

Numerička matematika

11. predavanje — dodatak

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja — dodatka

- Numerička integracija (dodatak):
 - Asimptotski razvoj i Euler–MacLaurinova formula.
 - Richardsonova ekstrapolacija i Rombergov algoritam.
 - Primjeri za Rombergov algoritam.

Rombergov algoritam

Općenito o Rombergovom algoritmu

Pri izvodu Rombergovog algoritma koristimo se sljedećim principima:

- udvostručavanjem broja podintervala u produljenoj trapeznoj metodi,
- eliminacijom vodećeg člana u asimptotskom razvoju greške, iz dvije susjedne produljene formule.

Ponovljena primjena ovog principa zove se Richardsonova ekstrapolacija.

Za početak, treba objasniti

- što je to asimptotski razvoj.

Asimptotski razvoj

Da bismo mogli približno izračunati sumu **konvergentnog** reda neke funkcije f u točki x , oblika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x),$$

red smo aproksimirali **konačnom** parcijalnom sumom

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n p_n(x).$$

Time smo podrazumijevali da **ostatak** reda teži prema **nuli**, i to **po** N , za **fiksni** x

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (f(x) - f_N(x)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n p_n(x) = 0.$$

Precizna definicija asimptotskog niza

Ako zamijenimo ulogu N i x u konvergenciji razvoja, dobivamo novi pojam **asimptotskog** razvoja. Pritom red uopće **ne mora** konvergirati.

Precizna definicija **asimptotskog razvoja** u **okolini** neke točke bazirana je na definiciji asimptotskog **niza** u okolini te točke.

Definicija. (Asimptotski niz) Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$ neka domena i $c \in \text{Cl } D$ neka **točka** iz zatvarača skupa D , s tim da c može biti i $+\infty$ ili $-\infty$. Nadalje, neka je $\varphi_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, niz funkcija za kojeg vrijedi

$$\varphi_n(x) = o(\varphi_{n-1}(x)) \quad (x \rightarrow c \text{ u } D),$$

za **svaki** $n \in \mathbb{N}$. Tada kažemo da je (φ_n) **asimptotski niz** kad $x \rightarrow c$ u skupu D . ■

Precizna definicija asimptotskog razvoja

Podsjetnik. Oznaka $\varphi_n(x) = o(\varphi_{n-1}(x))$ znači da svaka funkcija φ_n raste **bitno sporije** od prethodne funkcije φ_{n-1} u okolini neke točke (kod nas c), u smislu da vrijedi

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \in D}} \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)} = 0,$$

što uključuje i pretpostavku da je $\varphi_{n-1}(x) \neq 0$ na nekoj okolini točke c gledano u skupu D , osim eventualno u samoj točki c .

Definicija. (Asimptotski razvoj) Neka je (φ_n) , $n \in \mathbb{N}_0$, **asimptotski niz** kad $x \rightarrow c$ u skupu D . **Formalni red** funkcija

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$$

Precizna definicija asimptotskog razvoja

je **asimptotski razvoj** funkcije f za $x \rightarrow c$ u skupu D , oznaka

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (x \rightarrow c \text{ u } D),$$

ako za **svaki** $N \in \mathbb{N}$ vrijedi relacija asimptotskog ponašanja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n(x) + O(\varphi_N(x)) \quad (x \rightarrow c \text{ u } D),$$

tj. **apsolutna greška** između f i $(N - 1)$ -e parcijalne sume reda **raste najviše jednako brzo** kao i N -ti član asimptotskog niza, u okolini točke c . ■

Euler–MacLaurinova formula

Asimptotski razvoj pogreške za produljenu trapeznu metodu integracije daje Euler–MacLaurinova formula.

Teorem. (Euler–MacLaurinova formula) Neka su m i n cijeli brojevi takvi da je $m \geq 0$ i $n \geq 1$. Definiramo ekvidistantnu mrežu s n podintervala na $[a, b]$, tj.

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n.$$

Pretpostavimo da je $f \in C^{(2m+2)}[a, b]$. Za pogrešku produljene trapezne metode vrijedi

$$E_n(f) = \int_a^b f(x) dx - I_n^T(f) = \sum_{i=1}^m \frac{d_{2i}}{n^{2i}} + F_{n,m},$$

Euler–MacLaurinova formula

gdje su koeficijenti

$$d_{2i} = -\frac{B_{2i}}{(2i)!} (b-a)^{2i} (f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)),$$

a ostatak je

$$F_{n,m} = \frac{(b-a)^{2m+2}}{(2m+2)! n^{2m+2}} \cdot \int_a^b \bar{B}_{2m+2} \left(\frac{x-a}{h} \right) f^{(2m+2)}(x) dx.$$

Ovdje su B_{2i} Bernoullijevi brojevi,

$$B_i = -\int_0^1 B_i(x) dx, \quad i \geq 1,$$

Euler–MacLaurinova formula

a \overline{B}_i je periodičko proširenje običnih Bernoullijevih polinoma

$$\overline{B}_i(x) = \begin{cases} B_i(x), & \text{za } 0 \leq x < 1, \\ \overline{B}_i(x-1), & \text{za } x \geq 1. \end{cases}$$

Dokaz je u klasičnim udžebnicima numeričke analize. ■

U koeficijentima d_{2i} javljaju se Bernoullijevi brojevi. Osim $B_1 = -\frac{1}{2}$, svi ostali neparni Bernoullijevi brojevi su 0, a prvih nekoliko parnih je:

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \\ B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}.$$

Nadalje, brojevi B_{2i} vrlo brzo rastu po apsolutnoj vrijednosti, tako da je $B_{60} \approx -2.139994926 \cdot 10^{34}$.

Eliminacija člana greške

“Red” u n^{-2} , koji se javlja u **asimptotskoj** ocjeni pogreške za produljenu trapeznu metodu

$$E_n(f) = \int_a^b f(x) dx - I_n^T(f) = \sum_{i=1}^m \frac{d_{2i}}{n^{2i}} + F_{n,m},$$

- ne konvergira — kad “glatkoća” m raste u ∞ , jer koeficijenti d_{2i} ne teže prema nuli.

Naravno, znamo da $E_n(f) \rightarrow 0$, kad broj podintervala $n \rightarrow \infty$.

Ideja: Ako je funkcija f dovoljno glatka,

- eliminirati član po član u sumi za grešku,
- na osnovu izračunatih vrijednosti integrala s $n/2$ i n podintervala, odnosno, s duljinama koraka $2h$ i h .

Izvod Rombergovog algoritma

Neka je $I_n^{(0)}$ trapezna formula n podintervala.

Iz Euler–MacLaurinove formule, (ako je funkcija f dovoljno glatka i n paran), za **asimptotski razvoj** greške imamo

$$I - I_n^{(0)} = \frac{d_2^{(0)}}{n^2} + \frac{d_4^{(0)}}{n^4} + \dots + \frac{d_{2m}^{(0)}}{n^{2m}} + F_{n,m}$$

$$I - I_{n/2}^{(0)} = \frac{4d_2^{(0)}}{n^2} + \frac{16d_4^{(0)}}{n^4} + \dots + \frac{2^{2m}d_{2m}^{(0)}}{n^{2m}} + F_{n/2,m}$$

Želimo **eliminirati** prvi član greške s n^{-2} , pa **prvi** razvoj pomnožimo s 4 i oduzmemo mu **drugi** razvoj. Dobivamo

$$4(I - I_n^{(0)}) - (I - I_{n/2}^{(0)}) = -\frac{12d_4^{(0)}}{n^4} - \frac{60d_6^{(0)}}{n^6} + \dots$$

Izvod Rombergovog algoritma

Premješanjem članova koji imaju I na lijevu stranu, a zatim dijeljenjem, dobivamo

$$I = \frac{4I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(0)}}{3} - \frac{4d_4^{(0)}}{n^4} - \frac{20d_6^{(0)}}{n^6} + \dots$$

Prvi član zdesna uzimamo kao bolju, popravljenu aproksimaciju integrala. Označimo tu aproksimaciju s

$$I_n^{(1)} = \frac{4I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(0)}}{3}, \quad n \text{ paran}, n \geq 2.$$

Sada u formuli za grešku, da bismo lakše računali, definiramo

$$d_4^{(1)} = -4d_4^{(0)}, \quad d_6^{(1)} = -20d_6^{(0)}, \dots$$

Izvod Rombergovog algoritma

Time smo dobili **novi** integracijski niz $I_2^{(1)}, I_4^{(1)}, I_8^{(1)}, \dots$

Njegova je greška

$$I - I_n^{(1)} = \frac{d_4^{(1)}}{n^4} + \frac{d_6^{(1)}}{n^6} + \dots$$

Sličan argument kao i prije možemo upotrijebiti i dalje.

Eliminirajmo **prvi** član pogreške iz $I_n^{(1)}$ i $I_{n/2}^{(1)}$,

$$I - I_{n/2}^{(1)} = \frac{16d_4^{(1)}}{n^4} + \frac{64d_6^{(1)}}{n^6} + \dots,$$

uz uvjet da je funkcija dovoljno glatka i da je n djeljiv s 4.

Tada je

$$16(I - I_n^{(1)}) - (I - I_{n/2}^{(1)}) = \frac{-48d_6^{(1)}}{n^6} + \dots,$$

Izvod Rombergovog algoritma

odnosno

$$I = \frac{16I_n^{(1)} - I_{n/2}^{(1)}}{15} - \frac{-48d_6^{(1)}}{15n^6} + \dots$$

Ponovno, prvi član s desne strane proglasimo za novu aproksimaciju integrala

$$I_n^{(2)} = \frac{16I_n^{(1)} - I_{n/2}^{(1)}}{15}, \quad n \text{ djeljiv s } 4, \quad n \geq 4.$$

Induktivno, nastavljanjem postupka, dobivamo Richardsonovu ekstrapolaciju

$$I_n^{(k)} = \frac{4^k I_n^{(k-1)} - I_{n/2}^{(k-1)}}{4^k - 1}, \quad n \geq 2^k.$$

Izvod Rombergovog algoritma

Pritom je **greška** jednaka

$$\begin{aligned} E_n^{(k)} &= I - I_n^{(k)} = \frac{d_{2k+2}^{(k)}}{n^{2k+2}} + \dots \\ &= \beta_k (b - a) h^{2k+2} f^{(2k+2)}(\xi), \quad a \leq \xi \leq b. \end{aligned}$$

Sada možemo složiti **Rombergovu tablicu**

$$\begin{array}{cccc} I_1^{(0)} & & & \\ I_2^{(0)} & I_2^{(1)} & & \\ I_4^{(0)} & I_4^{(1)} & I_4^{(2)} & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Poredak računanja

Poredak računanja u tablici je sljedeći:

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 2 & 3 & & \\ 4 & 5 & 6 & \cdot \\ 7 & 8 & 9 & \dots \end{array}$$

Iz ocjene greške možemo izvesti **omjere grešaka** u **stupcu** Rombergove tablice, uz pretpostavku dovoljne glatkoće funkcije f . Dobivamo

$$\frac{E_n^{(k)}}{E_{2n}^{(k)}} \approx 2^{2k+2},$$

Omjeri grešaka u Rombergovoj tablici

tj. omjeri pogrešaka u stupcu se moraju ponašati kao

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 4 & 1 & & & & & \\ 4 & 16 & 1 & & & & \\ 4 & 16 & 64 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{array}$$

Puno ilustrativnije od omjera grešaka $E_n^{(k)} / E_{2n}^{(k)} \approx 2^{2k+2}$ je promatranje eksponenta omjera grešaka $2k + 2$,

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & \\ 2 & 4 & 1 & & & & \\ 2 & 4 & 6 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{array}$$

Primjeri za Rombergov algoritam

Omjeri grešaka u Rombergovoj tablici

Pokažimo na primjeru da prethodni omjeri pogrešaka u stupcu vrijede samo ako je funkcija dovoljno glatka.

Primjer. Rombergovim algoritmom s točnošću 10^{-12} nađite vrijednosti integrala

$$\int_0^1 e^x dx, \quad \int_0^1 x^{3/2} dx, \quad \int_0^1 \sqrt{x} dx$$

i pokažite kako se ponašaju omjeri pogrešaka i eksponenti omjera pogrešaka u stupcima.

Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija ima **beskonačno** mnogo **neprekidnih** derivacija na $[0, 1]$, pa bi se računanje integrala moralo ponašati po predviđanju.

Ako uspoređujemo vrijednosti samo “**po dijagonali**” tablice, nakon $2^5 = 32$ podintervala u trapeznoj formuli, dobivamo približnu vrijednost integrala I_5 takvu da je

$$I_5 = 1.71828182845904524$$

$$I = e - 1 = 1.71828182845904524$$

$$I - I_5 = 0.$$

Eksponecijalna funkcija

Omjeri pogrešaka u stupcima su

0	1.0000					
1	3.9512	1.0000				
2	3.9875	15.6517	1.0000			
3	3.9969	15.9913	62.4639	1.0000		
4	3.9992	15.9777	63.6087	249.7197	1.0000	
5	3.9998	15.9944	63.9017	254.4010	1000.5738	1.0000

pa uz malo “kreativnog vida” vidimo da su omjeri prema predviđanju 4, 16, 64, 256, 1024, ...

Eksponencijalna funkcija

Eksponenti omjera pogrešaka su

0	1.0000					
1	1.9823	1.0000				
2	1.9955	3.9682	1.0000			
3	1.9989	3.9920	5.9650	1.0000		
4	1.9997	3.9980	5.9912	7.9642	1.0000	
5	1.9999	3.9995	5.9978	7.9910	9.9666	1.0000

pa ponovno čitamo da su eksponenti omjera pogrešaka
2, 4, 6, 8, 10, ...

Funkcija $x^{3/2}$

Funkcija $f(x) = x^{3/2}$ ima **neograničenu drugu** derivaciju u 0,

- pa bi “**zanimljivo ponašanje**” moralo početi već u **drugom** stupcu Rombergove tablice, jer
- za **trapez** je funkcija **dovoljno glatka** za ocjenu pogreške.

Nakon 2^{15} podintervala u trapeznoj formuli, dobivamo približnu vrijednost

$$I_{15} = 0.400000000000004512$$

$$I = 2/5 = 0.400000000000000000$$

$$I - I_{15} = -0.000000000000004512.$$

Primijetite da je broj intervala poprilično **velik!**

Funkcija $x^{3/2}$

Što je s omjerima pogrešaka?

0	1.0000					
1	3.7346	1.0000				
2	3.8154	5.4847	1.0000			
3	3.8721	5.5912	5.6484	1.0000		
4	3.9112	5.6331	5.6559	5.6566	1.0000	
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	
15	3.9981	5.6569	5.6569	1.0000

Nakon prvog stupca omjeri pogrešaka su se **stabilizirali**.

Funkcija $x^{3/2}$

Bit će nam mnogo lakše provjeriti što se događa, ako napišemo samo **eksponente** omjera pogrešaka.

0	1.0000					
1	1.9010	1.0000				
2	1.9318	2.4554	1.0000			
3	1.9531	2.4832	2.4978	1.0000		
4	1.9676	2.4939	2.4998	2.4999	1.0000	
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	
15	1.9993	2.5000	2.5000	1.0000

Eksponenti omjera pogrešaka od **drugog** stupca nadalje su za točno 1 veći od eksponenta same funkcije (integriramo!).

Funkcija \sqrt{x}

Situacija s funkcijom $f(x) = \sqrt{x}$ mora biti još **gora**, jer ona ima **neograničenu** **prvu** derivaciju u 0 .

Nakon 2^{15} podintervala u trapeznoj formuli, **ne dobivamo** željenu točnost

$$I_{15} = 0.66666665510837633$$

$$I = 2/3 = 0.66666666666666666667$$

$$I - I_{15} = 0.00000001155829033.$$

Funkcija \sqrt{x}

Omjeri pogrešaka u tablici su:

0	1.0000						
1	2.6408	1.0000					
2	2.6990	2.8200	1.0000				
3	2.7393	2.8267	2.8281	1.0000			
4	2.7667	2.8281	2.8284	2.8284	1.0000		
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		
15	2.8271	2.8284	2.8284	1.0000

Funkcija \sqrt{x}

Pripadni eksponenti su

0	1.0000						
1	1.4010	1.0000					
2	1.4324	1.4957	1.0000				
3	1.4538	1.4991	1.4998	1.0000			
4	1.4681	1.4998	1.5000	1.5000	1.0000		
⋮	⋮	⋮			⋮	⋮	
15	1.4993	1.5000	1.5000	1.0000

Produljena trapezna formula još uvijek konvergira, ali konvergencija više nije $O(h^2)$, već samo $O(h^{3/2})$.

Zadaci

U posljednja dva primjera, Rombergovom algoritmu može se “pomoći” tako da **supstitucijom** u integralu dobijemo **glatku** funkciju.

● U oba slučaja, supstitucija je $x = t^2$.

Provjerite što se događa u Rombergovom algoritmu **nakon** ove supstitucije.

Ako u posljednjem integralu promijenimo **granice** integracije

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx$$

što mislite kojoj će se funkciji iz prethodnih primjera **najsličnije** ponašati omjeri pogrešaka?

Druge oznake

U literaturi postoji i drugačija oznaka za aproksimacije integrala u Rombergovoj tablici

$$T_m^{(k)} = \frac{4^m T_{m-1}^{(k+1)} - T_{m-1}^{(k)}}{4^m - 1}.$$

Sama tablica ima oblik

$$\begin{array}{cccc} T_0^{(0)} & & & \\ T_0^{(1)} & T_1^{(0)} & & \\ T_0^{(2)} & T_1^{(1)} & T_2^{(0)} & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Još malo o Rombergovoj tablici

Tvrdnja. Drugi stupac Rombergove tablice odgovara produljenoj **Simpsonovoj** formuli — redom, s $2, 4, 8, 16, \dots$ podintervala.

Nadimo **eksplicitnu** formulu za $I_n^{(1)}$. Ako trapezna formula ima

- n podintervala, onda je pripadni $h = (b - a)/n$,
- $n/2$ podintervala, onda je pripadni $h_1 = 2(b - a)/n = 2h$.

Iz **trapeznih formula** za n i $n/2$ podintervala,

$$I_n^{(0)} = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$$

$$I_{n/2}^{(0)} = \frac{h_1}{2}(f_0 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-2} + f_n),$$

Još malo o Rombergovoj tablici

uvrštavanjem u $I_n^{(1)}$, dobivamo

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &= \frac{4I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(0)}}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) \\ &\quad - \frac{1}{3} \cdot \frac{h_1}{2} (f_0 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + f_n) \\ &= \frac{2h}{3} (f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) \\ &\quad - \frac{h}{3} (f_0 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + f_n) \\ &= \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n), \end{aligned}$$

što je **Simpsonova formula** s n podintervala.

Zadatak

Odgovaraju li ostali stupci u Rombergovoj tablici sljedećim **Newton–Cotesovim** formulama (Simpsonovoj formuli $3/8$, Booleovoj formuli, ...)?

Na sreću, odgovor je **ne**!

U protivnom, Rombergov algoritam **ne bi** konvergirao, recimo, za funkciju **Runge**. Za točnost 10^{-12} , ako uspoređujemo “**dijagonalni dio**” tablice, potrebno je $2^{10} = 1024$ podintervala, a dobiveni rezultat je

$$I_{10} = 2.74680153389003183$$

$$I = 2.74680153389003172$$

$$I - I_{10} = -0.0000000000000000011.$$

Oprez s oscilirajućim funkcijama

Primjer. Korištenjem Rombergovog algoritma izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_0^1 \sin(17\pi x) dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-4} .

Podintegralna funkcija je **relativno brzo oscilirajuća** i ima **17** “**grba**”.

Tablicu ispisujemo **samo** na prvih par decimala (a računamo u punoj točnosti tipa **extended**).

Oprez s oscilirajućim funkcijama

Rombergova tablica:

0	0.0000								
1	0.5000	0.6667							
2	0.6036	0.6381	0.6362						
3	0.6284	0.6367	0.6366	0.6366					
4	-0.0063	-0.2177	-0.2746	-0.2891	-0.2927				
5	0.0283	0.0398	0.0598	0.0622	0.0636	0.0640			
6	0.0352	0.0376	0.0374	0.0371	0.0370	0.0370	0.0370		
7	0.0369	0.0375	0.0374	0.0374	0.0374	0.0375	0.0375	0.0375	

Rezultat (sa svim znamenkama):

$$I_7 = 0.03744821953512704$$

$$I = 0.03744822190397537$$

$$I - I_7 = 0.00000000236884834.$$

Oprez s oscilirajućim funkcijama

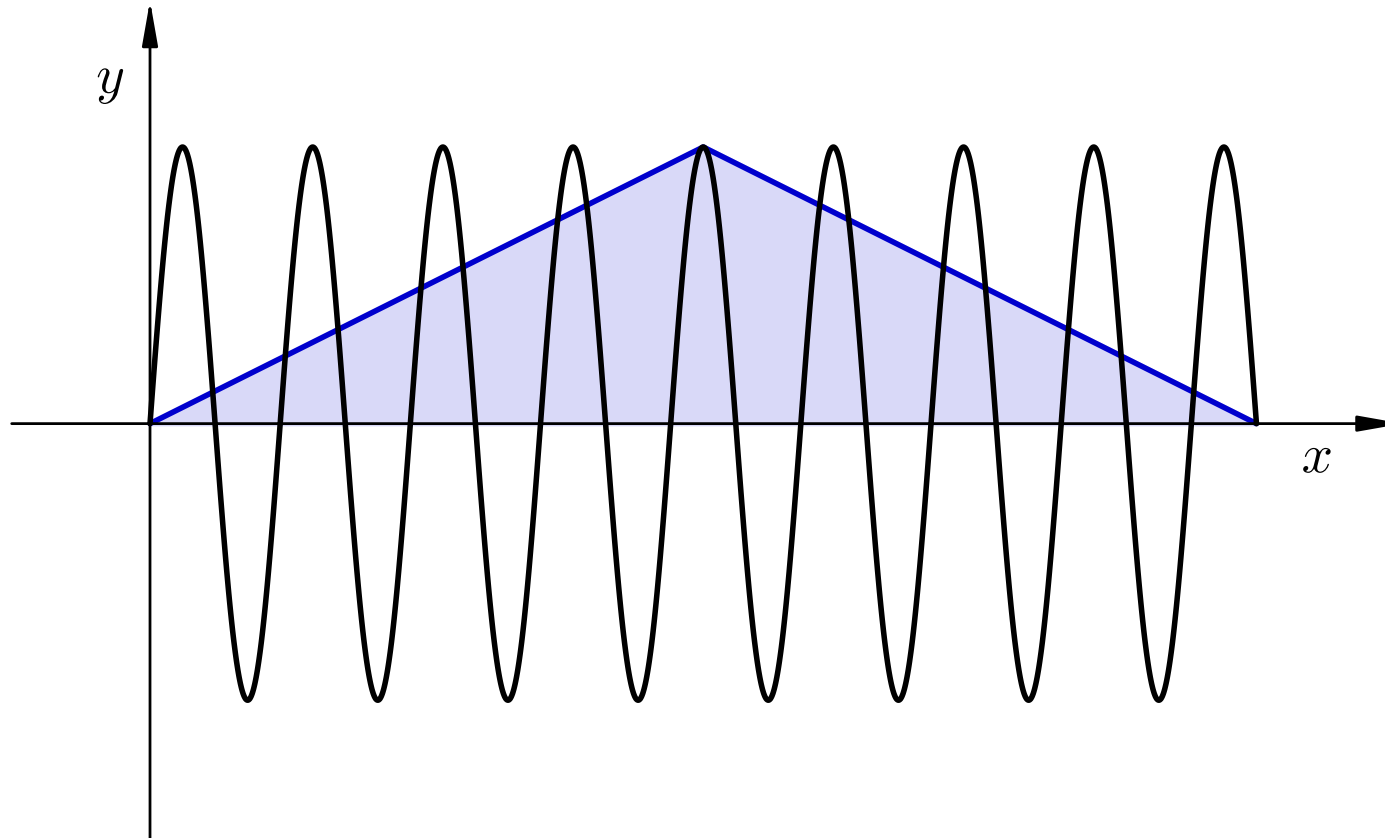
Što je razlog **stabilizacije** oko **jedne**, pa oko **druge** vrijednosti?

- **Nedovoljan** broj podintervala u trapeznoj formuli, koji **ne opisuje** dobro ponašanje funkcije.
- **Rješenje problema**: u svaku “**grbu**” treba staviti **barem nekoliko** točaka.

Sljedeće slike nam to zorno i pokazuju. Tek kad smo stavili **16** točaka u trapeznu formulu,

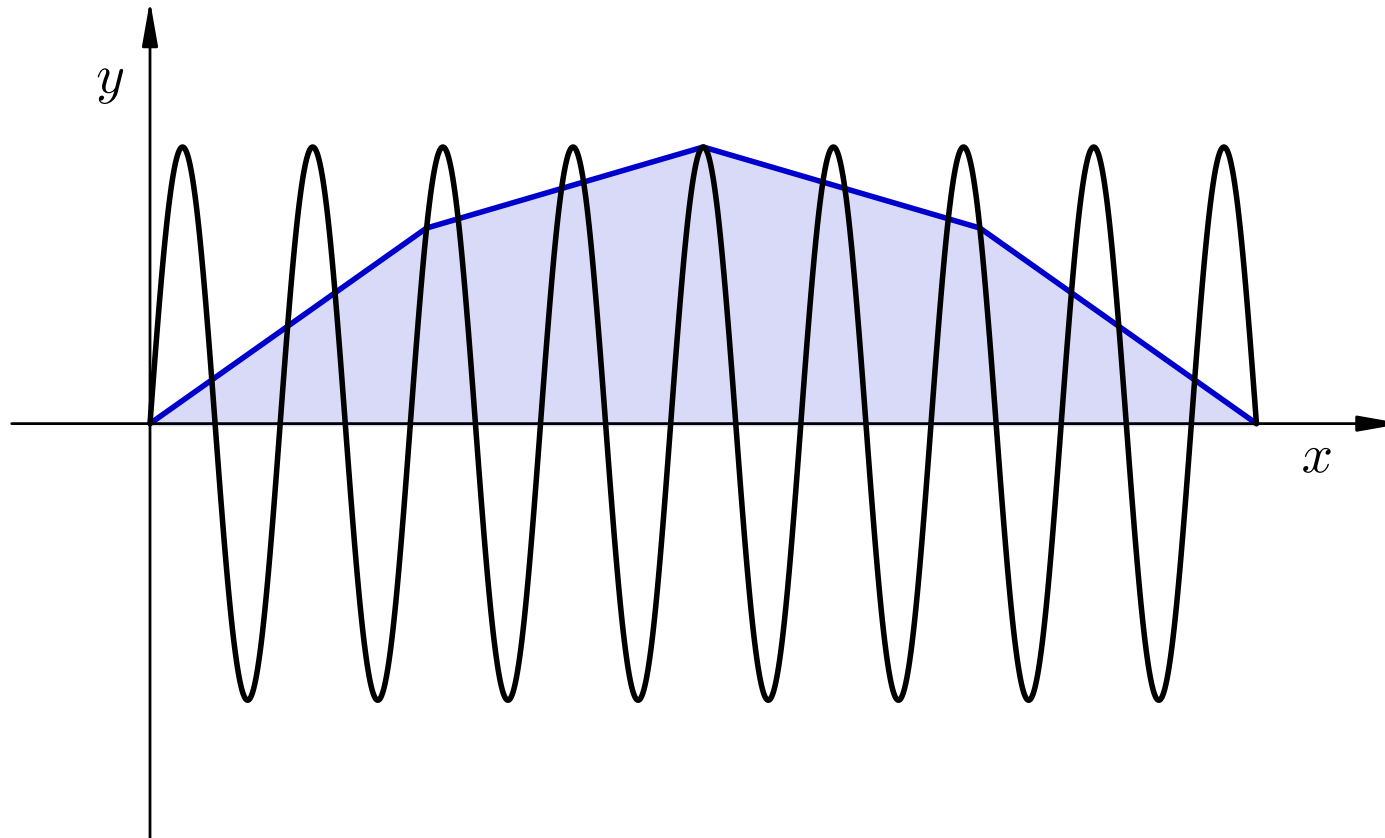
- stavili smo **skoro** jednu točku po grbi
- i trapezna formula je počela “**prepoznavati oblik**” podintegralne funkcije.

Oprez s oscilirajućim funkcijama



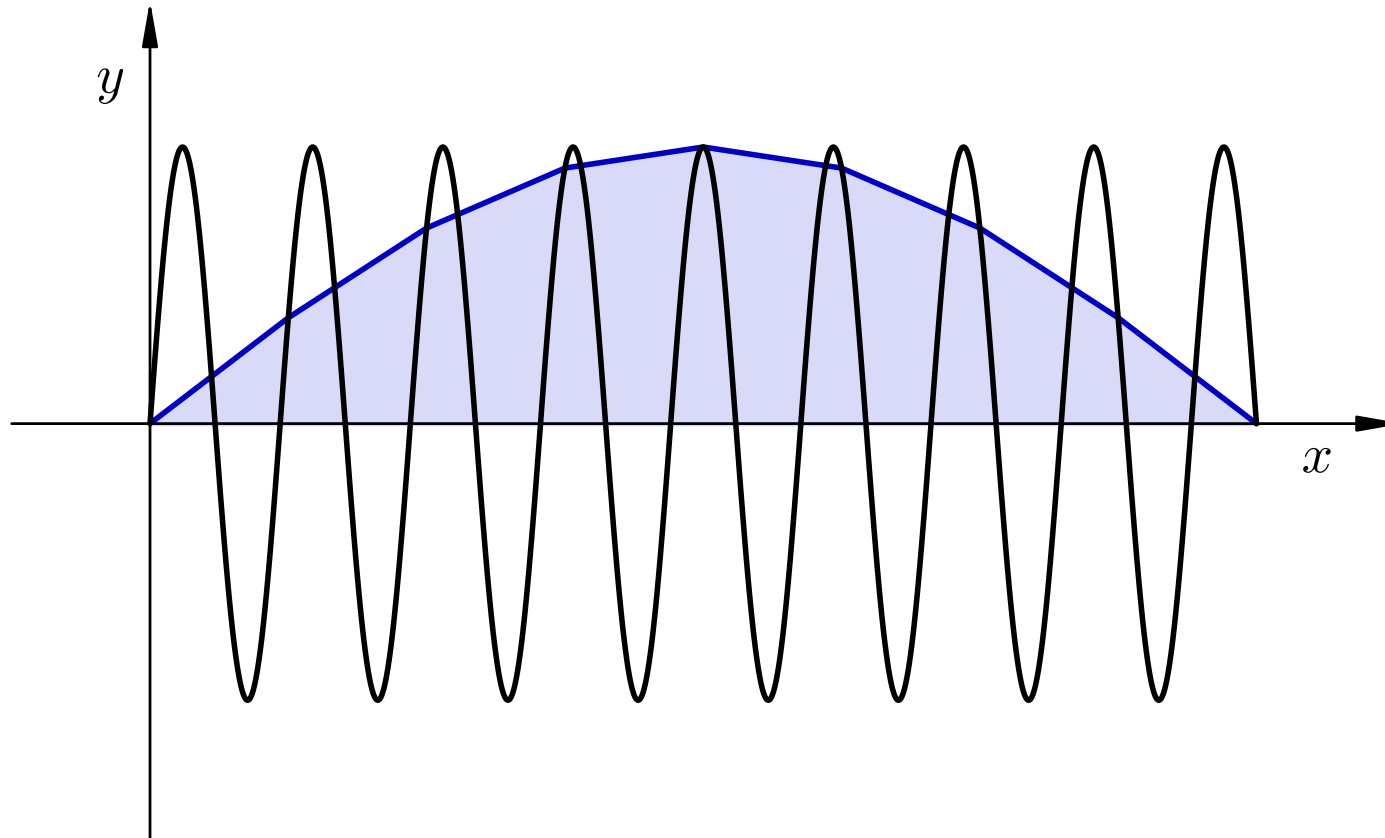
Produljena trapezna formula s 2 podintervala.

Oprez s oscilirajućim funkcijama



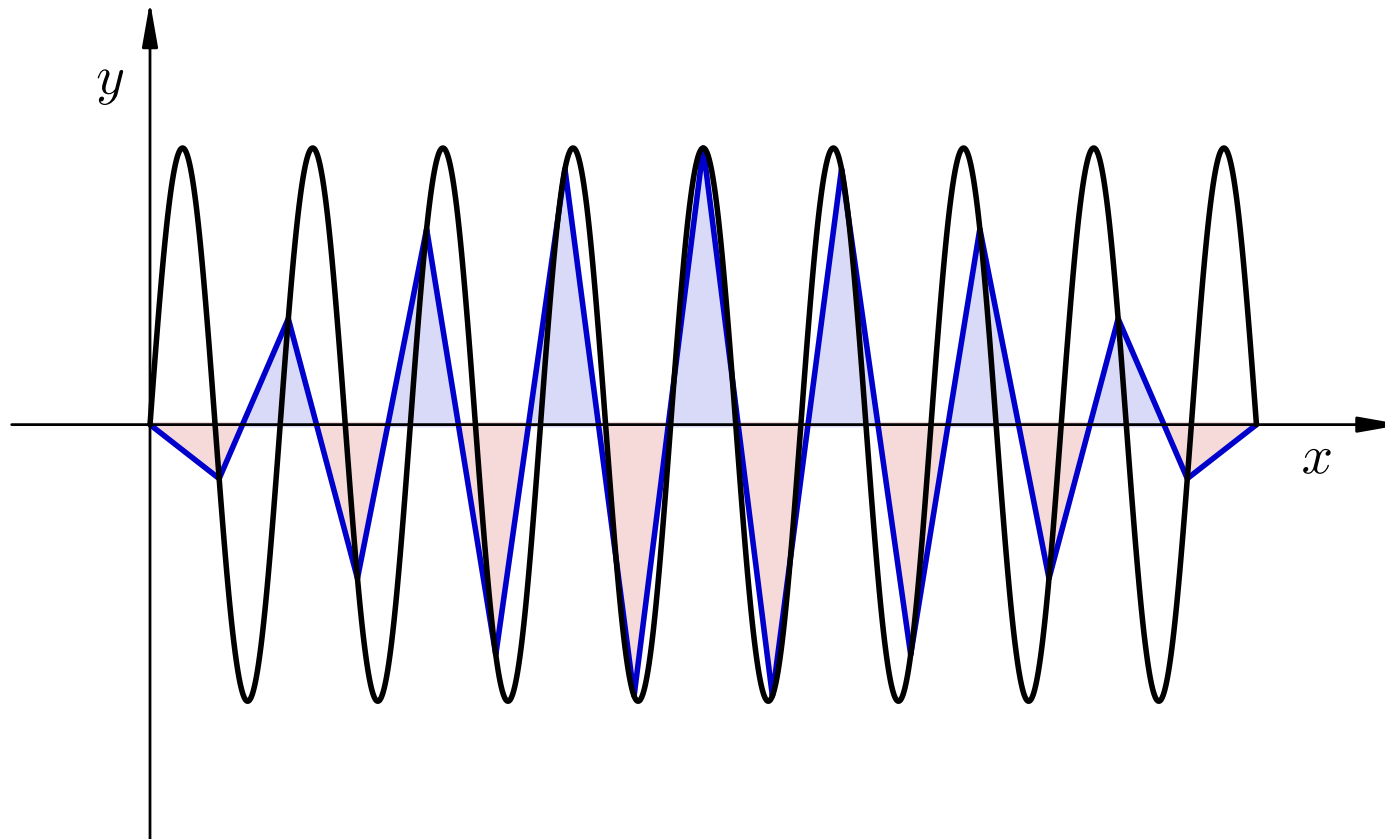
Produljena trapezna formula s 4 podintervala.

Oprez s oscilirajućim funkcijama



Produljena trapezna formula s 8 podintervala.

Oprez s oscilirajućim funkcijama



Produljena trapezna formula sa **16** podintervala.

Zadatak

Korištenjem Rombergovog algoritma izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_0^1 \sin(257\pi x) dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-12} .

Opres, ako u Rombergovom algoritmu

🚫 ne zahtijevate stavljanje dovoljnog broja podintervala, dobiveni rezultat bit će pogrešan!

Trapez može biti brži od Romberga

Primjer. Korištenjem Rombergovog algoritma izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_0^1 e^{\cos(\pi x)} \cos(\pi x) dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-4} .

U ovom primjeru događa se zanimljiv fenomen:

- produljena **trapezna** formula može **brže** izračunati **točan** rezultat nego **Rombergov** algoritam.

Razlog: “**Dobro**” ponašanje produljene **trapezne** formule za **periodičke** funkcije!

Trapez može biti brži od Romberga

Početni dio Rombergove tablice:

0	1.17520119364380146		
1	0.58760059682190073	0.39173373121460049	
2	0.56516070872910212	0.55768074603150258	0.56874388035262938
3	0.56515910399248505	0.56515856908027936	0.56565709061686448
4	0.56515910399248503	0.56515910399248502	0.56515913965329873
5	0.56515910399248503	0.56515910399248503	0.56515910399248503

Crveno označeni brojevi imaju sve znamenke točne.

Rombergov algoritam daje netočniju aproksimaciju

$$I_5 = 0.56515914375273593.$$

Trapez može biti brži od Romberga

Sporost Rombergovog algoritma posljedica je činjenice da

- trapezna formula s **jednim** podintervalom ima **veliku** grešku.
- Budući da ona ulazi u ekstrapolaciju rezultata na “**dijagonali**”, dijagonalni rezultati su **dosta** pogrešni.

Stvarno, za produljenu **trapeznu** formulu **ne vrijedi** isti razvoj pogreške (puno je **točnija** — zbog periodičnosti funkcije f , za koeficijente u **Euler–MacLaurin**ovoj formuli vrijedi $d_{2i} = 0$)!

Rješenje problema:

- usporedimo **susjedne** rezultate u **stupcima** tablice i ako se oni “**slože**” na odgovarajuću točnost, uzmemo ih kao aproksimaciju.