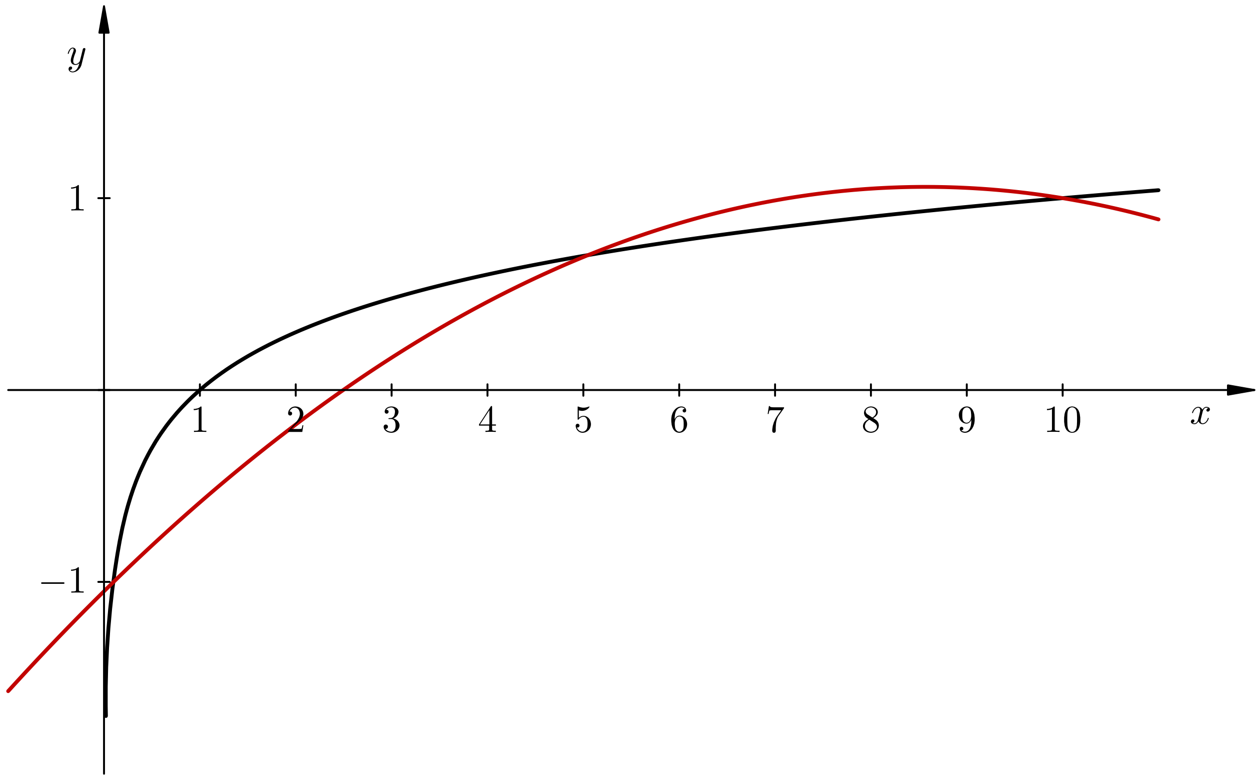
Nadalje, promotrite kako se interpolacijski polinom ponaša izvan intervala interpolacije (tzv. “ekstrapolacija”).

Logaritam — ekvidistantna mreža



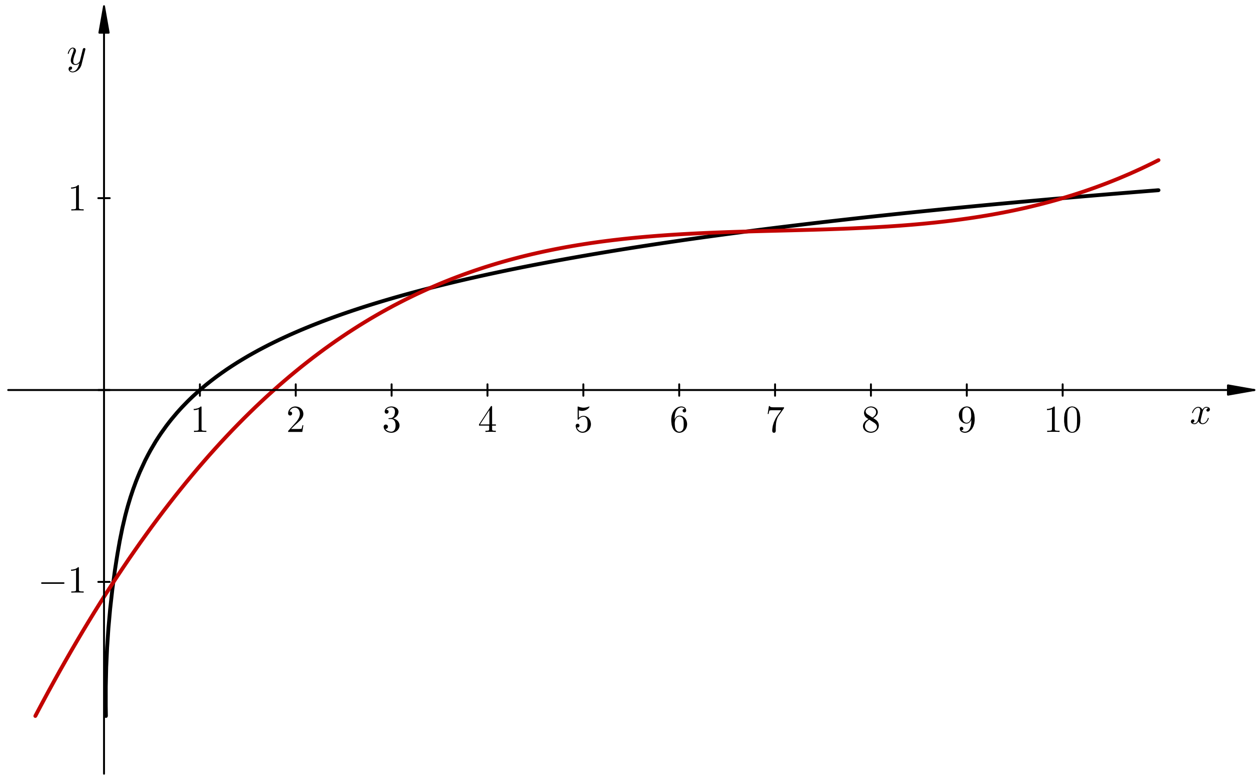
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Logaritam — ekvidistantna mreža



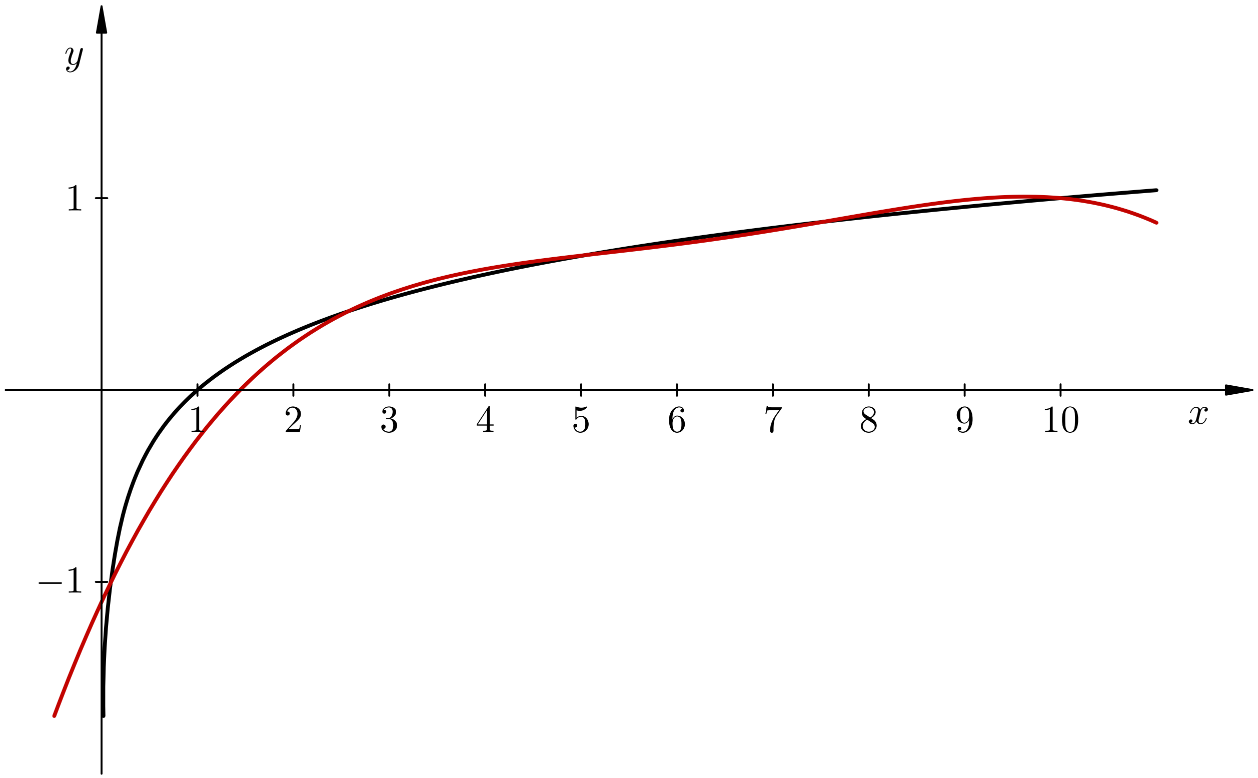
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Logaritam — ekvidistantna mreža



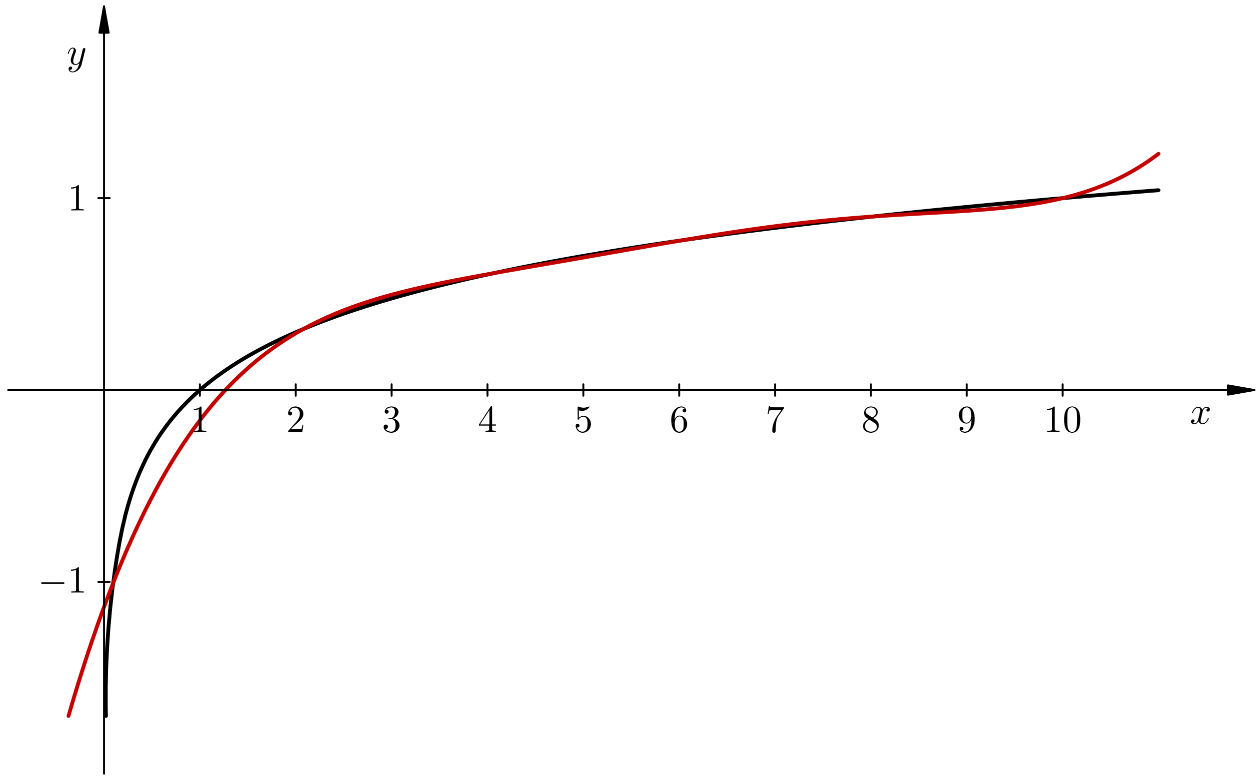
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Logaritam — ekvidistantna mreža



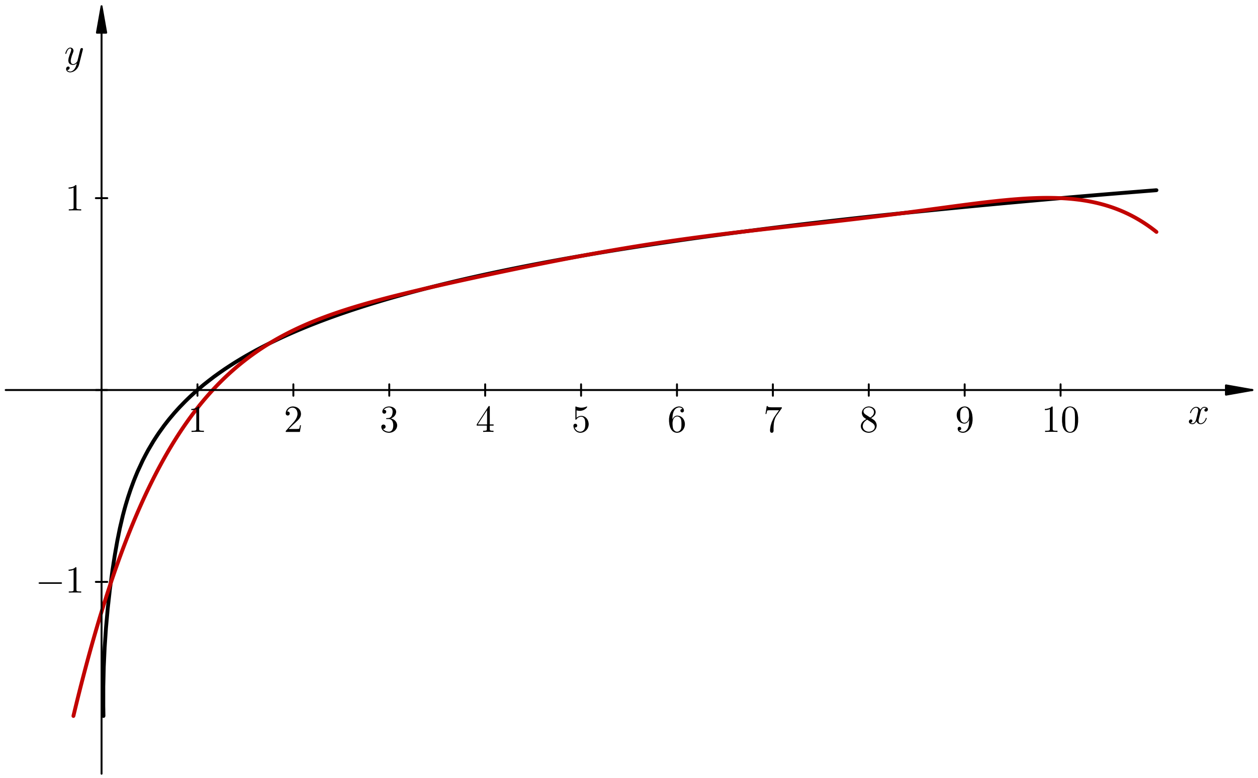
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Logaritam — ekvidistantna mreža



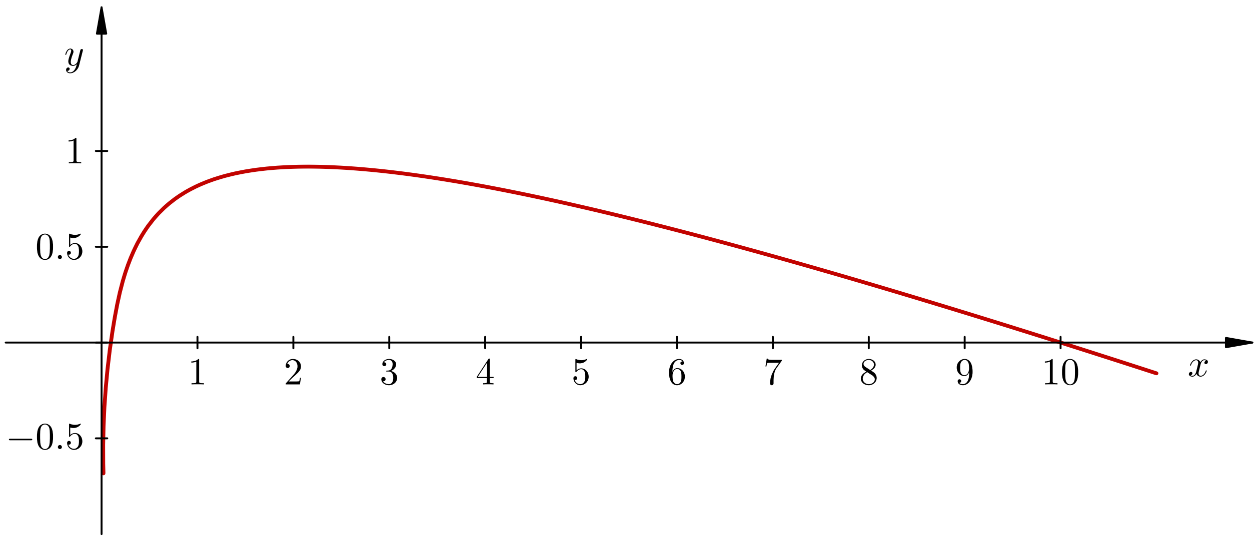
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Logaritam — ekvidistantna mreža



Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

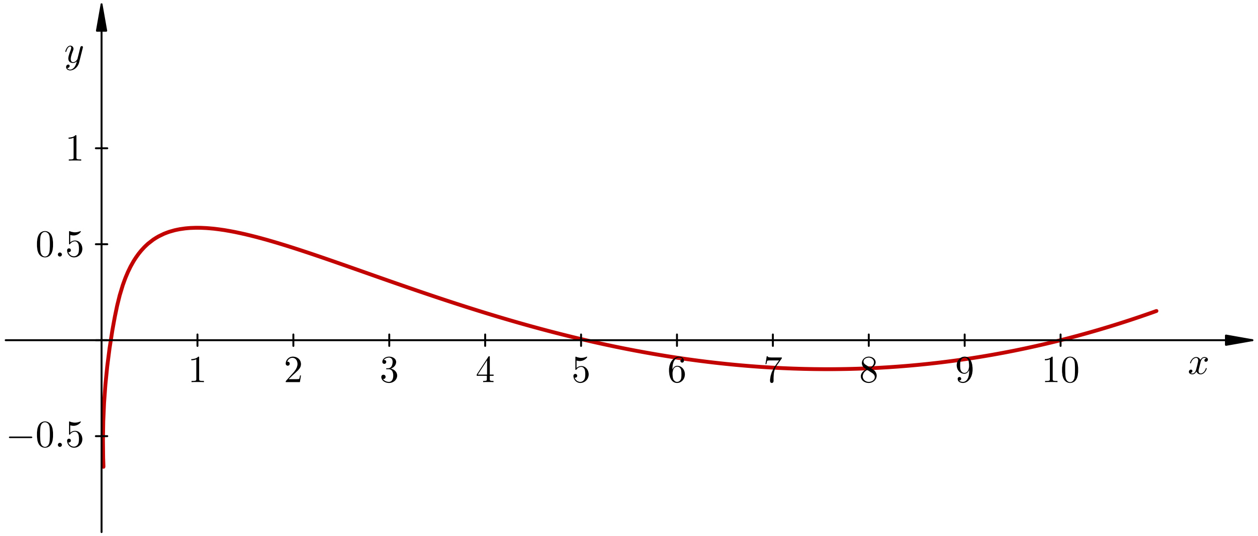
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Pratite skalu na y-osi.

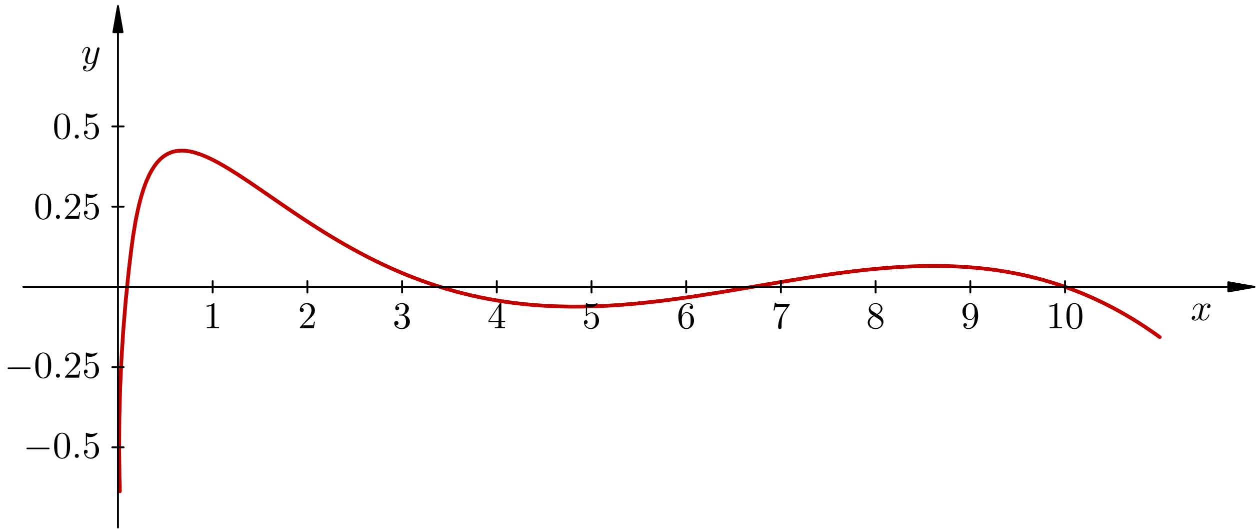
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Pratite skalu na y-osi.

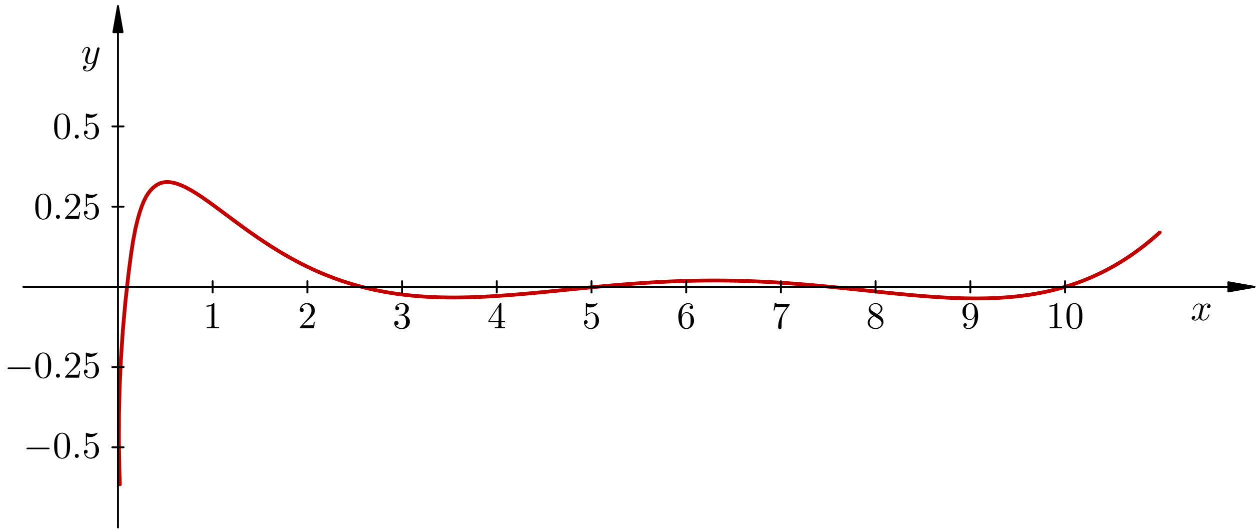
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Pratite skalu na y-osi.

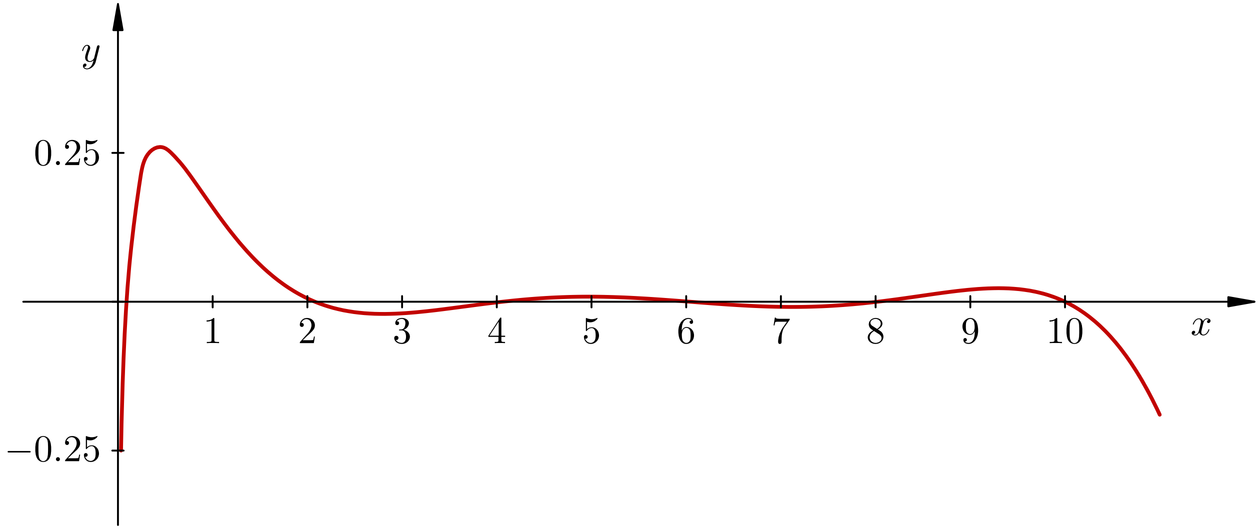
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Pratite skalu na y-osi.

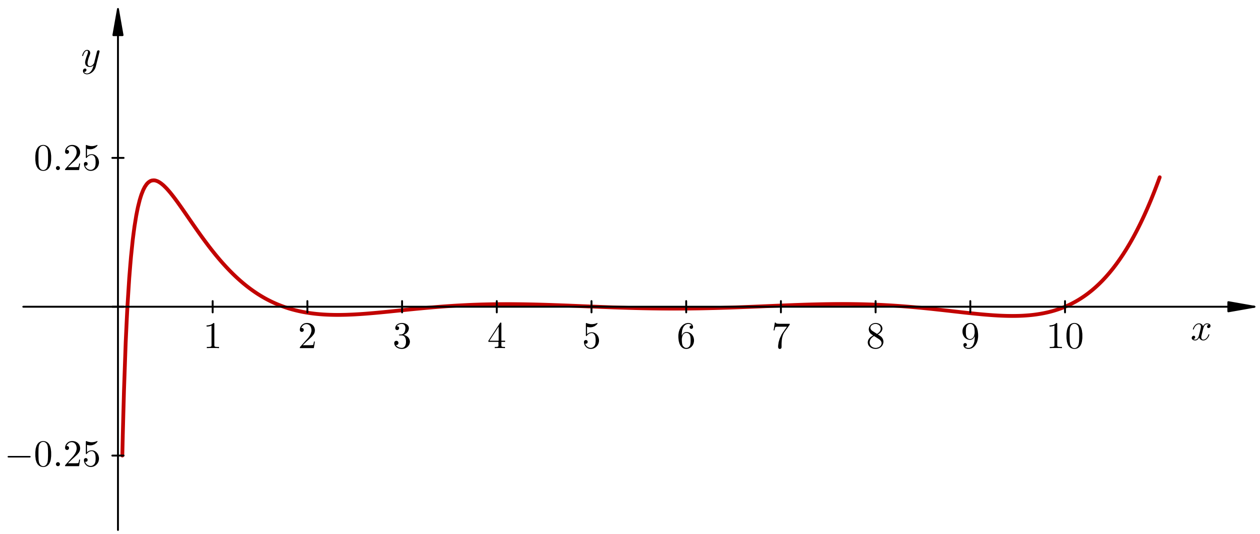
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Pratite skalu na y-osi.

Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Pratite skalu na y-osi.

Primjer Runge

Njemački matematičar Runge (1901. g.) prvi je uočio

- probleme koji nastupaju kod interpolacije polinomima na ekvidistantnim mrežama čvorova.
- Konstruirao je funkciju — poznatu kao funkcija Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{na} \quad [-5, 5],$$

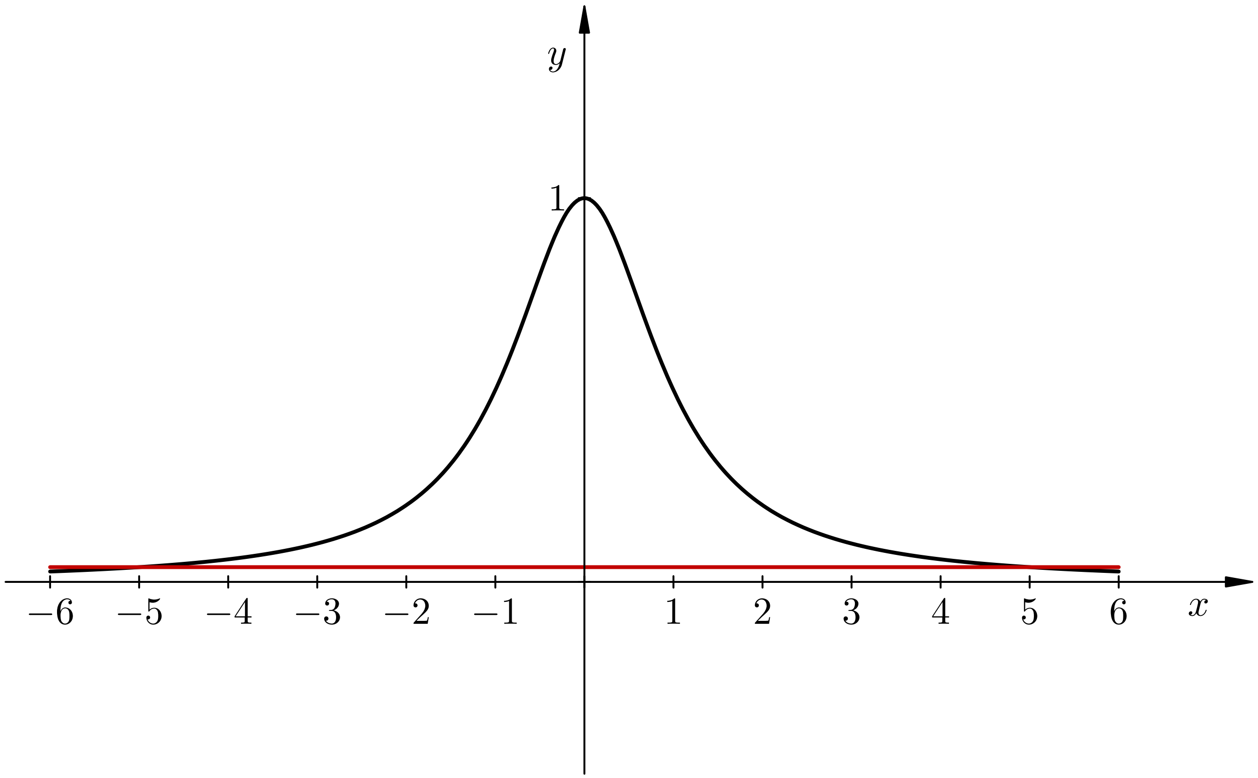
takvu da niz interpolacijskih polinoma na ekvidistantnim mrežama ne konvergira prema toj funkciji.

Promotrimo interpolaciju polinomima stupnjeva

- 1–6, 8, 10, 12, 14 i 16 (parnost funkcije!),

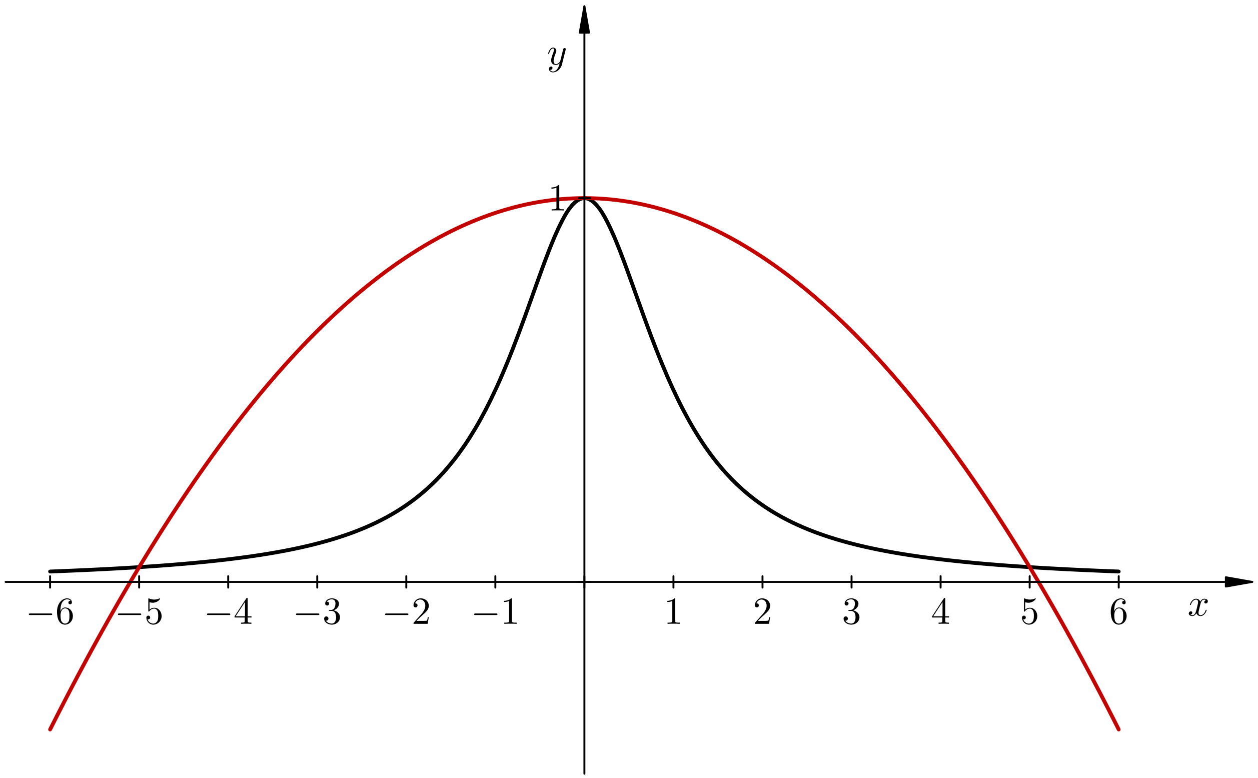
na ekvidistantnim mrežama čvorova u $[-5, 5]$.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



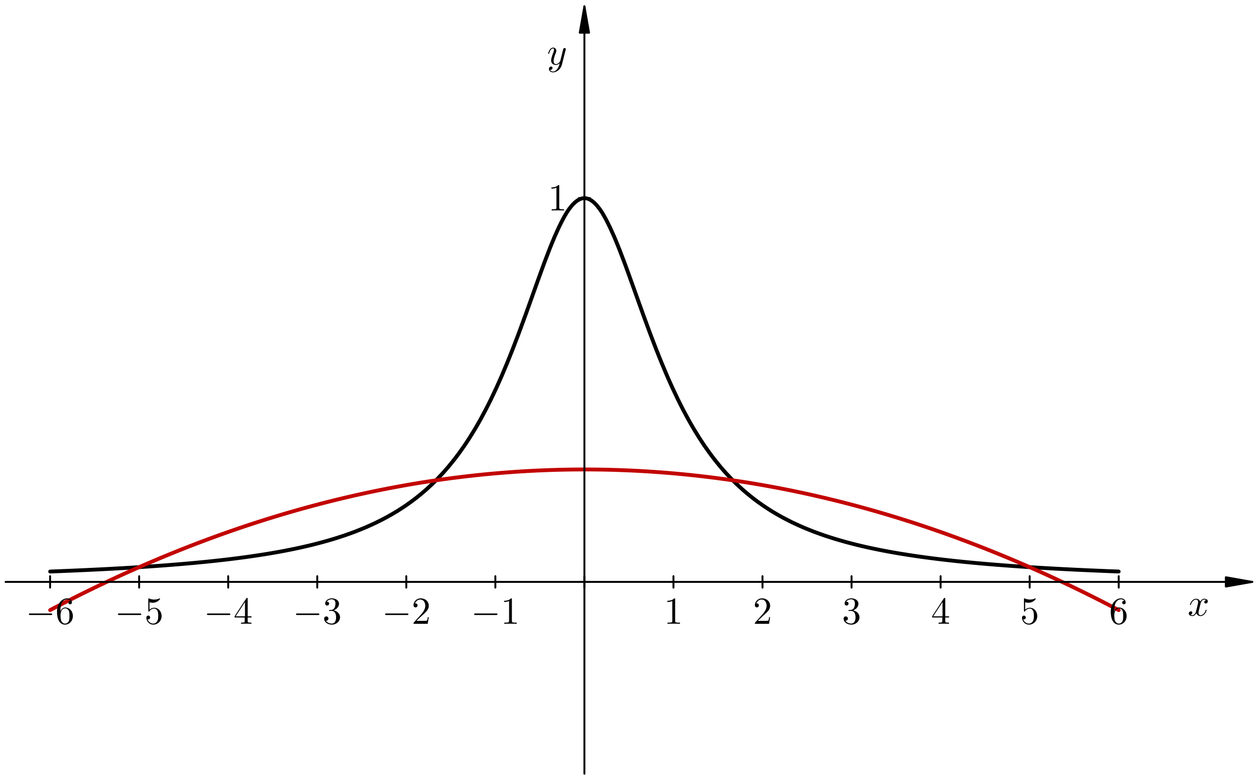
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



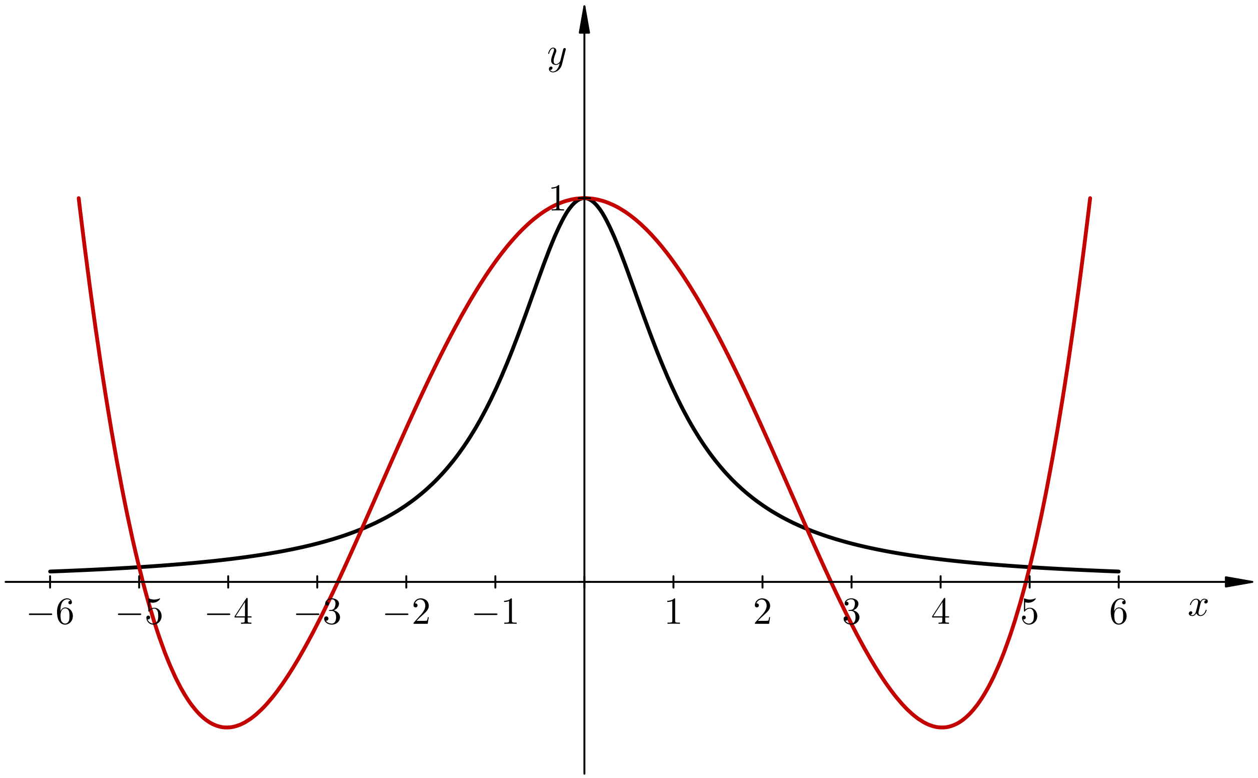
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



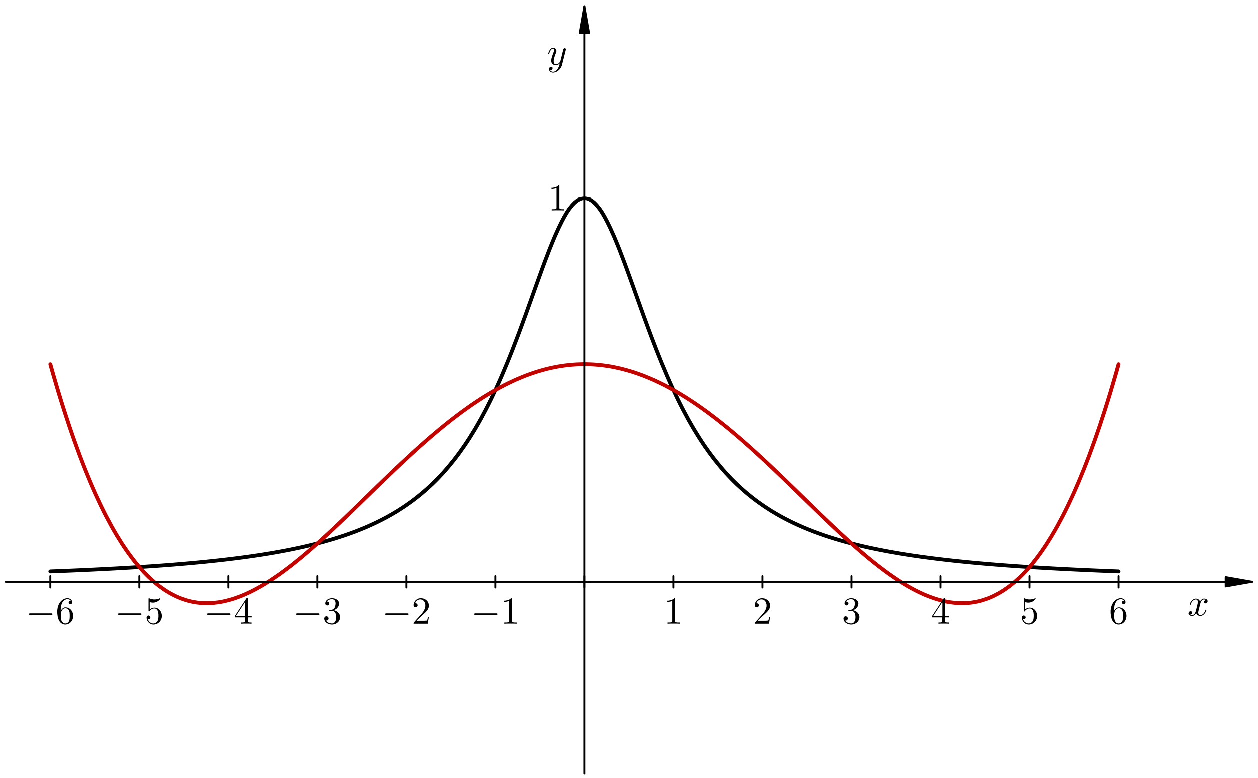
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



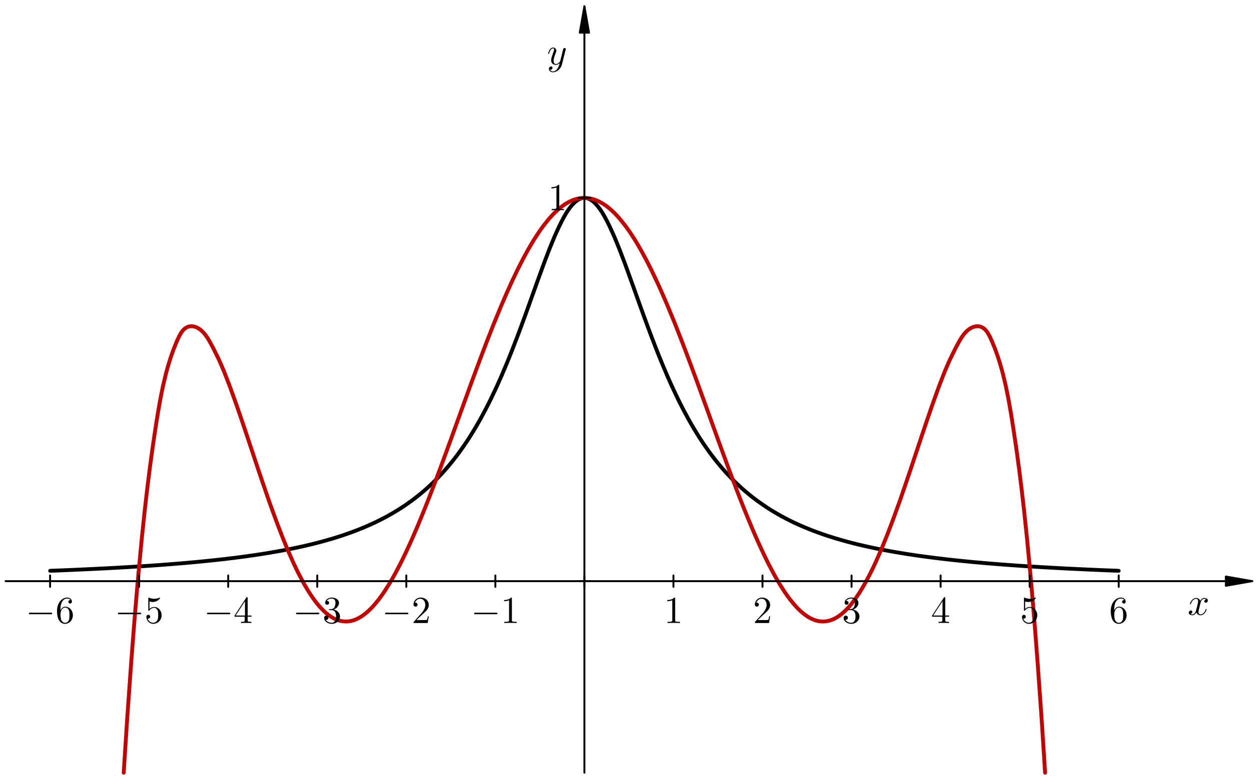
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



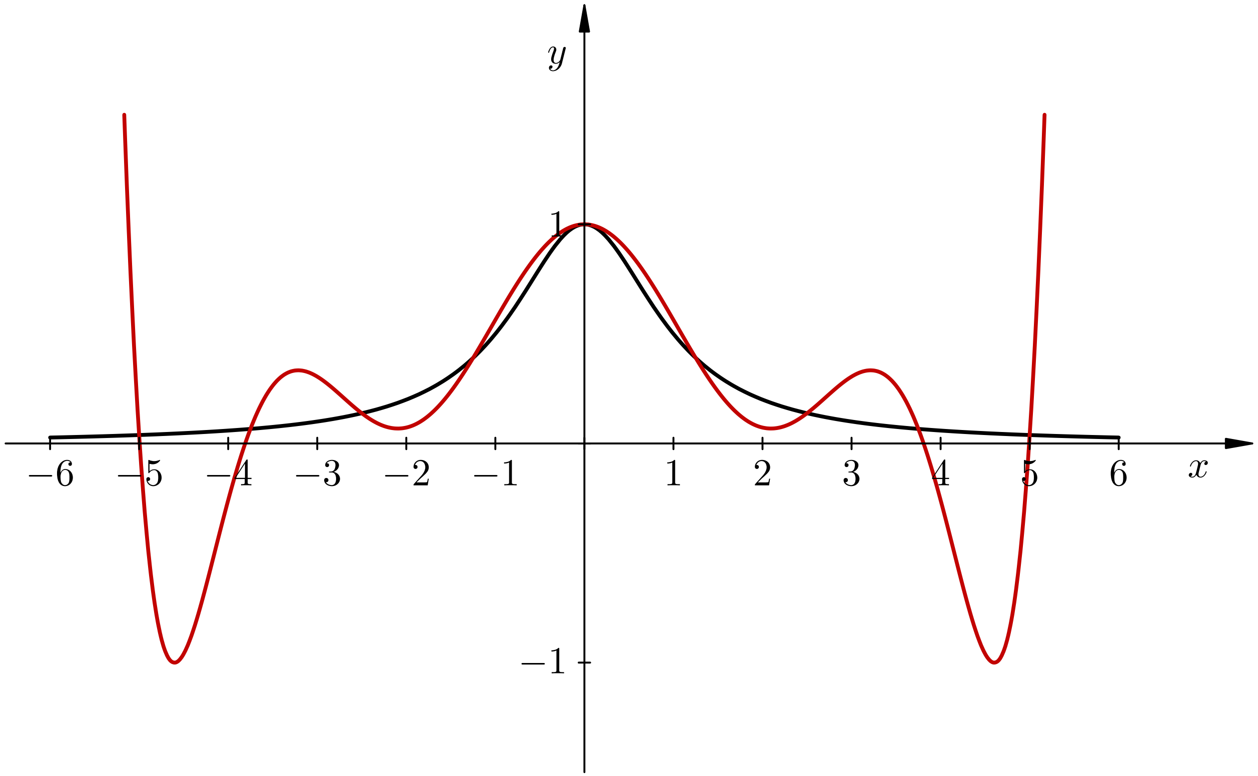
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



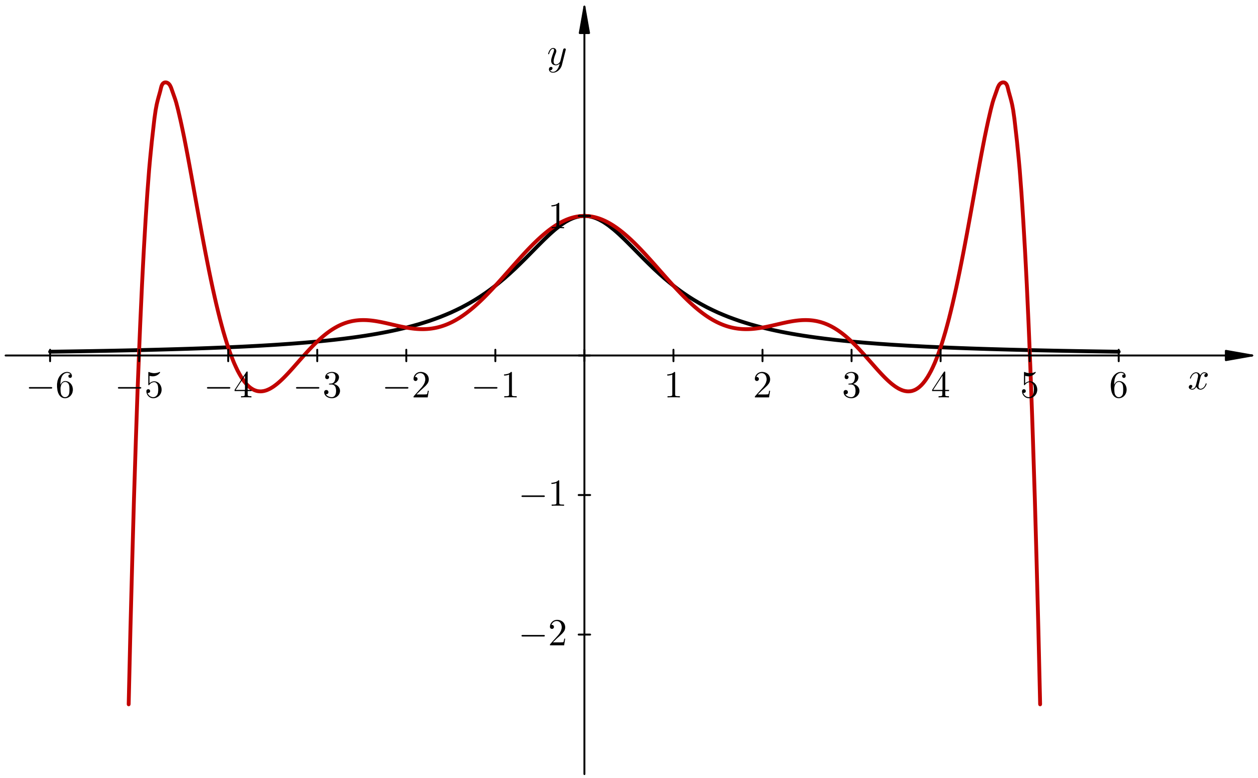
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



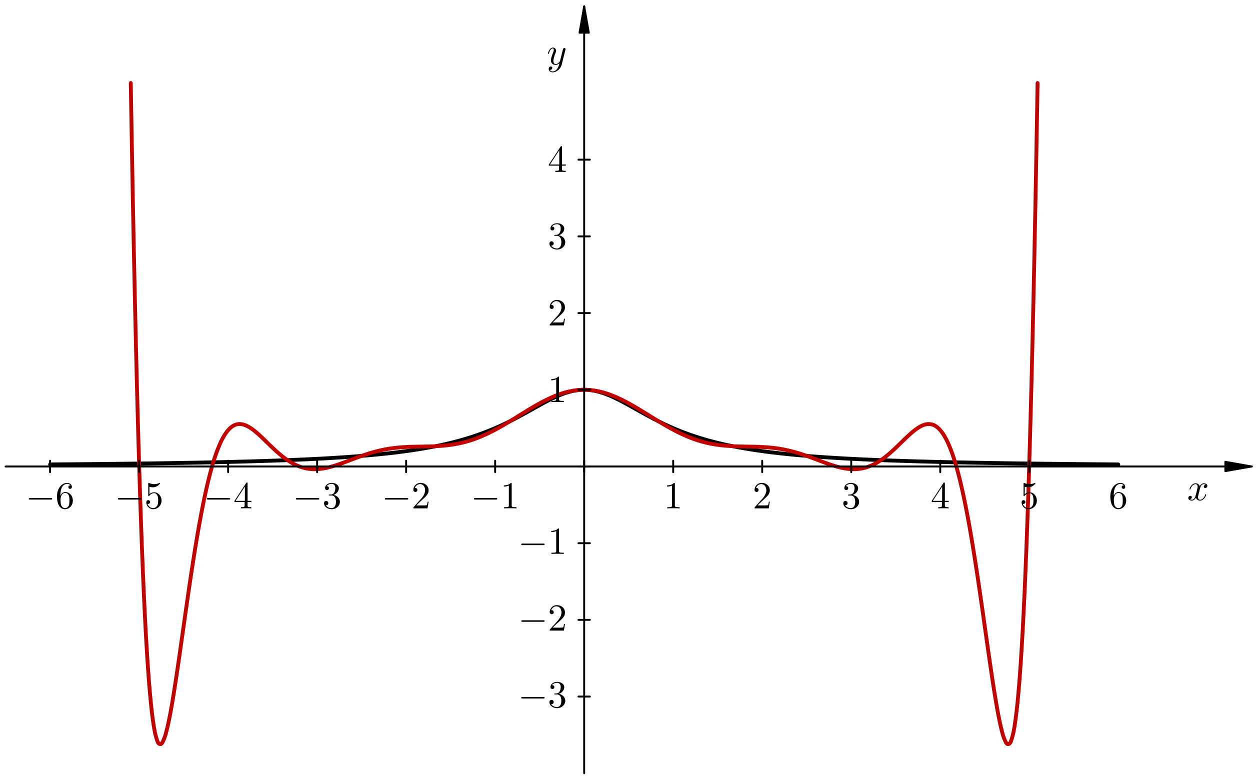
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 8.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 10.

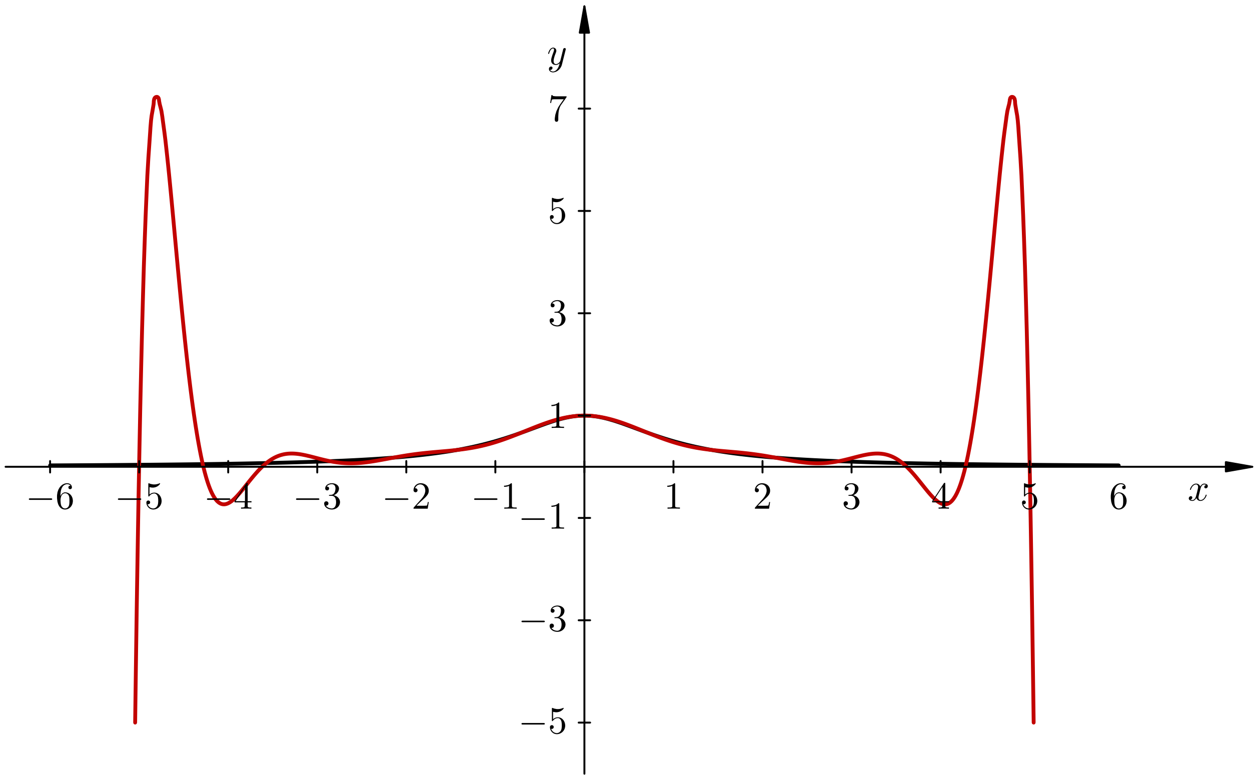
Primjer Runge — ekvidistantna mreža



Ekvidistantna mreža,

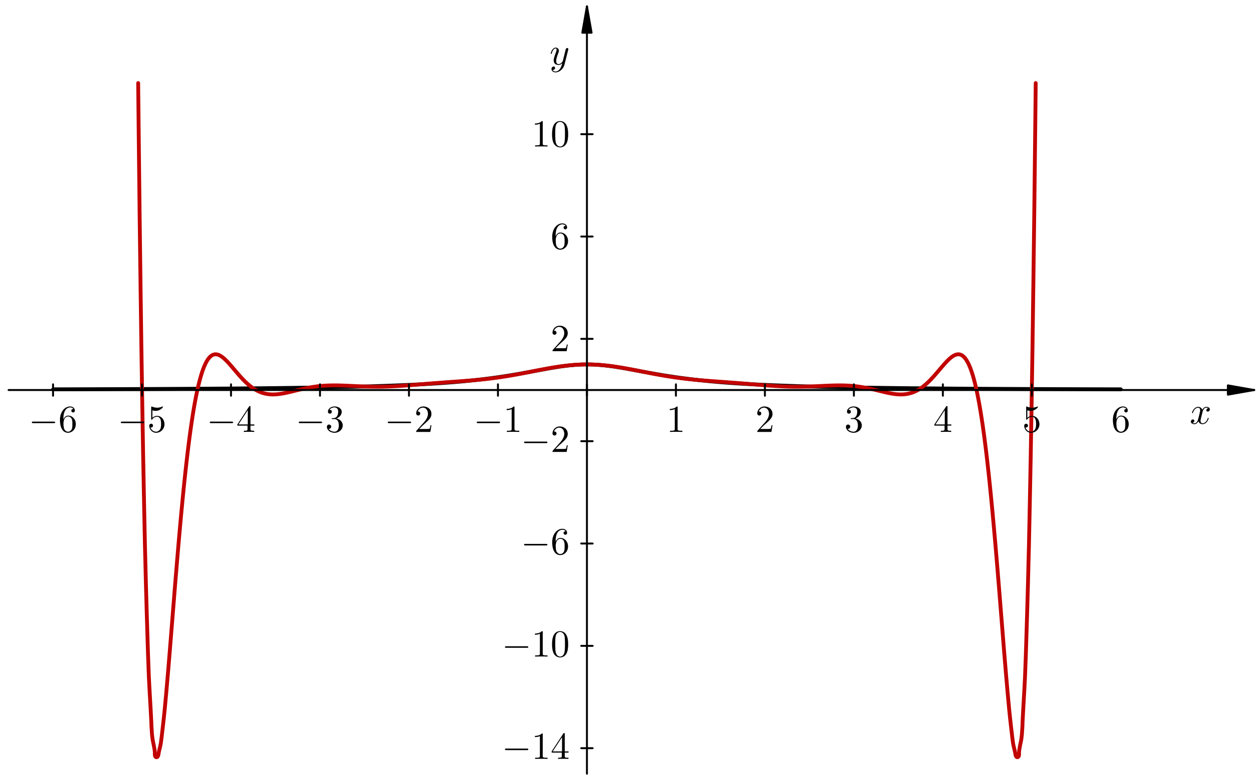
interpolacijski polinom stupnja 12.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



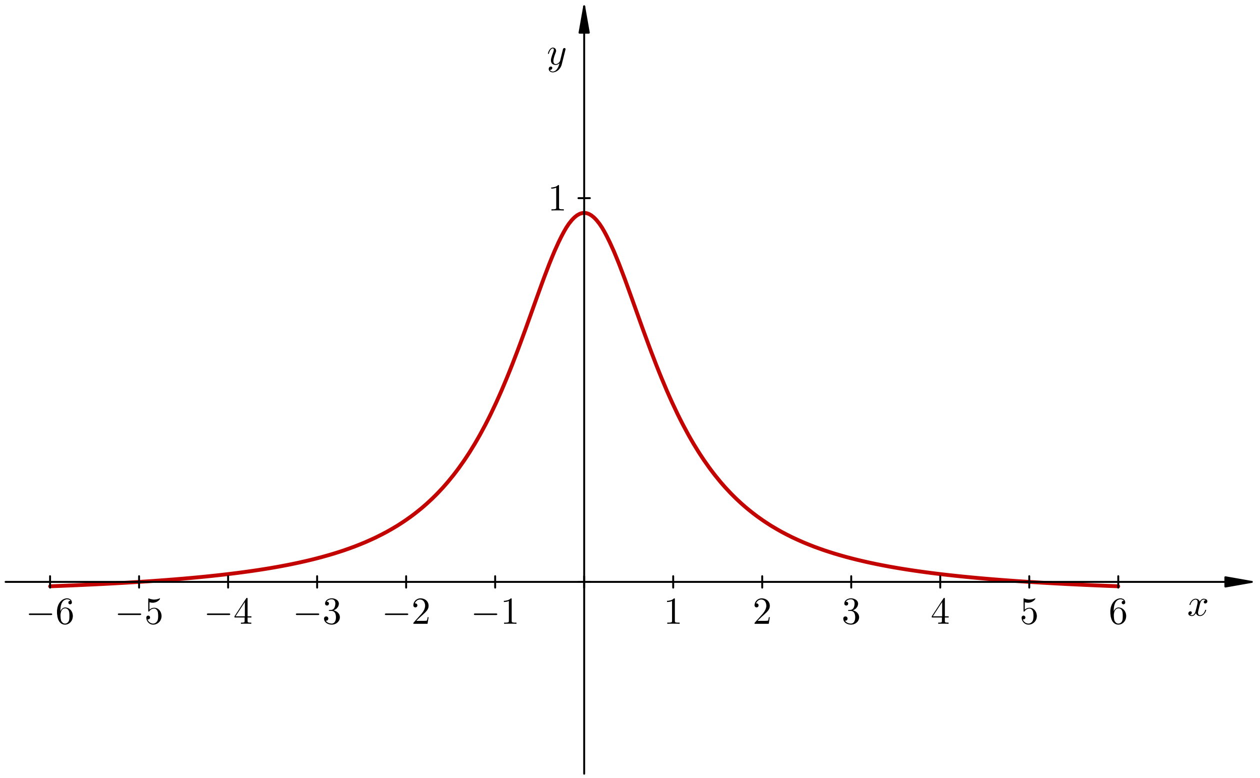
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 14.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



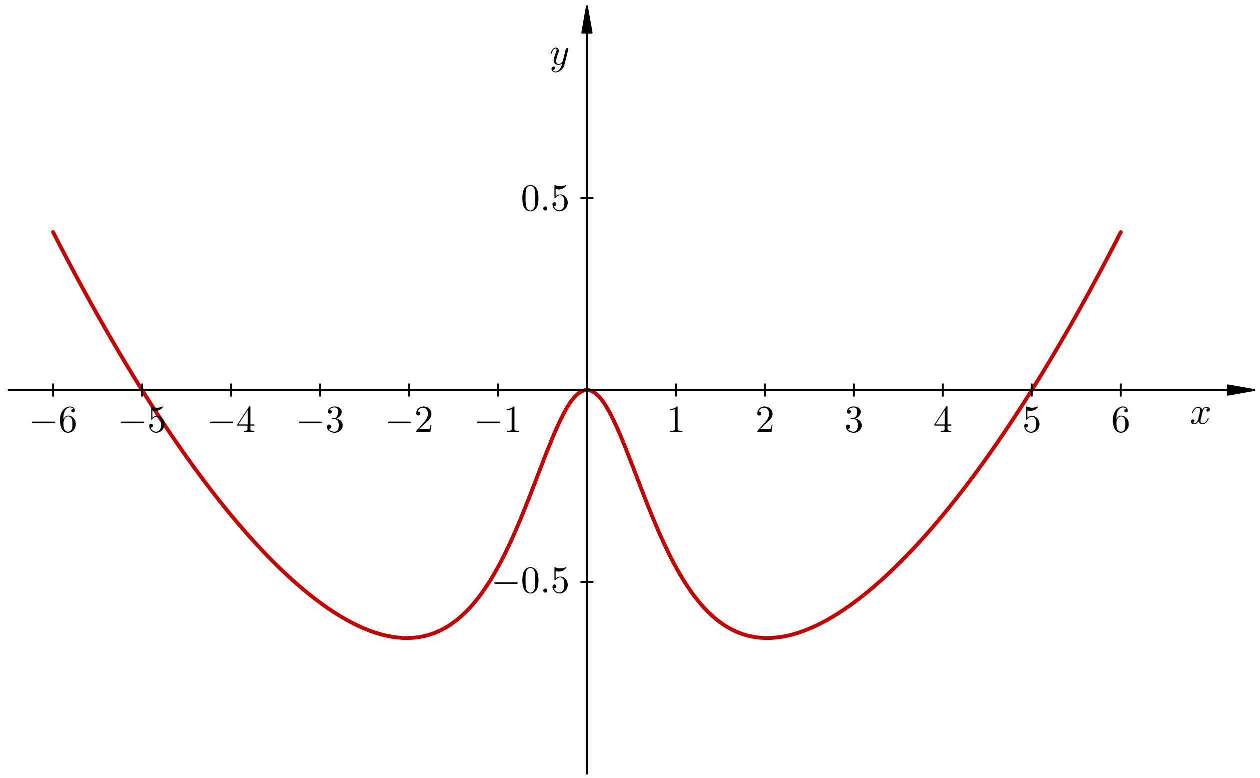
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 16.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



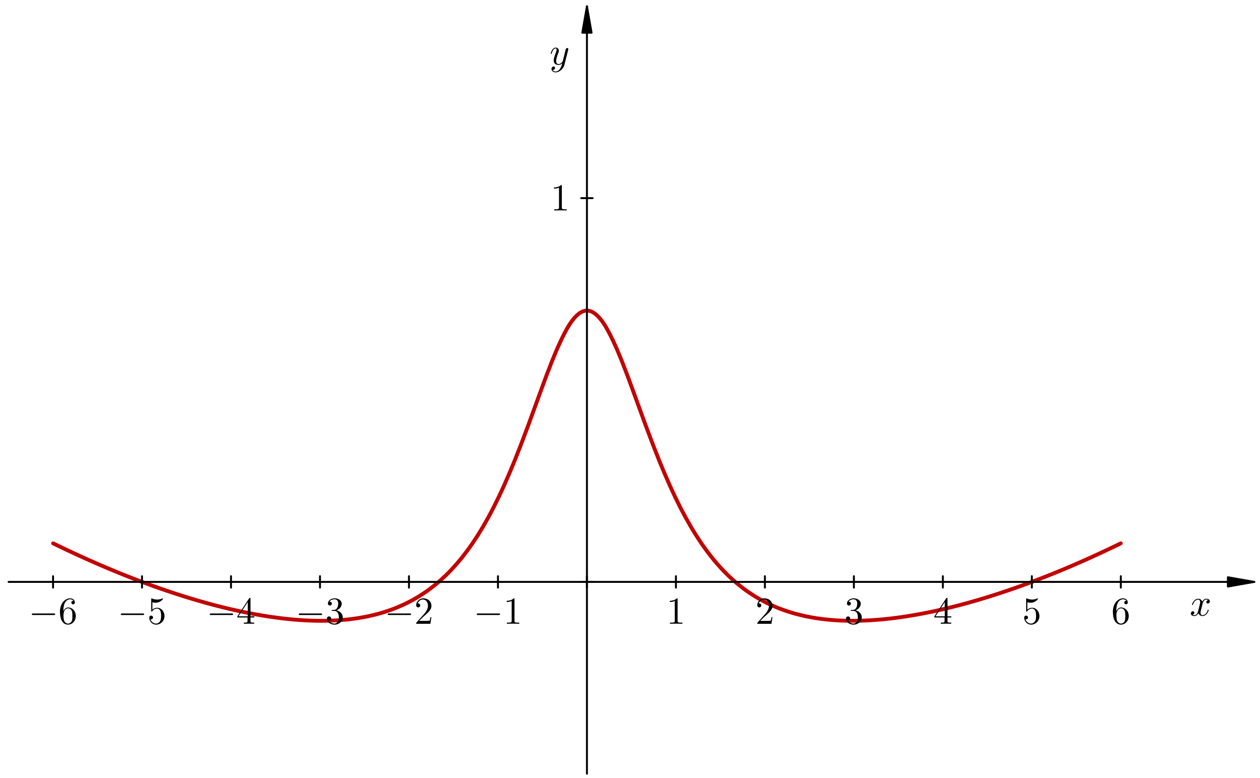
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



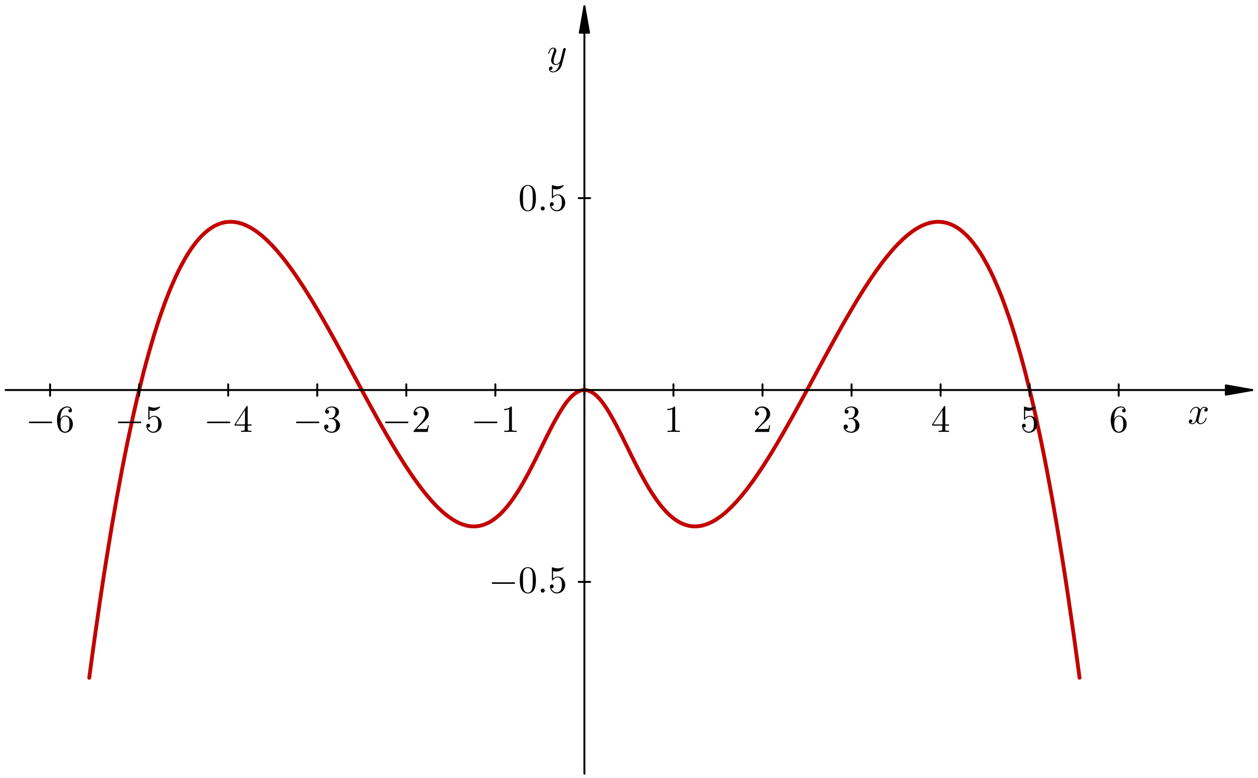
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



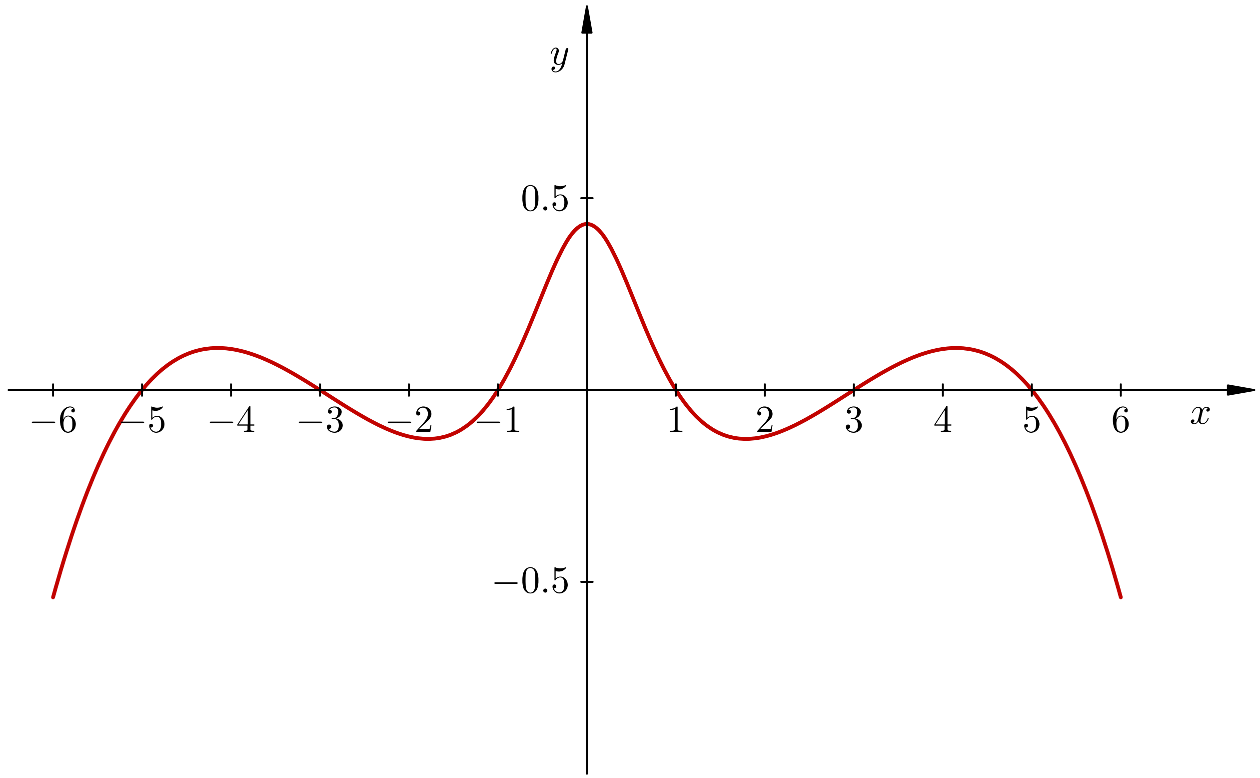
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



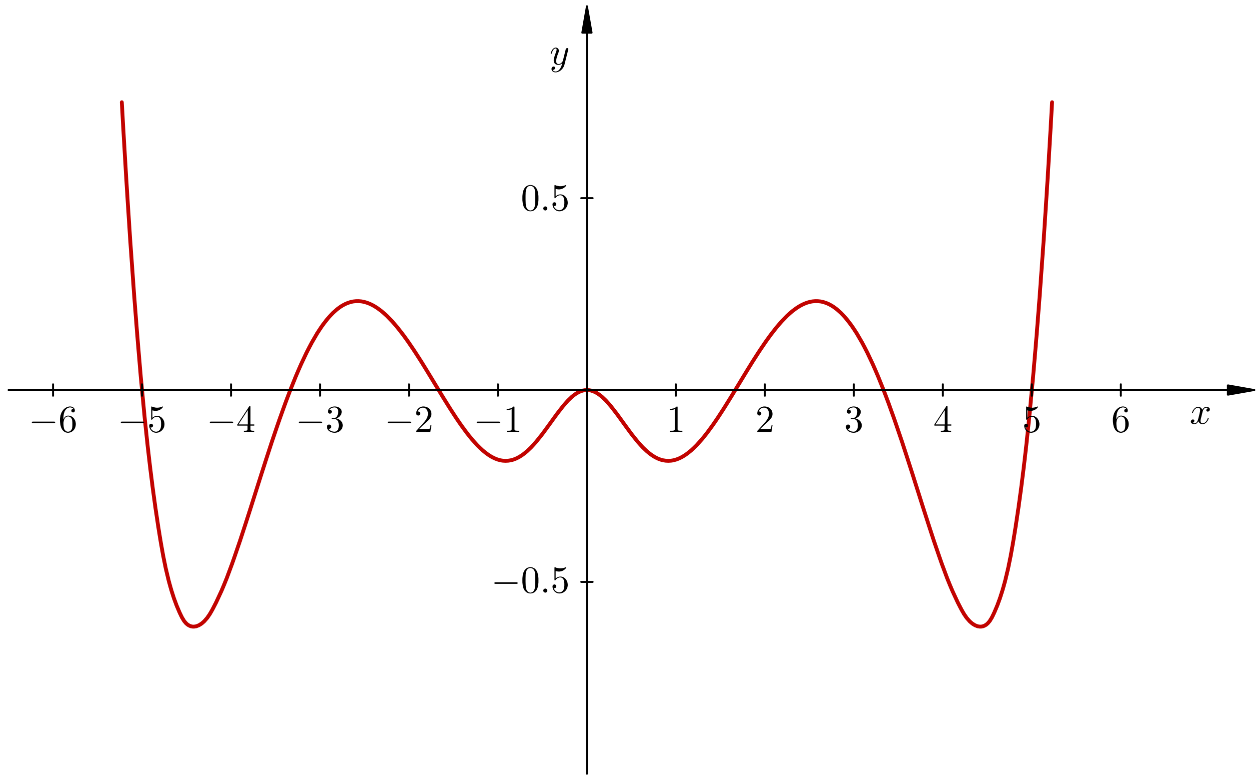
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



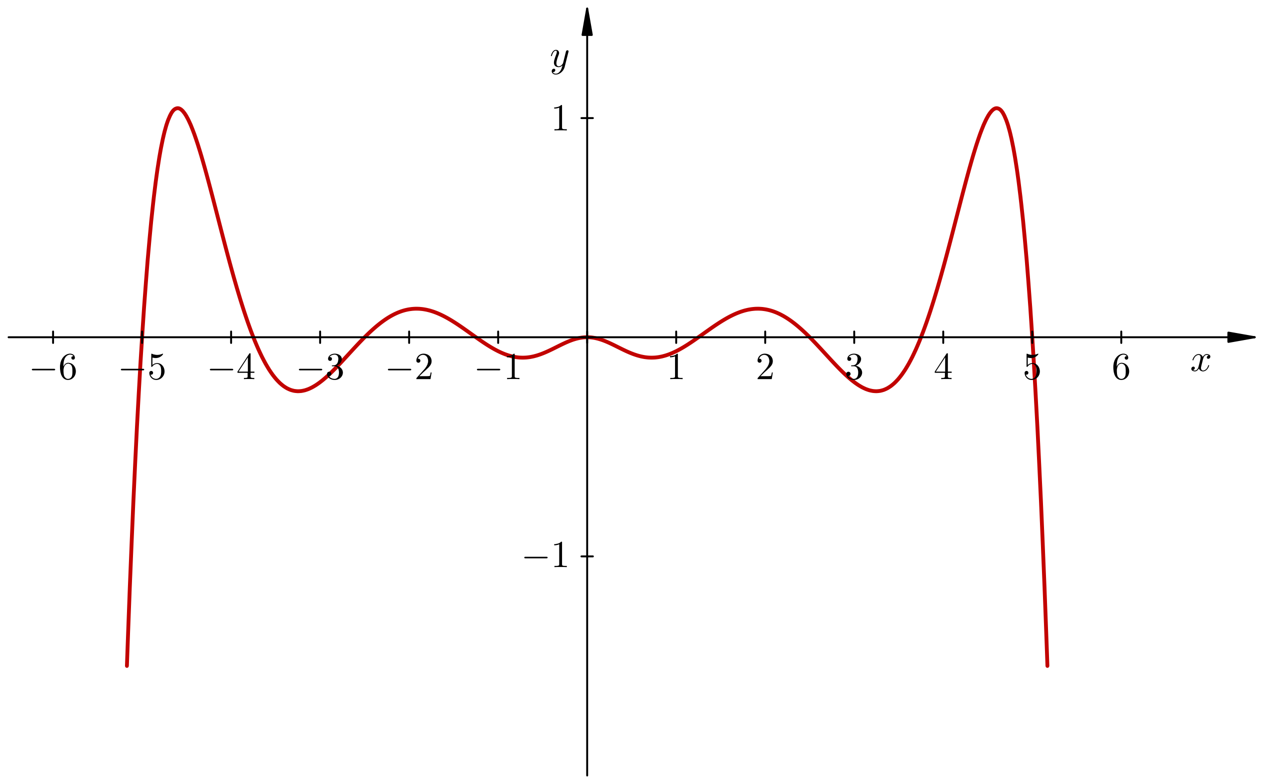
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



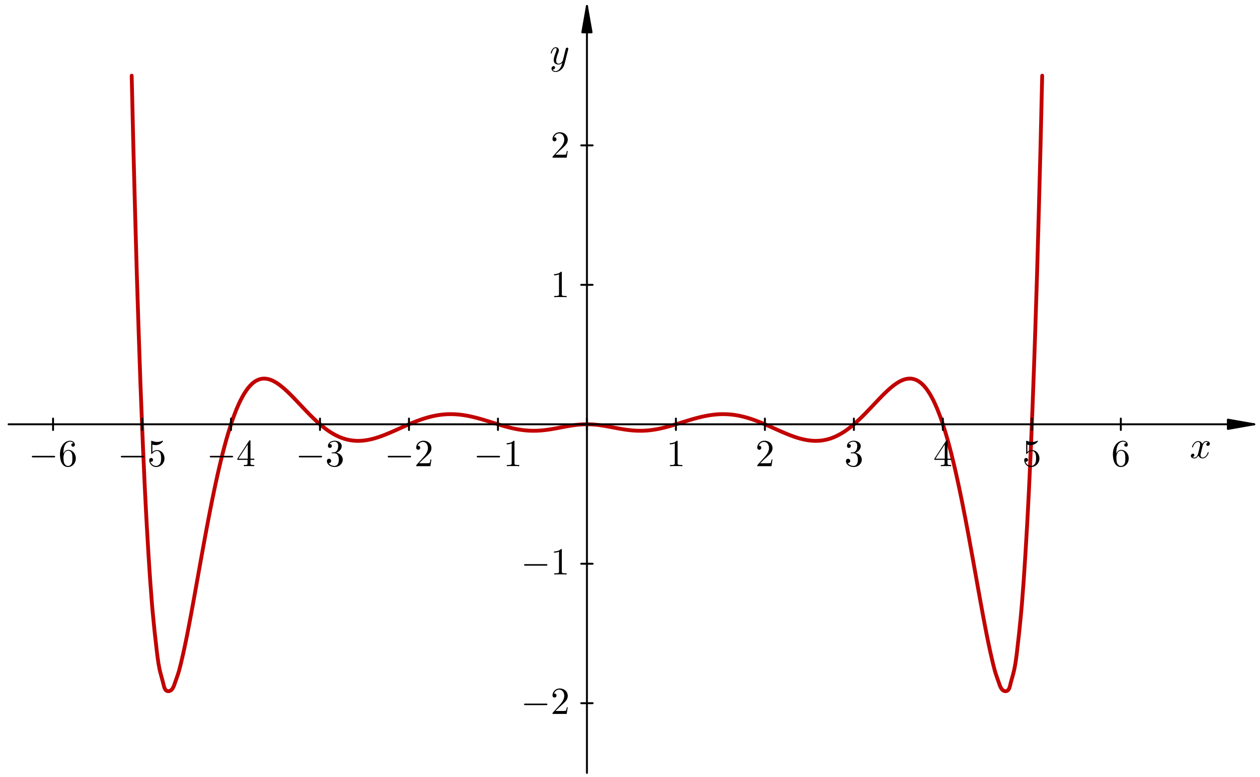
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



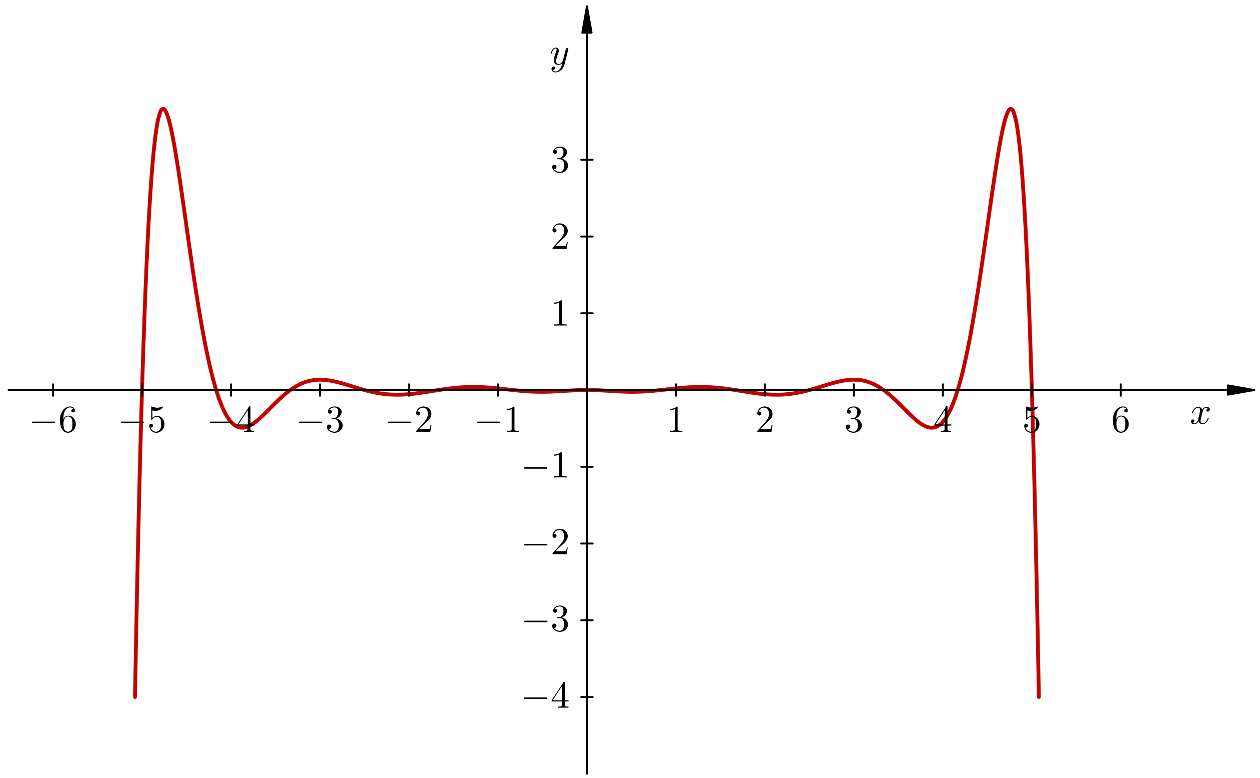
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 8.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



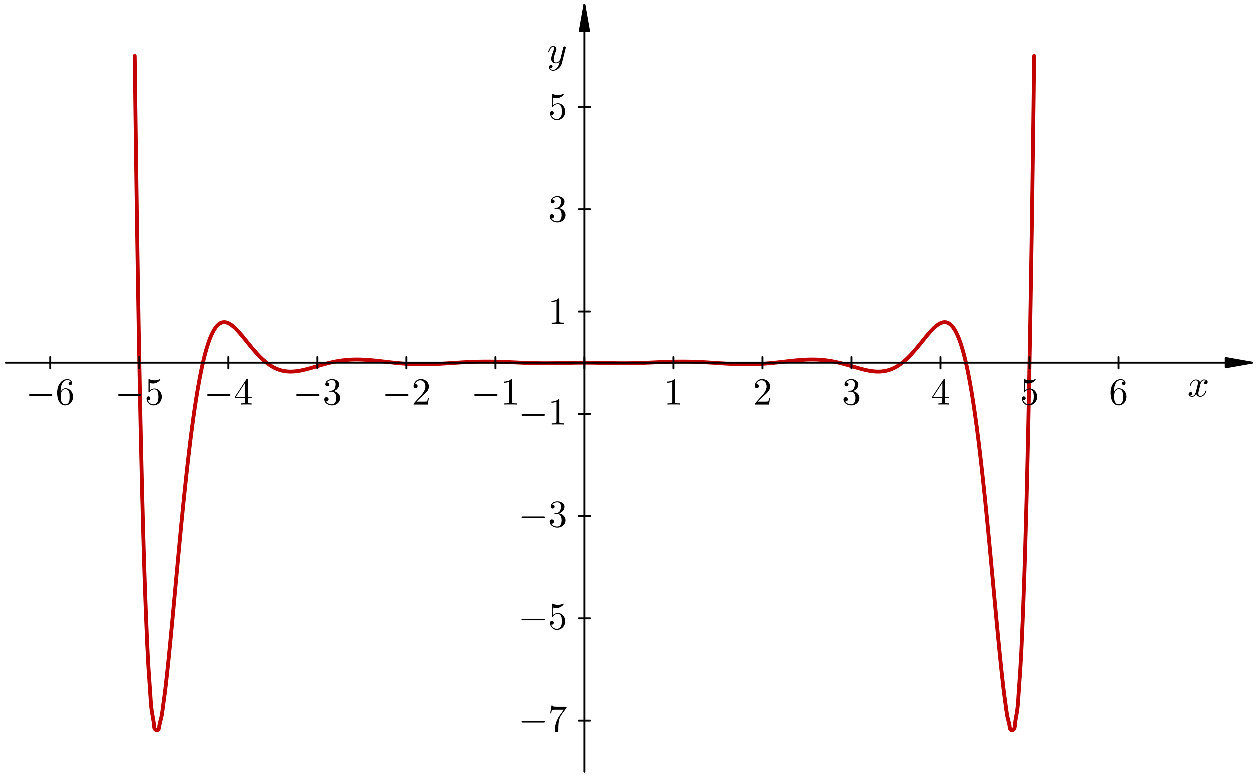
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 10.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



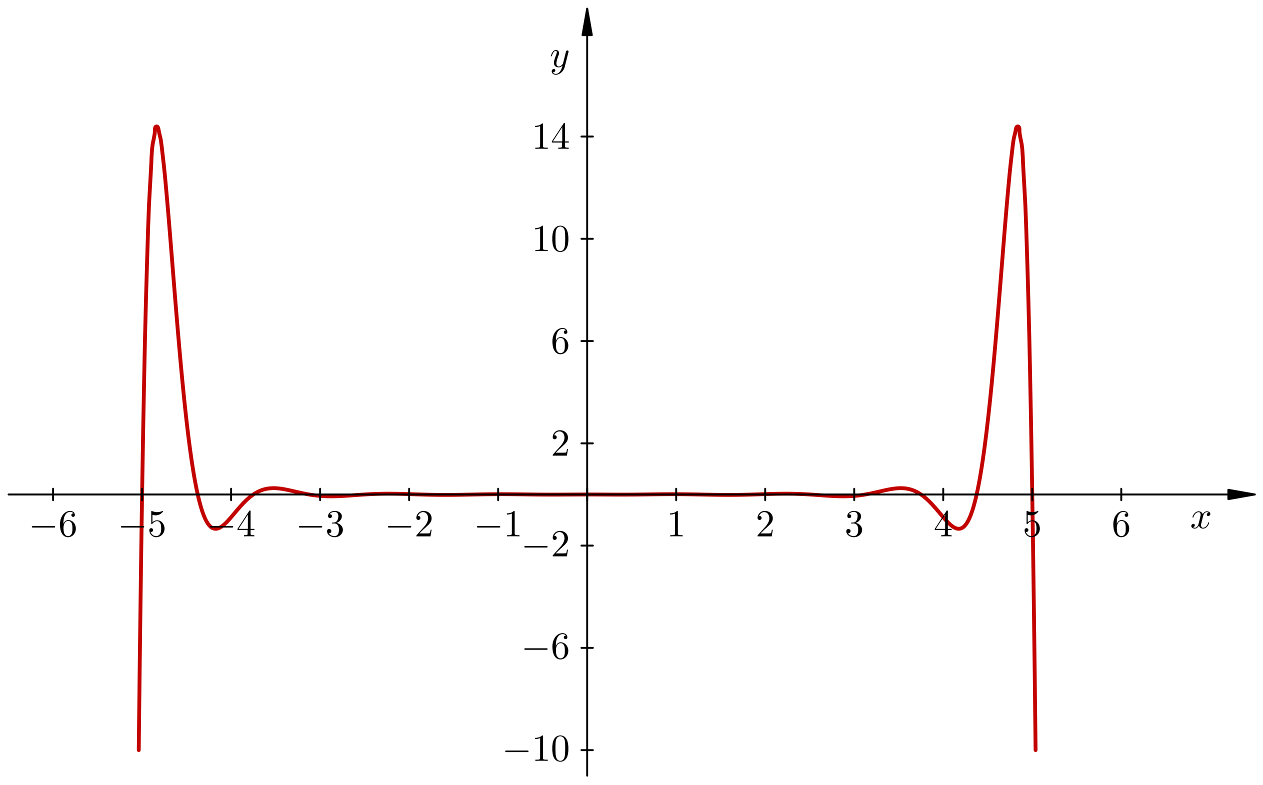
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 12.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 14.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 16.

Analiza

Za primjer Runge može se provesti pažljiva analiza (vidi skriptu) i pokazati da

- čim je $|x| > 3.63\ldots$, a interpolira se u ekvidistantnim čvorovima, niz interpolacijskih polinoma divergira.

Sljedeći primjer pokazuje da postoji još gora situacija — niz interpolacijskih polinoma konvergira samo u 3 točke.

Primjer. (Bernstein, 1912. g.) Neka je

$$f(x) = |x|$$

i neka je p_n interpolacijski polinom u $n+1$ ekvidistantnih čvorova na $[-1, 1]$. Tada $|f(x) - p_n(x)| \to 0$, kad $n \to \infty$, samo u tri točke: $x = -1$, 0, 1.

Primjer Runge — nastavak

Može li se funkciji Runge "pomoći"? Može!

Ako umjesto ekvidistantnih čvorova interpolacije uzmemo neekvidistantne, točnije,

- tzv. Čebiševljeve točke,

onda će, porastom stupnja n, niz interpolacijskih polinoma p_n

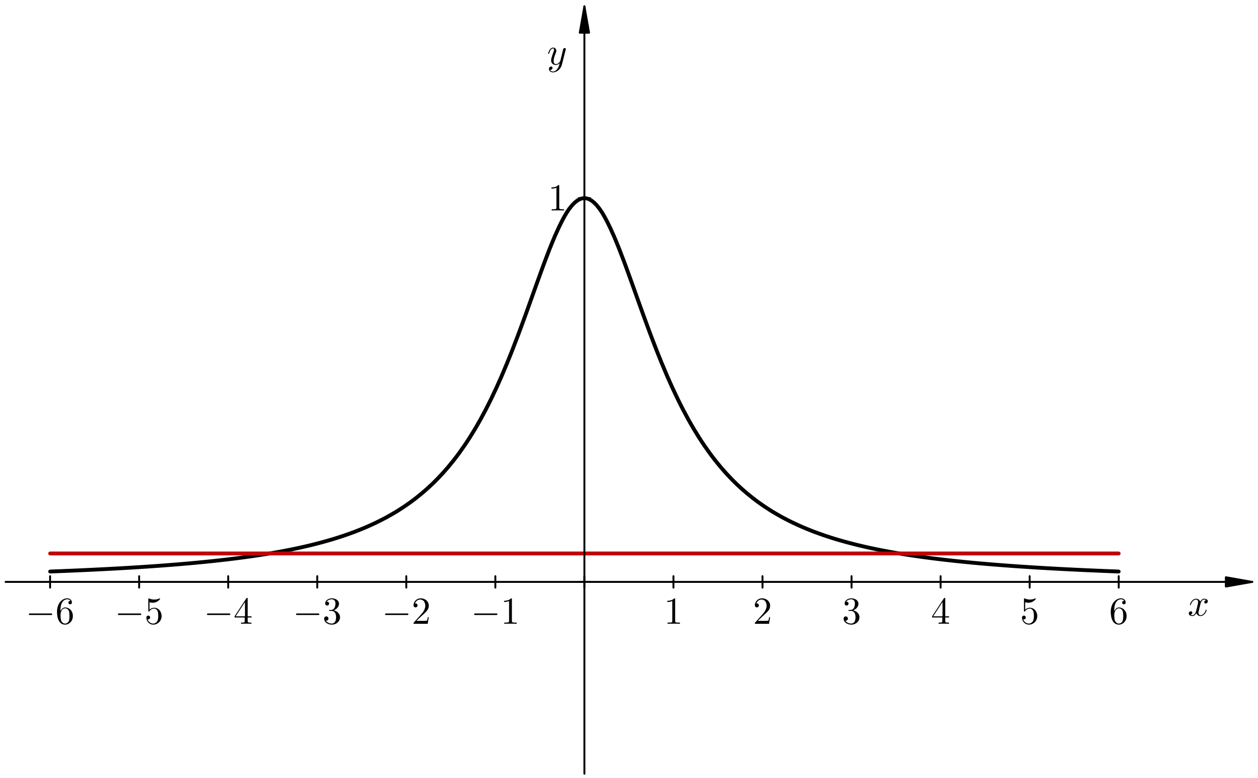
- konvergirati (i to uniformno) prema funkciji f.

Na intervalu $[a, b]$, uzlazno poredane Čebiševljeve točke su

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n+2}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

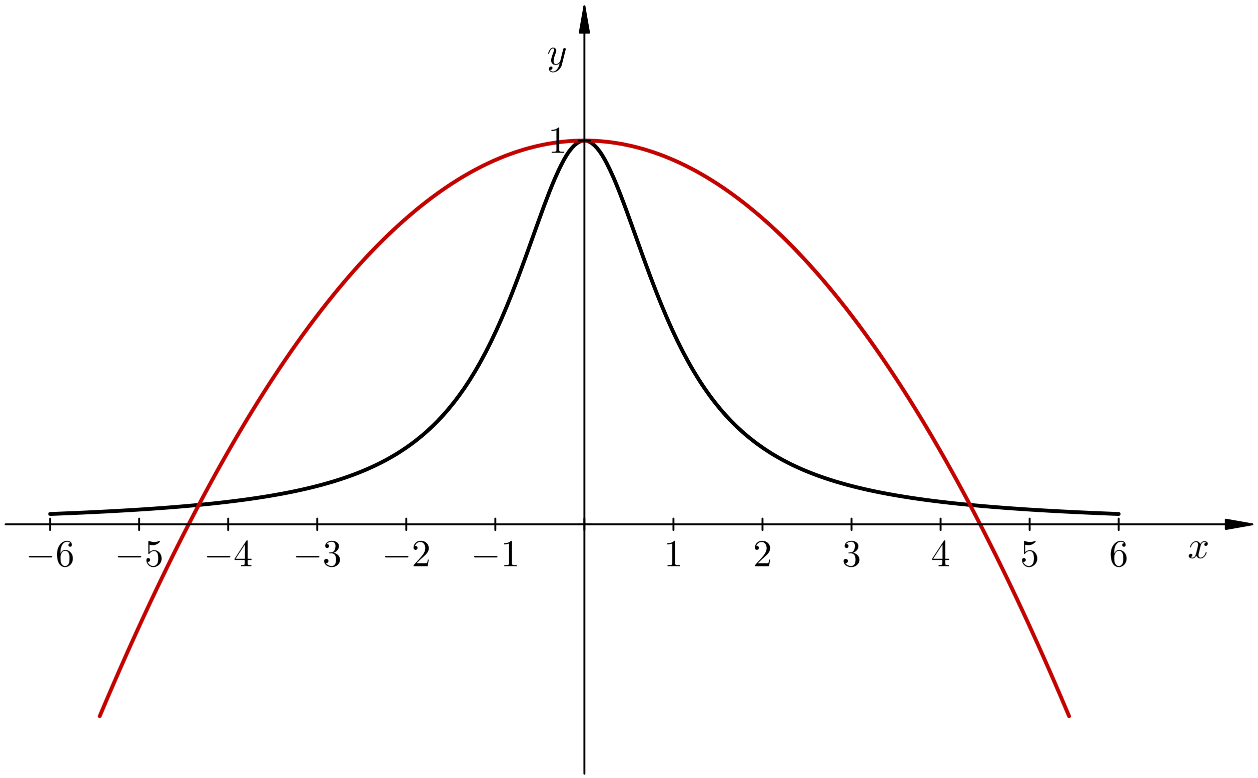
O njima više — malo kasnije. Prvo primjer za funkciju Runge.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



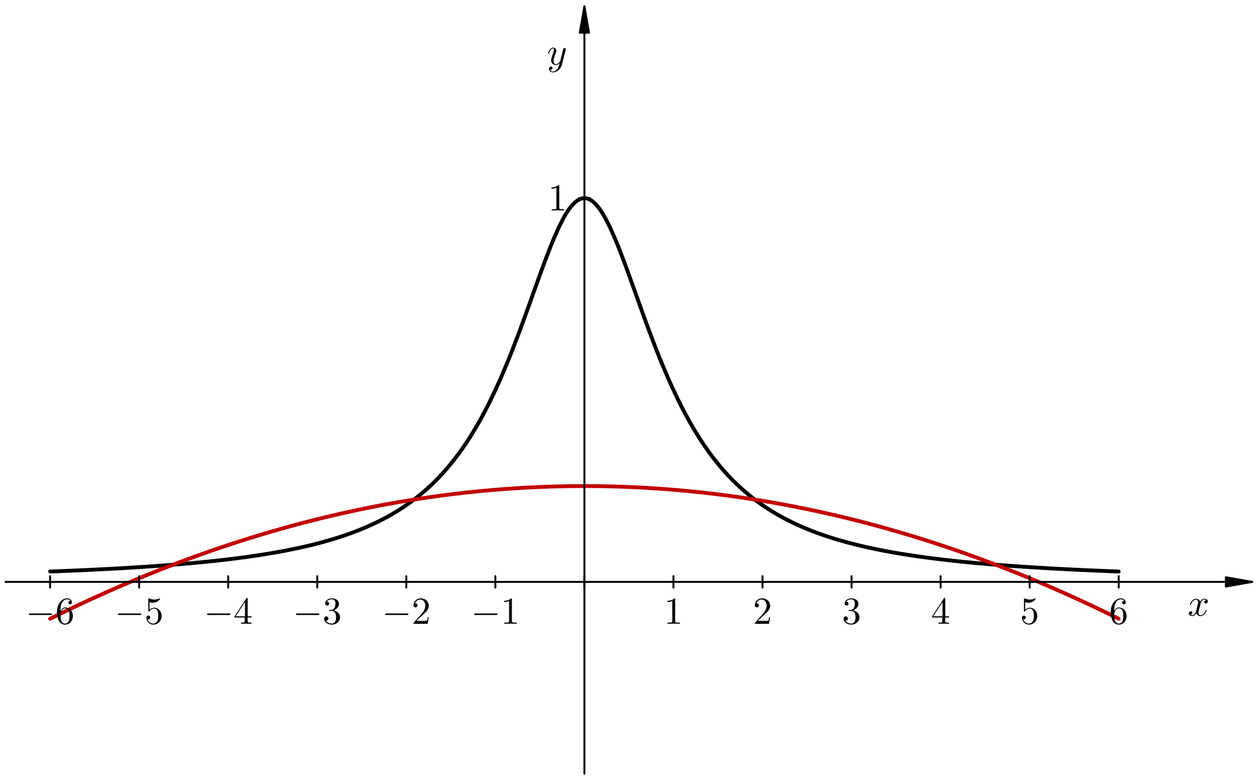
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



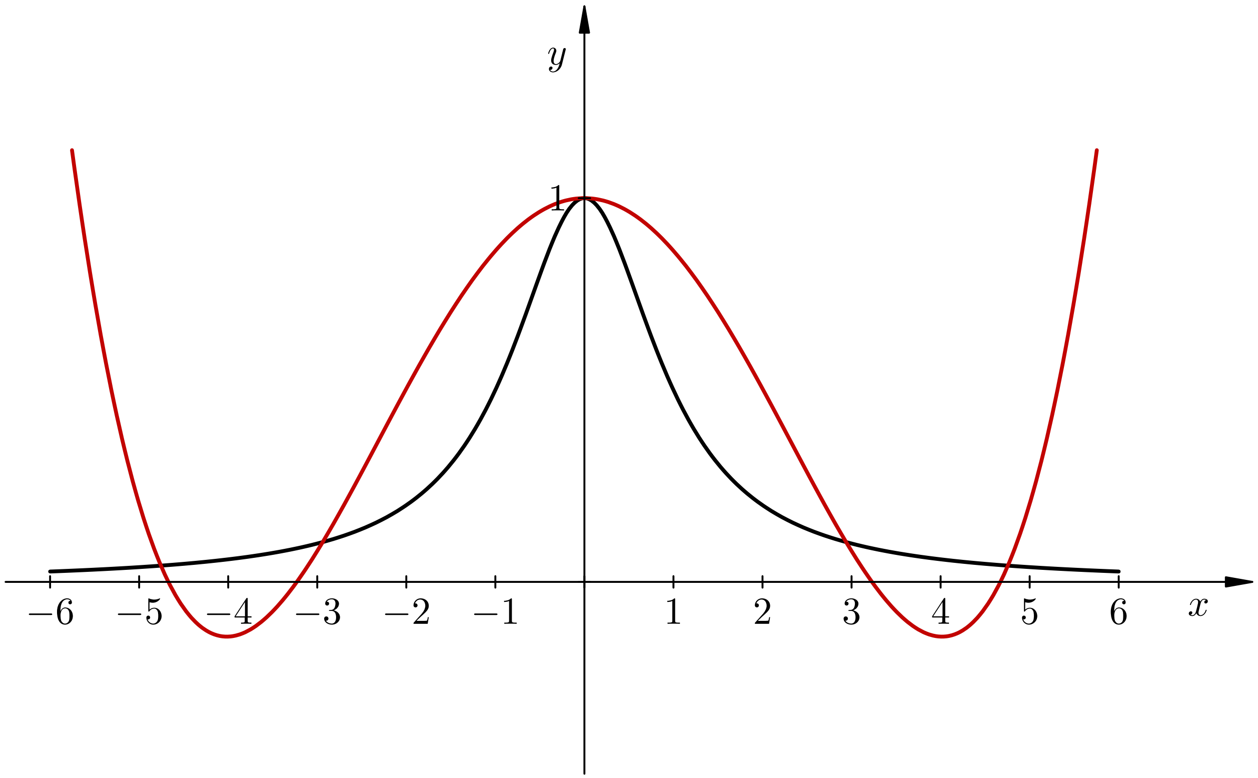
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



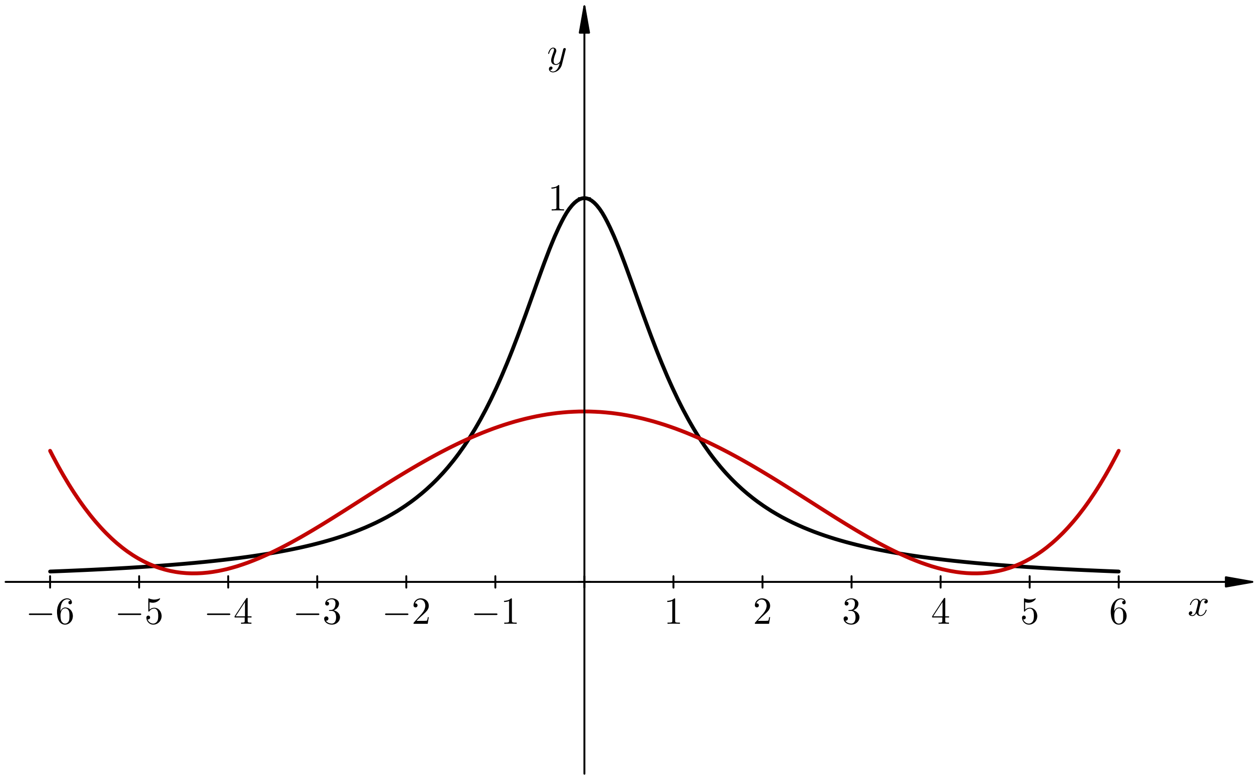
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



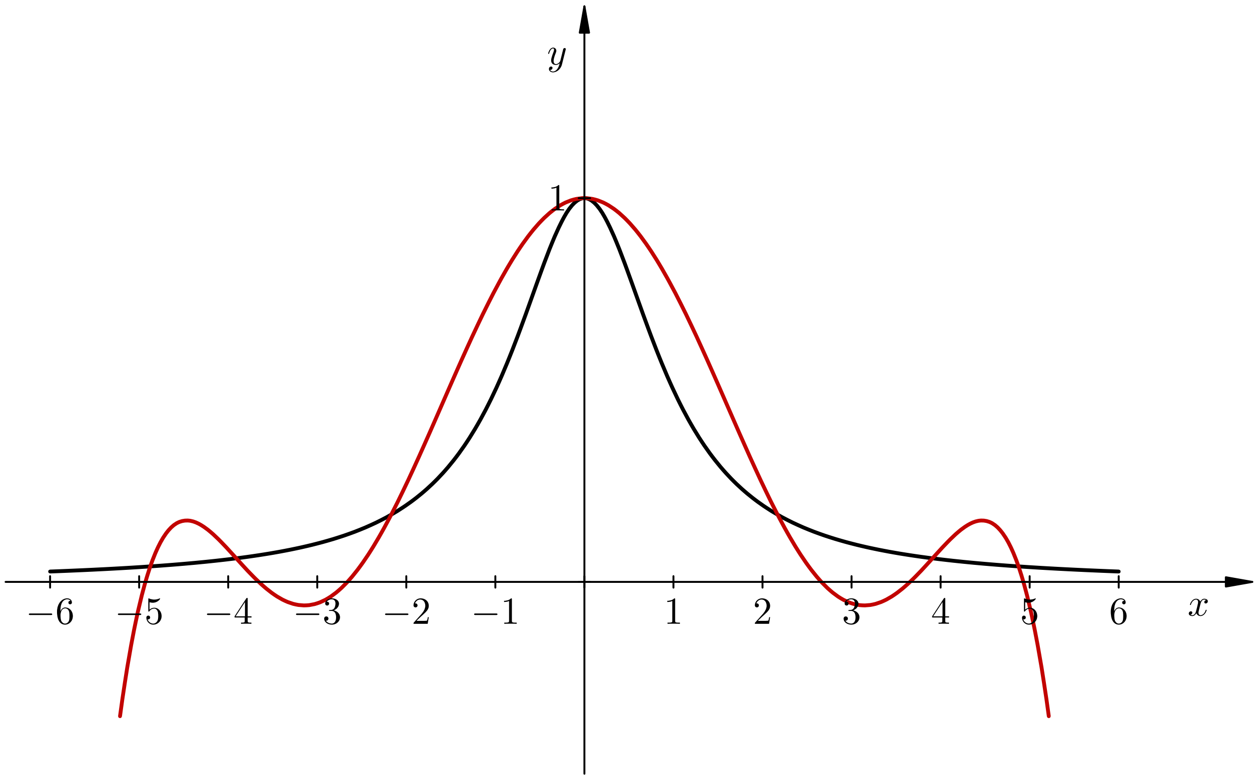
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



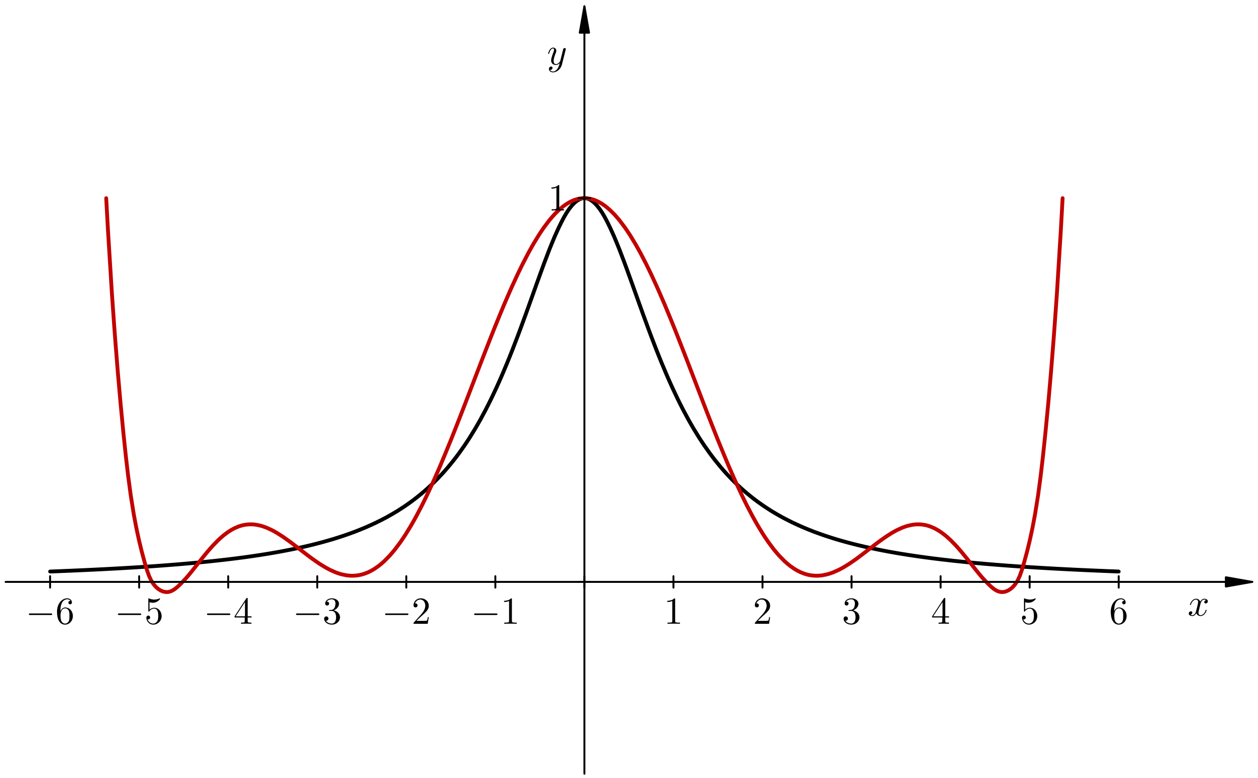
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



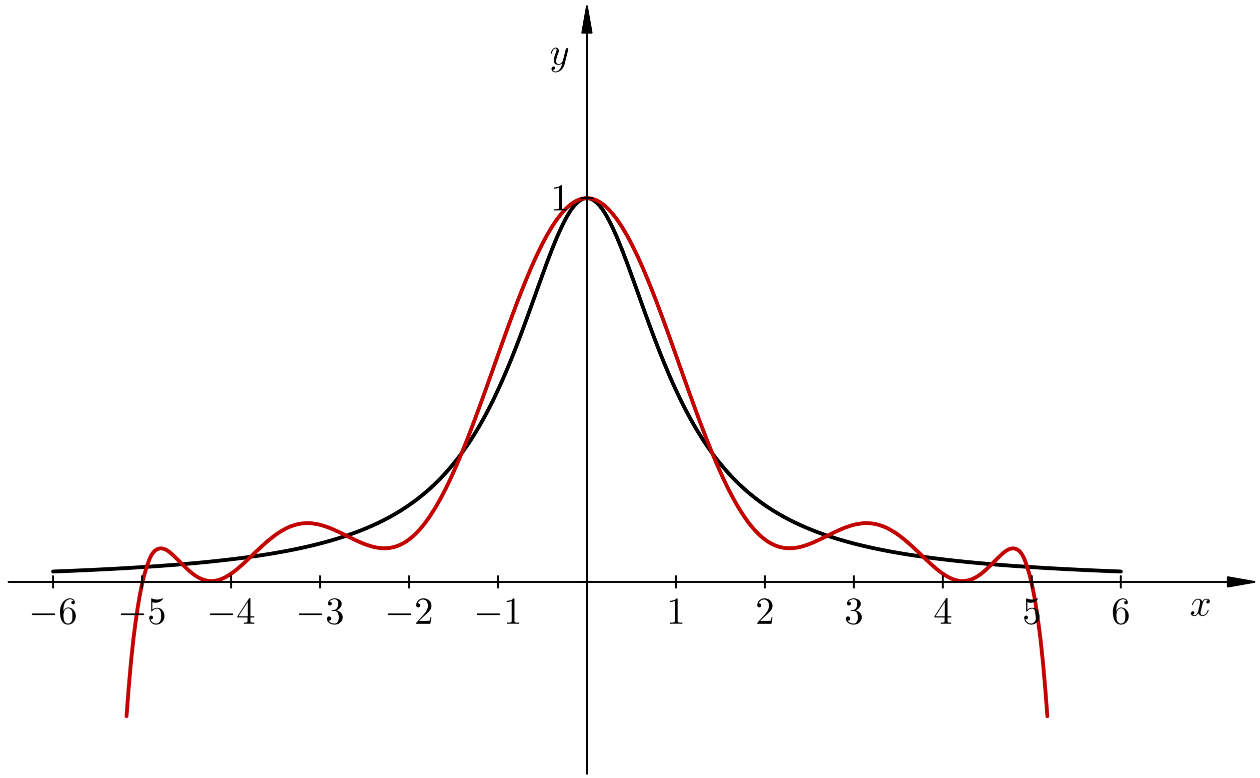
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



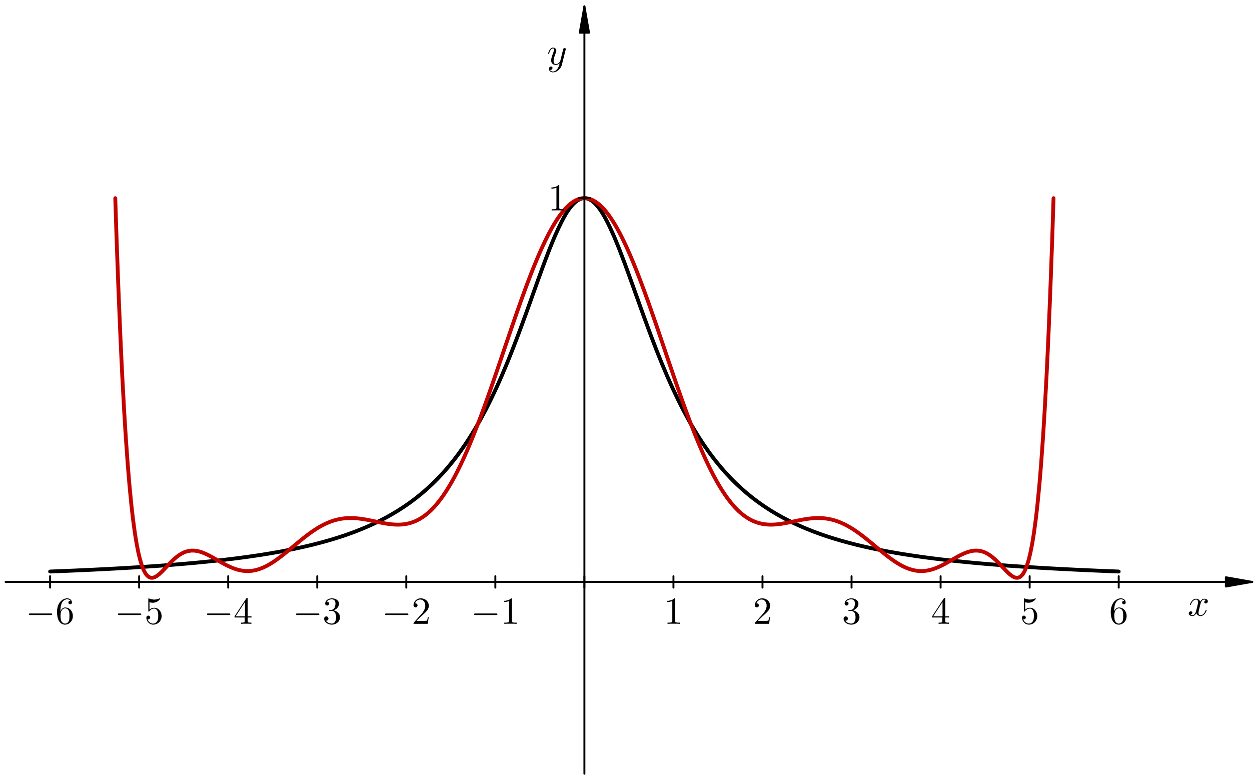
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 8.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



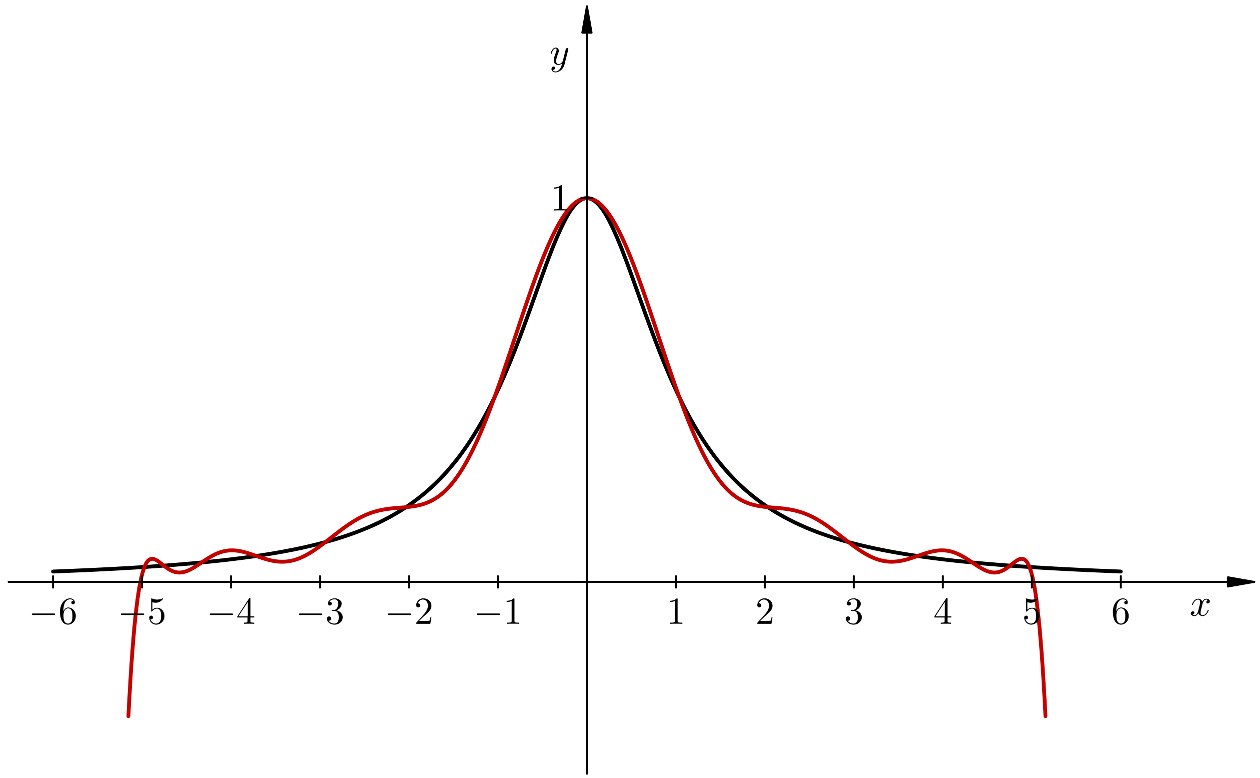
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 10.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



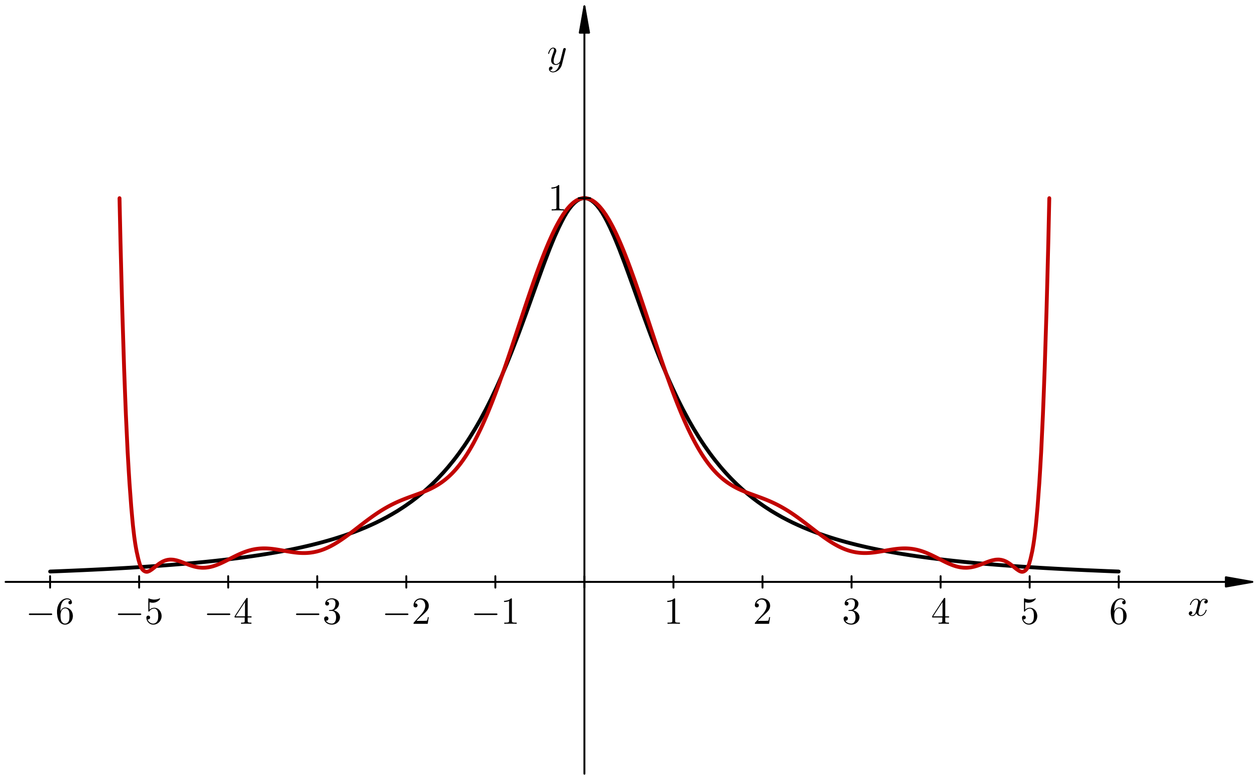
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 12.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



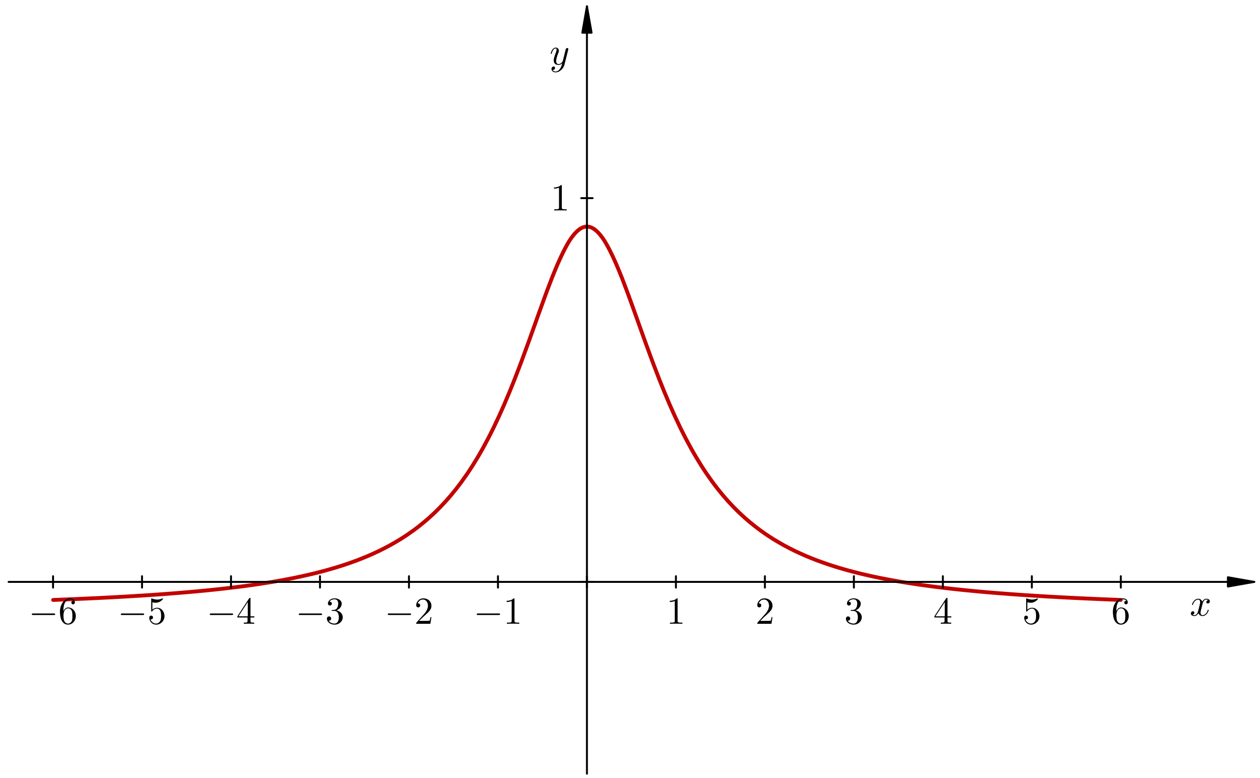
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 14.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



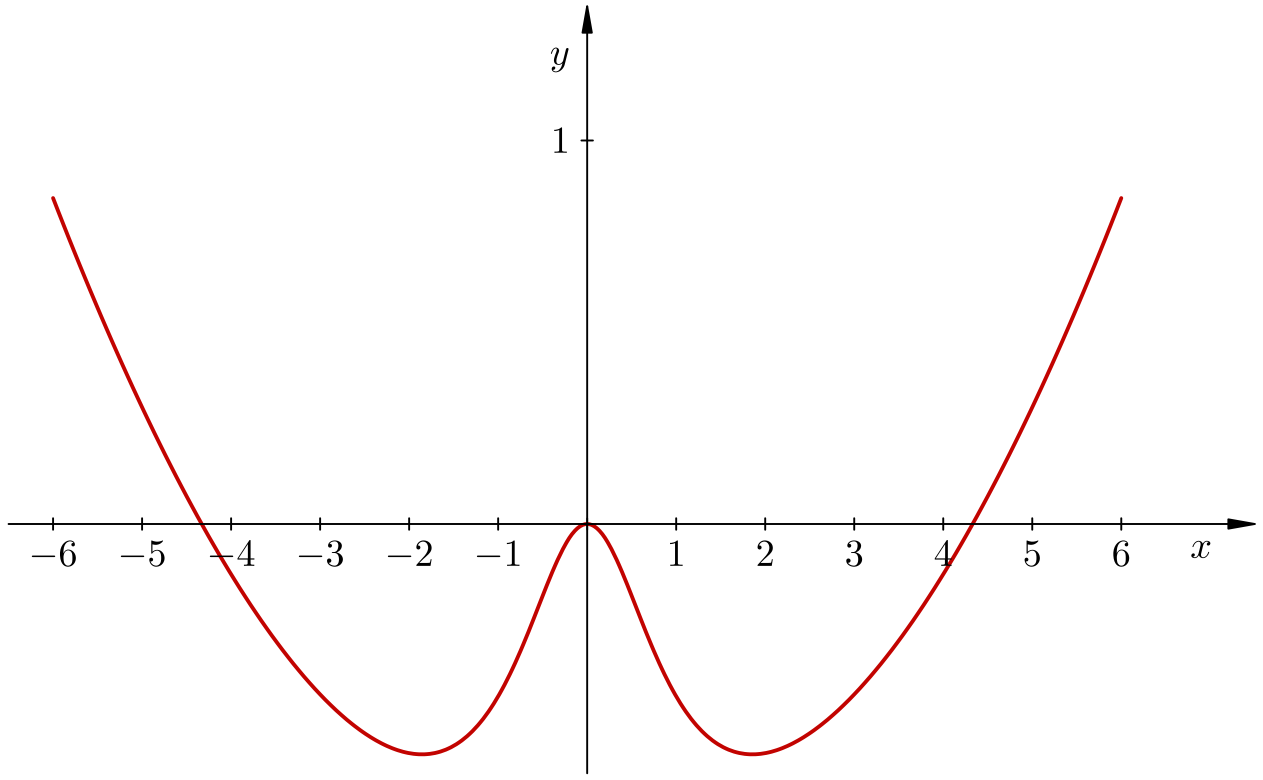
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 16.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



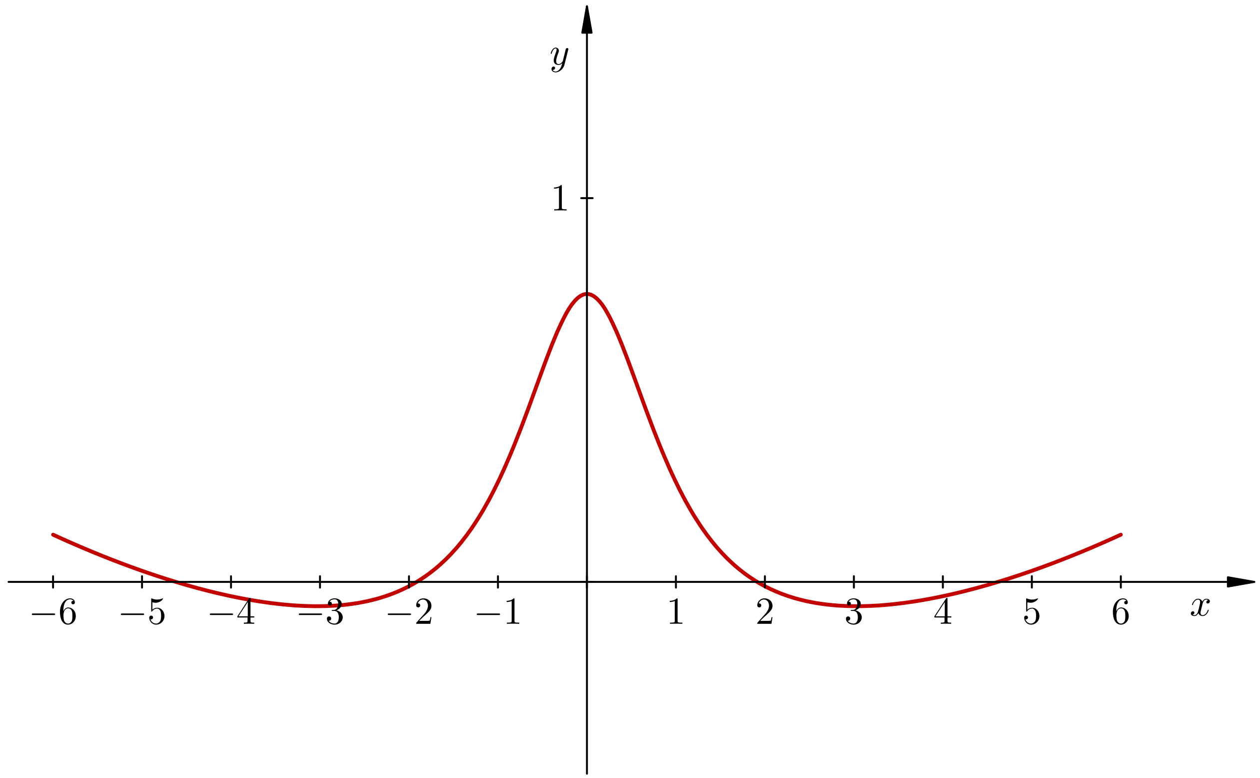
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



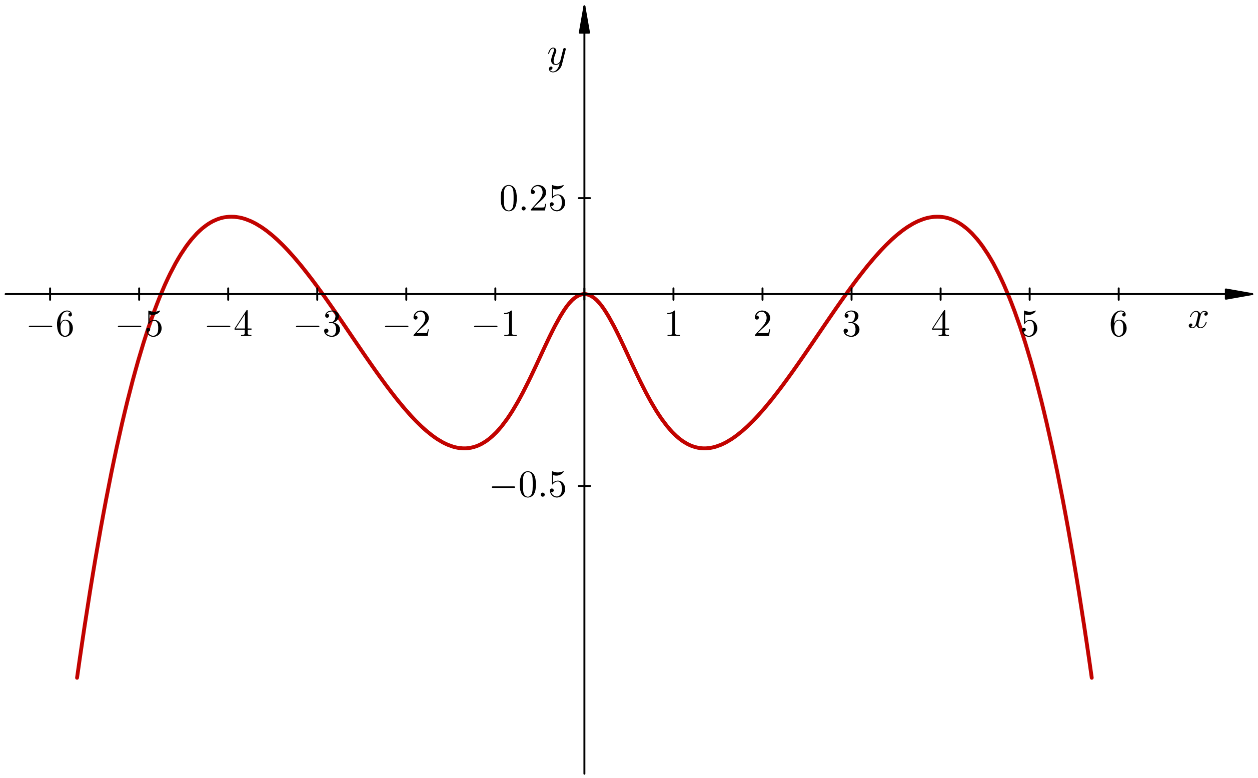
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



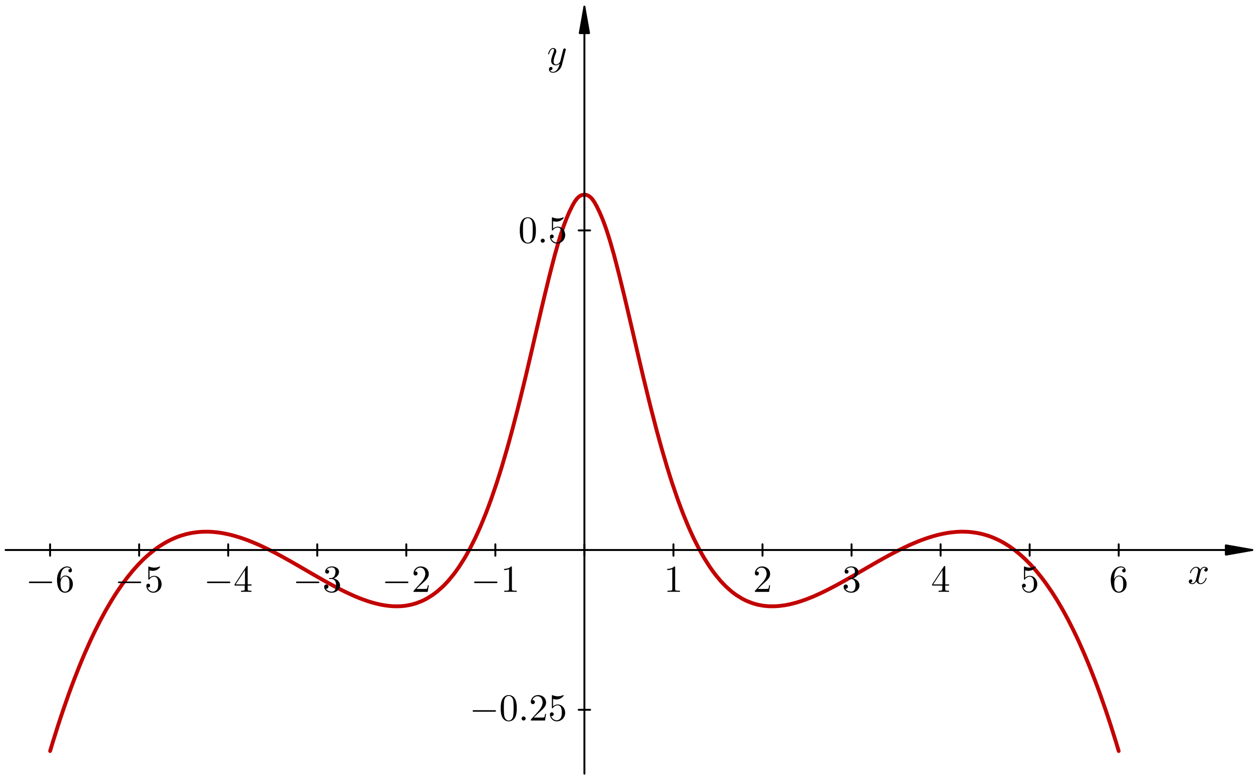
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



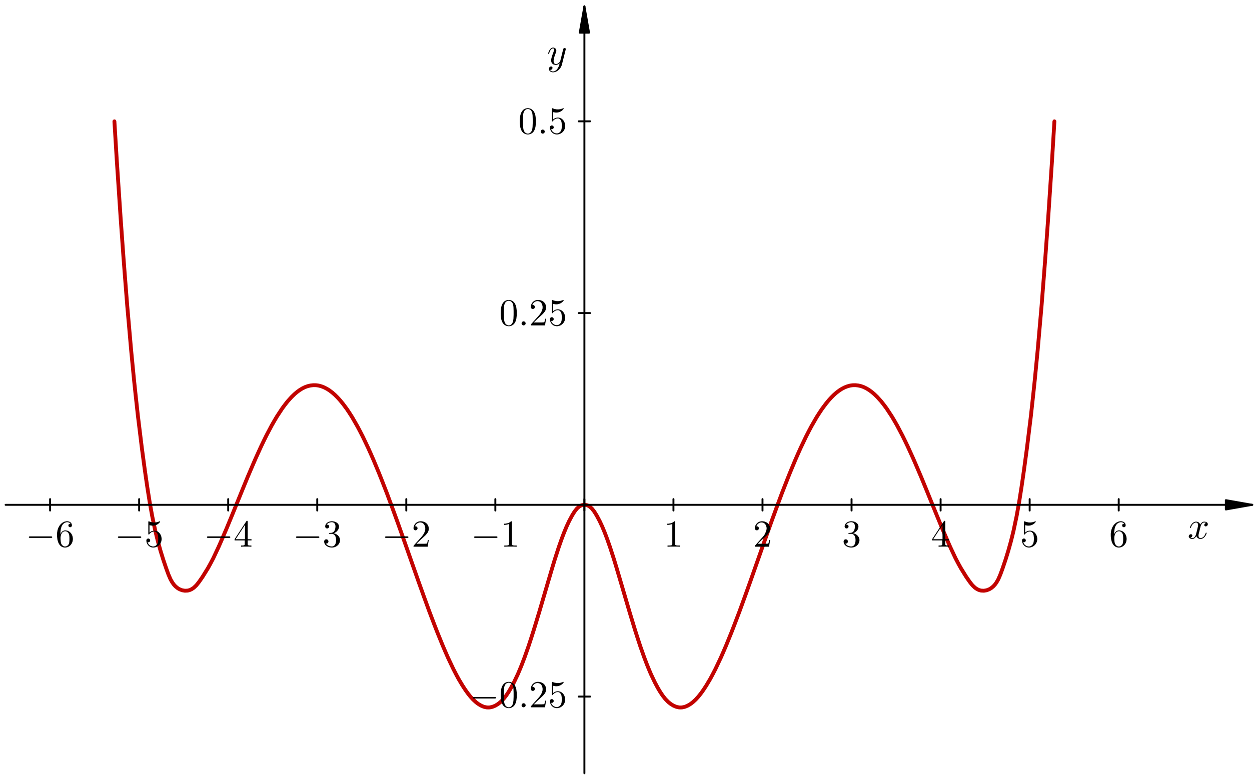
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



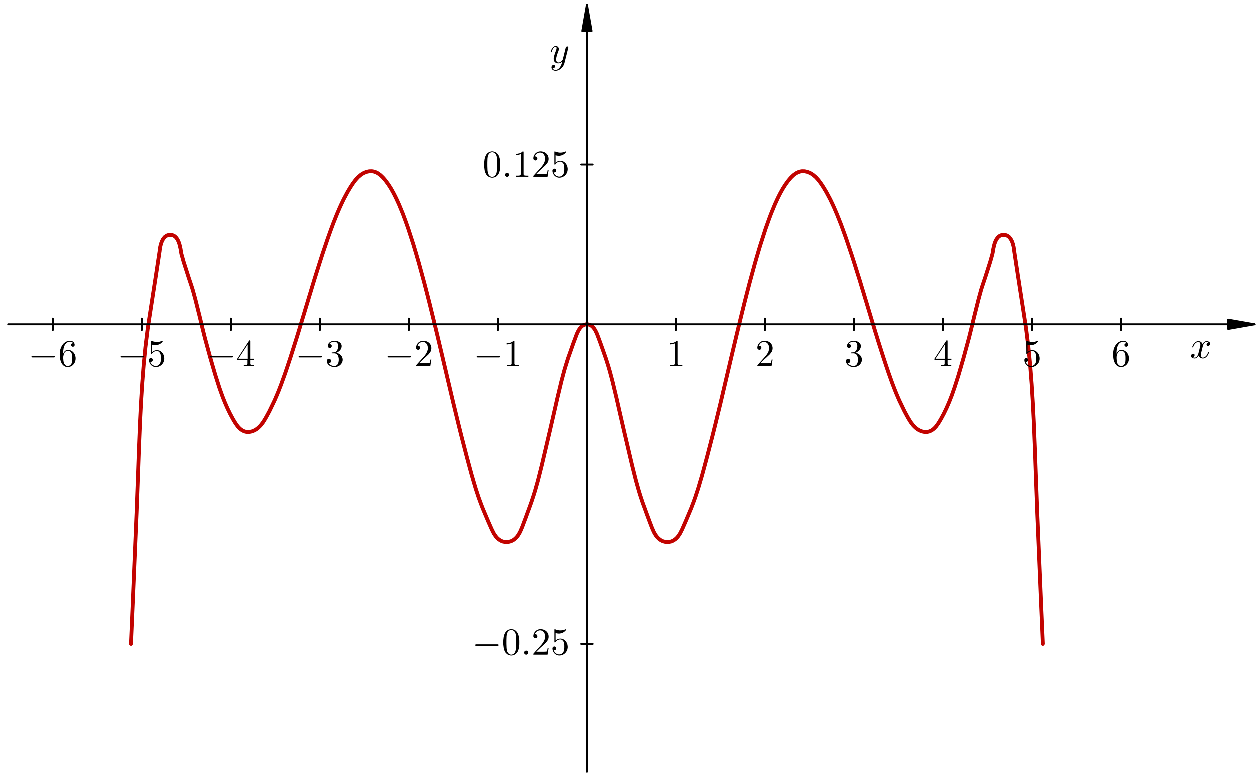
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



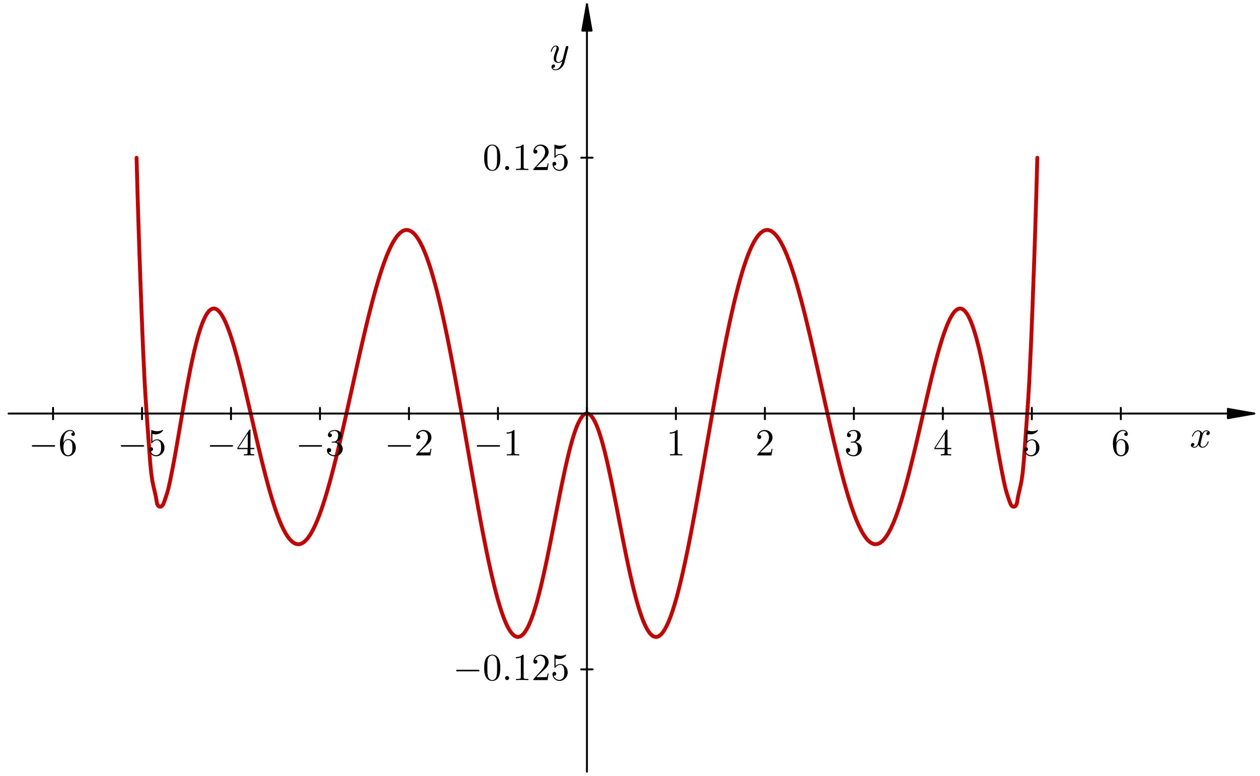
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



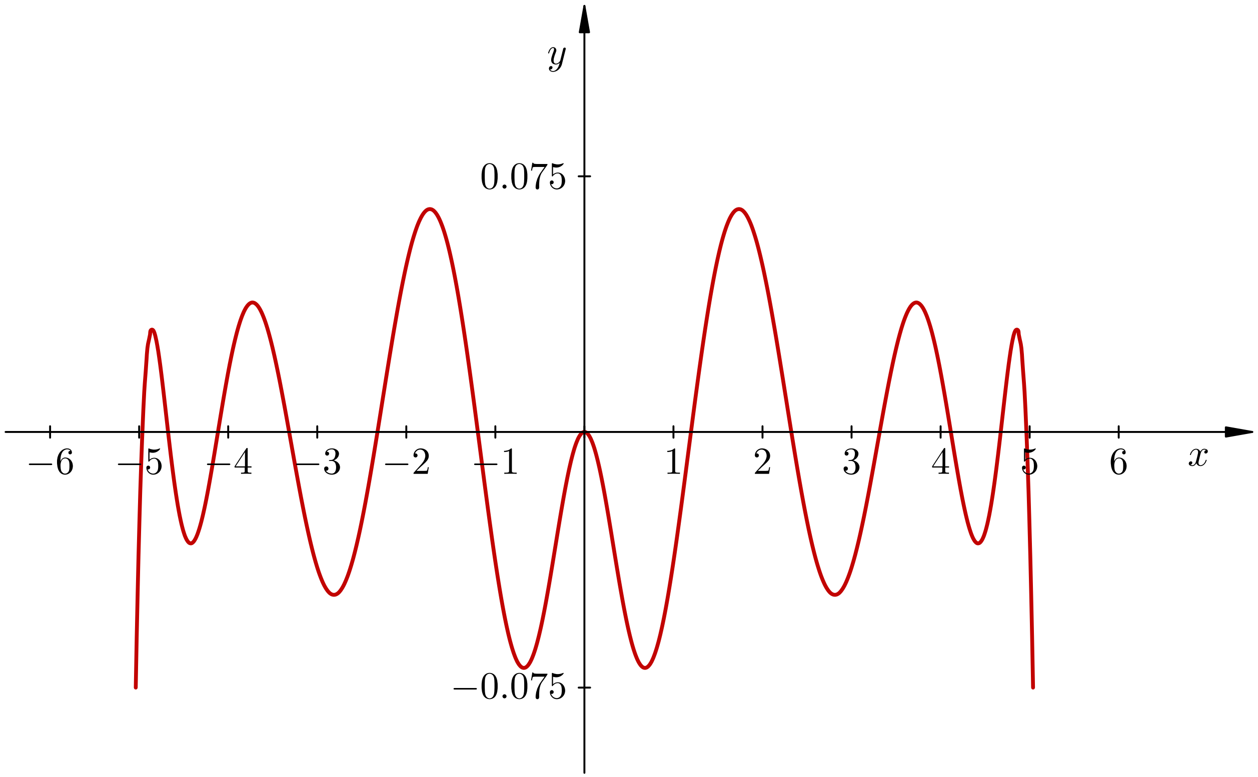
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 8.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



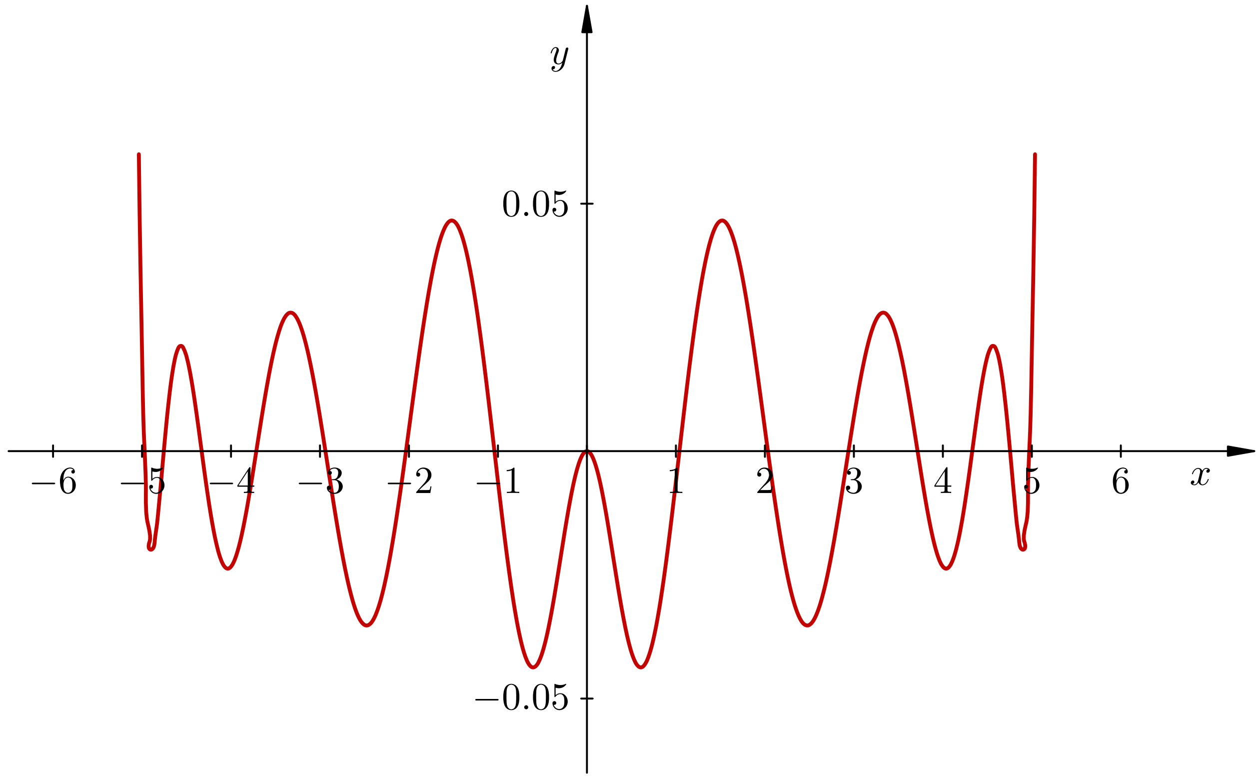
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 10.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



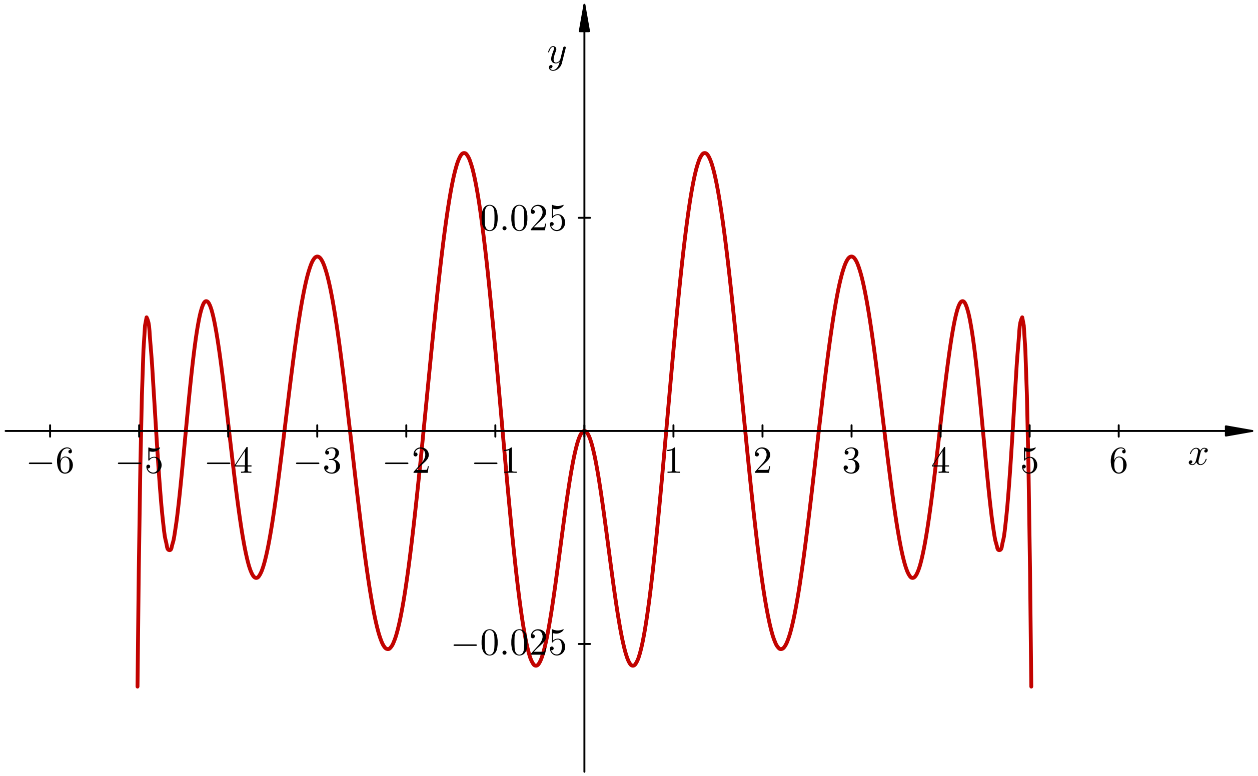
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 12.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 14.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 16.

Jesmo li spašeni?

Sljedeći teorem ukazuje na to da je

- nemoguće naći takav izbor točaka interpolacije polinomima, koji bi bio dobar za svaku funkciju.

Teorem. (Faber, 1914. g.) Za svaki mogući izbor točaka interpolacije, tj. za svaki niz skupova čvorova

$$X^{(n)} = \{x_0^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

postoji neprekidna funkcija f, za čiji niz interpolacijskih polinoma p_n, stupnja n, s čvorovima iz skupa $X^{(n)}$, vrijedi

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty \not\to 0. \qquad \blacksquare$$

Dakle, nema (uniformne) konvergencije, tj. “nema spasa”!

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Greška interpolacije — što se može učiniti?

Neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f s međusobno različitim čvorovima interpolacije $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \ldots, n$.

U bilo kojoj točki $x \in [a, b]$ za grešku interpolacijskog polinoma p_n vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} \, f^{(n+1)}(\xi).$$

za neku točku $\xi \in (x_{\min}, x_{\max}) \subseteq (a, b)$, uz

$$x_{\min} := \min\{x_0, \ldots, x_n, x\}, \quad x_{\max} := \max\{x_0, \ldots, x_n, x\}.$$

Ako je funkcija f unaprijed zadana, onda faktor s derivacijom funkcije f ne možemo "kontrolirati".

Što možemo napraviti?

Idealno bi bilo minimizirati po apsolutnoj vrijednosti maksimalnu grešku aproksimacije, tj. $\|f - p_n\|_\infty \to \min$, na željenom intervalu $[a, b]$.

- Polinom p_n^* za koji je maksimalna greška minimalna se može konstruirati.
- Kad promatramo grešku polinoma p_n^*, može se pokazati da susjedni maksimumi grešaka imaju suprotne znakove, ali su po apsolutnoj vrijednosti jednaki.
- Jedina je nevolja da je postupak traženja takve aproksimacije iterativan (Remesov algoritam), tj. takvu aproksimaciju nije jednostavno naći.
- Takva aproksimacija zove se minimaks aproksimacija funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Polinom čvorova — razne mreže čvorova

Umjesto egzaktne minimaks aproksimacije p_n^* funkcije f na intervalu $[a, b]$, zadovoljimo se "skromnijim" ciljem:

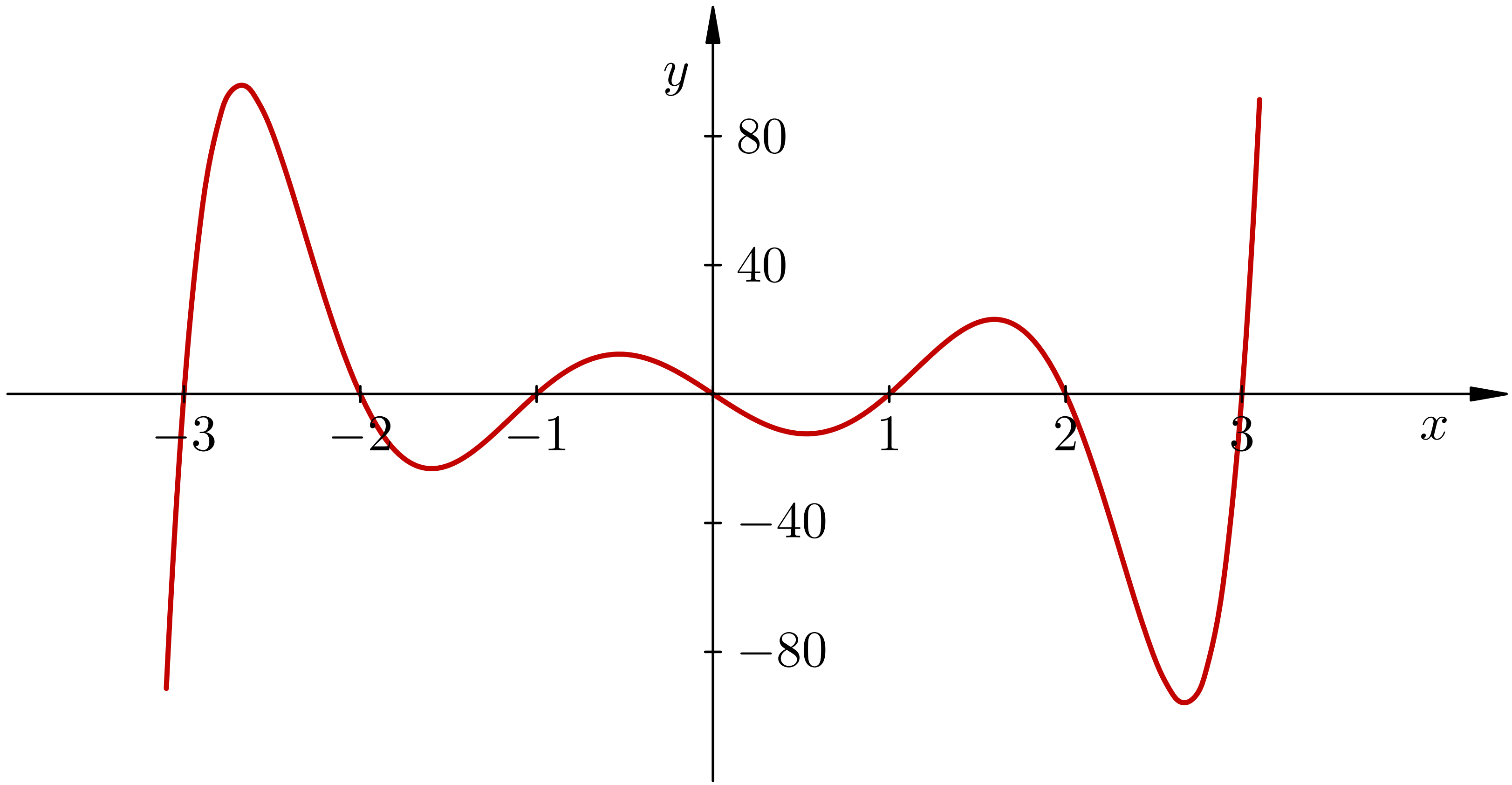
- ako možemo birati čvorove interpolacije $x_0, \ldots, x_n$,
- minimizirajmo maksimalnu apsolutnu vrijednost (grešku) polinoma čvorova

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Pogledajmo kako izgleda polinom čvorova. Ako su čvorovi

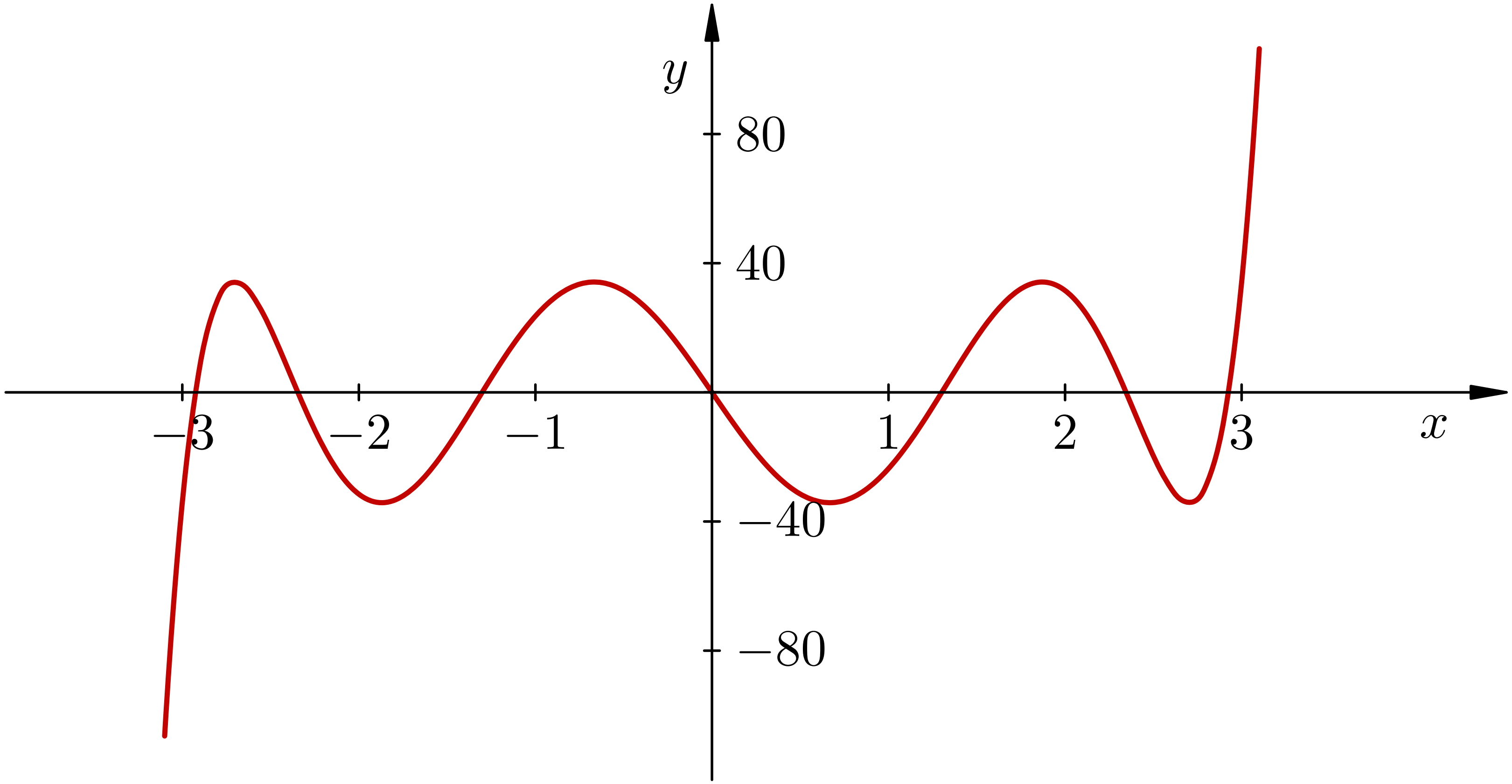
- ekvidistantni — najmanja greška je pri sredini intervala, a raste prema rubu,
- Čebiševljevi — maksimalna greška je jednaka na svakom podintervalu između čvorova, uključivo i rubove a, b.

Polinom čvorova za $n = 6$, ekvidistantna mreža



$\omega(x)$ na $[-3, 3]$, za $n = 6$, ekvidistantna mreža

Polinom čvorova za $n = 6$, Čebiševljeva mreža



$\omega(x)$ na $[-3, 3]$, za $n = 6$, Čebiševljeva mreža

Čebiševljeve točke

Prethodne slike navode na činjenicu da,

- kad se uzmu Čebiševljevi čvorovi,
- greška mijenja znak, a
- susjedni maksimumi grešaka su po apsolutnoj vrijednosti približno jednaki (v. primjer Runge).

Takvu aproksimaciju zovemo skoro minimaks aproksimacija.

Sve dokaze provodit ćemo na "standardnom" intervalu $[-1, 1]$. Ako je funkcija f zadana na nekom drugom intervalu, onda ju linearnom (afinom) transformacijom

$$y = cx + d$$

svodimo na interval $[-1, 1]$.

Čebiševljeve točke

Pokažimo da Čebiševljevi čvorovi minimiziraju maksimalnu apsolutnu vrijednost polinoma čvorova, tj. da minimiziraju

$$\max_{a \le x \le b} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|.$$

Na intervalu $[a, b]$, uzlazno poredane Čebiševljeve točke su

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n+2}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Ako je $a = -1$, $b = 1$, onda su Čebiševljeve točke x_k, za $k = 0, \ldots, n$,

- sve nultočke Čebiševljevog polinoma prve vrste T_{n+1}.

Čebiševljevi polinomi — definicija i rekurzija

Čebiševljevi polinomi prve vrste, oznaka je T_n, za $n \geq 0$, definirani su relacijom

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Polinomi T_n zadovoljavaju tročlanu rekurzivnu relaciju

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

(dokaz = zbroj cosinusa preko produkta, za $x = \cos\varphi$), uz start

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Iz ove rekurzivne relacije odmah slijedi da je T_n polinom stupnja n. Usput, za $|x| \geq 1$ vrijedi $T_n(x) = \operatorname{ch}(n \operatorname{Arch} x)$.

Čebiševljevi polinomi — nultočke i ekstremi

Nultočke i ekstreme polinoma T_{n+1} nije teško izračunati.

Njegove nultočke su (silazno indeksirane — kraća formula)

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

dok su ekstremi na segmentu $[-1, 1]$ (opet, silazno indeksirani)

$$x_k' = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 0, \ldots, n+1.$$

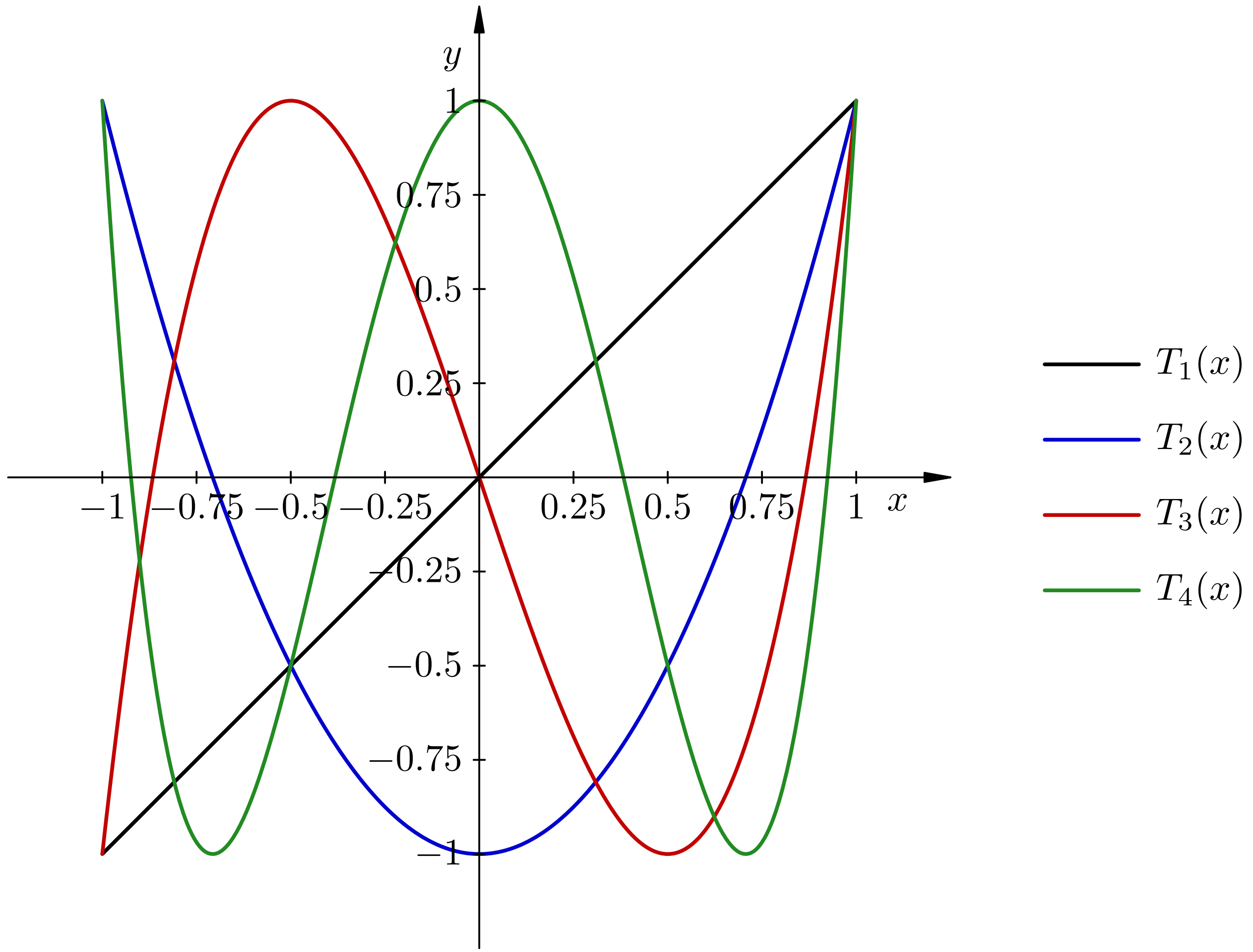
Vrijednost Čebiševljevog polinoma u ekstremu je

$$T_{n+1}(x_k') = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n+1.$$

Primijetite da tih ekstrema ima točno $n+2$ (rubovi -1 i 1 su uključeni) i da pripadne vrijednosti alterniraju po znaku.

Čebiševljevi polinomi — graf

Graf prvih nekoliko Čebiševljevih polinoma T_n na $[-1, 1]$.



Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Čebiševljevi polinomi T_n imaju važno svojstvo minimizacije "uniformnog otklona polinoma od nule" na segmentu $[-1, 1]$.

Teorem. Za zadani prirodni broj n, promatrajmo minimizacijski problem

$$\tau_n := \inf_{\deg(P) \leq n-1} \Big\{ \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^n + P(x)| \Big\},$$

gdje je P polinom. Minimum τ_n se dostiže samo za polinom

$$x^n + P(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Pripadna pogreška ili "otklon od nule" je $\tau_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Dokaz. Iz tročlane rekurzije, nije teško induktivno dokazati da je vodeći koeficijent u T_n jednak 2^{n-1}, tj. da je

$$T_n(x) = 2^{n-1} x^n + \text{članovi nižeg stupnja}, \quad n \geq 1.$$

Zbog toga vrijedi da je

$$\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = x^n + \text{članovi nižeg stupnja}.$$

Točke

$$x'_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

su lokalni ekstremi od T_n na $[-1, 1]$.

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Očito je

$$-1 = x'_n < x'_{n-1} < \cdots < x'_1 < x'_0 = 1.$$

U tim točkama je

$$T_n(x'_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Polinom $\dfrac{1}{2^{n-1}}\, T_n$ ima vodeći koeficijent jednak 1 i vrijedi

$$\max_{-1 \le x \le 1} \left| \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n \right| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Zbog toga je

$$\tau_n \le \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Pokažimo da je τ_n baš jednak desnoj strani. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\tau_n < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pokazat ćemo da to vodi na kontradikciju.

Iz definicije τ_n preko infimuma i prethodne pretpostavke, zaključujemo da postoji polinom M takav da je

$$M(x) = x^n + P(x), \quad \deg(P) \le n - 1,$$

za kojeg vrijedi

$$\tau_n \le \max_{-1 \le x \le 1} |M(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Definiramo

$$R(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) - M(x).$$

No, vodeći koeficijenti polinoma s desne strane se skrate, pa je

$$\deg(R) \leq n - 1.$$

Ispitajmo vrijednosti funkcije R u lokalnim ekstremima polinoma T_n. Iz gornje ograde za τ_n, redom, izlazi

$$R(x_0') = R(1) = \frac{1}{2^{n-1}} - M(1) > 0,$$

$$R(x_1') = -\frac{1}{2^{n-1}} - M(x_1') < 0, \quad \ldots$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

tj. za polinom R vrijedi

$$\operatorname{sign}(R(x_k')) = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Budući da ima bar $n+1$ različiti predznak, to mora postojati bar n nultočaka, što je moguće samo ako je $R = 0$. Odatle odmah izlazi da je

$$M(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n(x).$$

No, onda je $\displaystyle\max_{-1 \leq x \leq 1} |M(x)| = 1/2^{n-1}$, što je kontradikcija s $<$.

Sad bi još trebalo pokazati da je to jedini polinom s takvim svojstvom. Taj dio dokaza vrlo je sličan ovom što je već dokazano. Istim argumentom izlazi opet $M(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n(x)$. ∎

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Vratimo se sad polaznom problemu optimalnog izbora čvorova interpolacije.

Želimo izabrati čvorove interpolacije $x_k \in [-1, 1]$ tako da minimiziraju

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|.$$

Polinom čvorova ω u prethodnoj relaciji je stupnja $n + 1$ i ima vodeći koeficijent 1. Po Teoremu o minimalnom otklonu, minimum ćemo dobiti ako stavimo

$$\omega(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x),$$

a minimalna će vrijednost biti $\displaystyle\max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega(x)| = 1/2^n$.

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Odatle odmah čitamo da su čvorovi $x_0, \ldots, x_n$ nultočke polinoma T_{n+1}. U silaznom poretku, te nultočke su

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+2}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Uzlazni poredak dobivamo zamjenom indeksa $k \mapsto n - k$.

Afinom transformacijom intervala $[-1, 1]$ u interval $[a, b]$,

$$x \in [-1, 1] \quad \mapsto \quad \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot x \in [a, b],$$

izlazi i opća formula za Čebiševljeve točke (uzlazno) u $[a, b]$

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n+2}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Jesmo li bar malo spašeni?

Problem u Bernsteinovom primjeru $f(x) = |x|$ i Faberovom teoremu je preširoka klasa funkcija, odnosno,

- premala glatkoća — samo neprekidnost za f.

Uz samo malo jaču glatkoću, ipak jesmo “spašeni”!

Teorem. Neka je $f \in C^1[-1, 1]$. Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f na Čebiševljevoj mreži s $n + 1$ čvorova u intervalu $[-1, 1]$.

Niz polinoma p_n uniformno konvergira prema f na $[-1, 1]$, tj. vrijedi

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty.$$

∎

Dakle, imamo uniformnu konvergenciju interpolacije za neprekidno derivabilne funkcije na Čebiševljevim mrežama.

Hermiteova polinomna interpolacija

Hermiteova polinomna interpolacija

Osim interpolacije funkcijskih vrijednosti funkcije f u čvorovima x_k, možemo tražiti i interpolaciju derivacije f',

- tako da derivacija h' interpolacijskog polinoma h interpolira derivaciju f' u čvorovima x_k.

Dakle, zahtijevamo da je

$$h(x_k) = f(x_k), \quad h'(x_k) = f'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Takva vrsta interpolacije zove se Hermiteova interpolacija.

Prvo, treba odgovoriti na nekoliko važnih pitanja:

- postoji li takav interpolacijski polinom;
- ako postoji, je li jedinstven;
- ako postoji i jedinstven je, kojeg je stupnja.

Hermiteova polinomna interpolacija

Uvedimo skraćene oznake za vrijednosti f i f' u čvorovima

$$f_k := f(x_k), \quad f'_k = f'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Problem egzistencije i jedinstvenosti Hermiteove interpolacije konstruktivno rješava sljedeći teorem.

Teorem. Postoji jedinstveni polinom h_{2n+1}, stupnja najviše $2n+1$, koji zadovoljava interpolacijske uvjete

$$h_{2n+1}(x_k) = f_k, \quad h'_{2n+1}(x_k) = f'_k, \quad k = 0, \ldots, n,$$

gdje su x_k međusobno različite točke i f_k, f'_k zadani realni brojevi.

Dokaz. Ideja = konstrukcija baze nalik na Lagrangeovu.

Hermiteova polinomna interpolacija

Tražimo "bazične polinome" $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$, za $k = 0, \ldots, n$, za koje vrijede tzv. "kardinalni" uvjeti interpolacije

$$h_{k,0}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k, \end{cases} \qquad h'_{k,0}(x_i) = 0,$$

$$h_{k,1}(x_i) = 0, \qquad h'_{k,1}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k. \end{cases}$$

Ako nađemo takve polinome $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$, onda je

$$h_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h_{k,0}(x) + f'_k h_{k,1}(x) \big).$$

Hermiteova polinomna interpolacija

Provjera (prije dokaza): Deriviranjem polinoma $h_{2n+1}(x)$ izlazi

$$h'_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h'_{k,0}(x) + f'_k h'_{k,1}(x)\big),$$

pa lako vidimo da su ispunjeni svi uvjeti interpolacije

$$h_{2n+1}(x_i) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h_{k,0}(x_i) + f'_k h_{k,1}(x_i)\big) = f_k,$$

$$h'_{2n+1}(x_i) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h'_{k,0}(x_i) + f'_k h'_{k,1}(x_i)\big) = f'_k.$$

Ostaje još konstruirati polinome $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$.

Hermiteova polinomna interpolacija

Tvrdimo da se $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ mogu napisati kao

$$h_{k,0}(x) = [1 - 2(x - x_k)\ell_k'(x_k)]\,\ell_k^2(x)$$

$$h_{k,1}(x) = (x - x_k)\,\ell_k^2(x),$$

gdje je ℓ_k odgovarajući polinom Lagrangeove baze.

Provjera da vrijednosti $h_{k,0}(x_i)$, $h_{k,0}'(x_i)$, $h_{k,1}(x_i)$ i $h_{k,1}'(x_i)$ zadovoljavaju tražene uvjete vrši se direktno — uvrštavanjem.

Budući da je ℓ_k polinom stupnja n,

- onda su $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ stupnja $2n+1$,
- pa je h_{2n+1} stupnja najviše $2n+1$.

Time smo dokazali egzistenciju. Preostaje još jedinstvenost.

Hermiteova polinomna interpolacija

Primijetite da funkcija pogreške polinoma h

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n+1}(x)$$

ima dvostruke nultočke u čvorovima $x_0, \ldots, x_n$, jer i funkcija e_h, i njezina derivacija e_h' imaju nultočke u x_i, tj.

$$e_h(x_i) = 0, \quad e_h'(x_i) = 0.$$

Neka je q_{2n+1} bilo koji drugi polinom koji zadovoljava uvjete interpolacije. Za razliku p tih polinoma onda vrijedi

$$\begin{aligned} p(x) &= h_{2n+1}(x) - q_{2n+1}(x) \\ &= (f(x) - q_{2n+1}(x)) - (f(x) - h_{2n+1}(x)) \\ &= e_q(x) - e_h(x). \end{aligned}$$

Hermiteova polinomna interpolacija

Polinom p je stupnja najviše $2n+1$ i

- ima dvostruke nultočke u čvorovima x_i, za $i = 0, \ldots, n$, odnosno, ukupno ima barem $2n+2$ nultočke.

Zaključak. Polinom p je nul-polinom, pa je h_{2n+1} jedinstven. ■

Zato što greška Hermiteovog interpolacijskog polinoma ima dvostruke nultočke u $x_0, \ldots, x_n$, polinom čvorova ω_h jednak je

$$\omega_h(x) = (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 = \omega^2(x),$$

pri čemu je ω polinom čvorova Lagrangeove interpolacije.

Grešku Hermiteove interpolacije dobivamo na sličan način kao i kod Lagrangeove interpolacije.

Greška Hermiteove interpolacije

Jedine razlike: ovdje je h_{2n+1} stupnja $2n+1$, a polinom čvorova je $\omega_h(x) = \omega^2(x)$.

Teorem. Neka je f funkcija definirana na segmentu $[a, b]$. Neka je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i

- neka su $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \ldots, n$, međusobno različiti čvorovi interpolacije, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$,
- neka je e_h greška Hermiteovog interpolacijskog polinoma h_{2n+1} za funkciju f na mreži čvorova $x_0, \ldots, x_n$.

Za bilo koju točku $x \in [a, b]$, takvu da je $x \neq x_0, \ldots, x_n$, tj. čim x nije čvor interpolacije, za grešku interpolacije vrijedi

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n+1}(x) = \omega^2(x)\, f[x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, x].$$

Greška Hermiteove interpolacije — nastavak

Ako $f^{(2n+2)}$ postoji na $[a, b]$, onda za svaku točku $x \in [a, b]$, postoji točka $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$, gdje je

$$x_{\min} := \min\{x, x_0, \ldots, x_n\}, \quad x_{\max} := \max\{x, x_0, \ldots, x_n\},$$

takva da je

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n+1}(x) = \omega^2(x) \, \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}.$$

■

Napomena. Ako želimo da prva formula (s podijeljenom razlikom) vrijedi i u čvorovima interpolacije, onda

- treba pretpostaviti da druga derivacija f'' postoji u svim čvorovima,
- jer dobivamo trostruke čvorove na desnoj strani (v. iza).

Hermiteova interpolacija — Newtonova forma

Hermiteov interpolacijski polinom može se zapisati i u Newtonovoj bazi — što je zgodnije za računanje.

- Točke interpolacije su $x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n$, tj. svaka od njih je dvostruki čvor. U tablici podijeljenih razlika ovu mrežu označavamo s $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{2n}, t_{2n+1}$.

Pokazali smo da za podijeljene razlike s dvostrukim čvorom vrijedi

$$\begin{aligned} f[x_k, x_k] &= \lim_{h \to 0} f[x_k, x_k + h] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h} = f'(x_k). \end{aligned}$$

Dakle, $f[x_k, x_k] = f'_k$ su baš zadani podaci! Uz tu modifikaciju, podijeljene razlike se računaju na uobičajeni način (rekurzija).

Podijeljene razlike

Tablica svih potrebnih podijeljenih razlika ima ovaj oblik:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
t_j & f[t_j] & f[t_j, t_{j+1}] & f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}] & \cdots & f[t_0, \ldots, t_{2n+1}] \\
\hline
x_0 & f[x_0] & & & & \\
 & & f'(x_0) & & & \\
x_0 & f[x_0] & & f[x_0, x_0, x_1] & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & \ddots & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_1] & & \\
 & & f'(x_1) & & & \cdots \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_1, x_1, x_2] & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \\
x_n & f[x_n] & & f[x_{n-1}, x_n, x_n] & & \\
 & & f'(x_n) & & & \\
x_n & f[x_n] & & & &
\end{array}
$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Konačni izgled Hermiteovog interpolacijskog polinoma u Newtonovoj bazi je

$$
\begin{aligned}
h_{2n+1}(x) = f[x_0] + f'(x_0)\,(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1]\,(x - x_0)^2 \\
+ f[x_0, x_0, x_1, x_1]\,(x - x_0)^2\,(x - x_1) + \cdots \\
+ f[x_0, x_0, \ldots, x_n, x_n]\,(x - x_0)^2 \cdots (x - x_{n-1})^2 (x - x_n).
\end{aligned}
$$

Naziv “Hermiteova interpolacija” koristi se i za općenitiju, tzv. proširenu Hermiteovu (ili Hermite–Birkhoff) interpolaciju.

- Ovdje se mogu interpolirati i više derivacije od prvih.
- Bitno: u svakom čvoru x_i, “redom” se interpoliraju funkcijska vrijednost i prvih nekoliko uzastopnih derivacija, a broj podataka po čvoru može varirati.

Proširena Hermiteova interpolacija

I za proširenu Hermiteovu interpolaciju postoji jedinstveni interpolacijski polinom stupnja najviše $n = \text{broj podataka} - 1$.

Primjer. Nađite interpolacijski polinom koji interpolira redom zadane vrijednosti $f, f', \ldots, f^{(n)}$ u čvoru x_0.

U ovom primjeru, x_0 je $(n+1)$-struki čvor interpolacije. Za podijeljene razlike višeg reda s istim čvorovima vrijedi

$$f[\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{(k+1)\ \text{puta}}] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

čim $f^{(k)}(x_0)$ postoji, pa je interpolacijski polinom p_n jednak Taylorovom polinomu stupnja n, za funkciju f oko točke x_0.

Preskakanje derivacija u interpolaciji

Ako dozvolimo "preskakanje" nekih derivacija u nekim točkama, problem interpolacije

- ne mora uvijek imati jedinstveno rješenje.

Primjer. Nađite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost interpolacijskog polinoma $p \in \mathcal{P}_2$, za kojeg vrijedi

$$p(x_0) = f_0, \quad p'(x_1) = f_1', \quad p(x_2) = f_2,$$

gdje su (x_0, f_0), (x_1, f_1') i (x_2, f_2) zadane točke, uz pretpostavku da je $x_0 \neq x_2$ (dozvoljeno je $x_1 = x_0$ ili $x_1 = x_2$).

Rješenje. Mora biti $x_1 \neq (x_0 + x_2)/2 \iff$ regularnost matrice sustava za interpolaciju.