

Numerička matematika

11. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Numerička integracija (nastavak):
 - Integracijske formule visokog stupnja egzaktnosti.
 - Gauss–Christoffel formule.
 - Gauss–Radau formule.
 - Gauss–Lobatto formule.
 - Primjer za težinske Newton–Cotesove i Gaussove formule.
 - Osnovna svojstva Gaussovih formula.
 - Konvergencija Gaussovih formula, simetrija.
 - Gaussove formule i Hermiteova interpolacija.
 - Diskretna ortogonalnost i Gaussove formule.
 - Pregled klasičnih Gaussovih integracijskih formula.

Informacije

Trenutno nema bitnih informacija.

Teorija integracijskih formula — nastavak

Težinske integracijske formule — sažetak

Do sada smo radili **integracijske** formule oblika

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k f(x_k),$$

(ispuštamo gornje indekse m) u kojima su

- **čvorovi** integracije x_0, \dots, x_m bili unaprijed **zadani/fiksni**,
- a **težinske** koeficijente w_0, \dots, w_m određivali smo iz uvjeta **egzaktnosti** na vektorskom prostoru **polinoma** \mathcal{P}_d , što **većeg** stupnja d (tzv. **Newton–Cotesove** formule).

Iz teorema o “interpolacijskim” formulama znamo da za **polinomni** stupanj egzaktnosti d takvih formula vrijedi $d = m$.

Indeks ili red m formule = “očekivani” stupanj egzaktnosti.

Težinske integracijske formule — sažetak

Kod nekih formula (Simpson, srednja točka) dobili smo da je

- za **parne** m , stvarni stupanj egzaktnosti za **jedan veći**, tj. vrijedi $d = m + 1$,

iako se težine **određuju** iz uvjeta **egzaktnosti** na prostoru \mathcal{P}_m .

U nastavku tražimo **integracijske** formule još **višeg** stupnja egzaktnosti — za koje vrijedi $d > m$. To znači da

- neki ili **svi čvorovi** integracije moraju biti “**slobodni**”,
- tako da i **njih** određujemo iz uvjeta **egzaktne** integracije.

Iz tradicionalnih razloga, zbog veze s

- **ortogonalnim** polinomima i njihovim **nultočkama**,
- takve formule se malo **drugačije** označavaju!

Promjena oznaka za integracijske formule

Promjene u oznakama su:

- čvorovi se broje od 1, a ne od 0,
- broj čvorova označava se s n , umjesto $m + 1$.

Težinska integracijska ili kvadratura formula onda ima sljedeći oblik:

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k).$$

- Broj $n \in \mathbb{N}$ zove se red formule = broj čvorova.

Opet ispuštamo gornje indekse n , tj. ne pišemo $w_k^{(n)}$, $x_k^{(n)}$.

Težinska funkcija u integracijskoj formuli

Pretpostavljamo da je **težinska** funkcija w

- **pozitivna** (ili barem **nenegativna**) i **integrabilna** na $[a, b]$.

Ako je interval $[a, b]$ **beskonačan**, moramo osigurati da prethodni integral **postoji**, bar u slučaju kad je

- funkcija f **polinom**, neovisno o stupnju.

To postizemo **zahtjevom** da svi **momenti** težinske funkcije w

$$\mu_k := \int_a^b x^k w(x) dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

postoje (kao integrali) i da su **konačni**.

Takve težinske funkcije w zovemo **polinomno** dopustivima.

Nadalje pretpostavljamo da je w takva!

Interpolacijske težinske kvadrature formule

Uz ove pretpostavke i oznake,

• za bilo kojih n različitih čvorova x_1, \dots, x_n ,
težinska integracijska ili kvadratura formula

$$\int_a^b w(x) f(x) dx \approx I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

ima polinomni stupanj egzaktnosti (barem) $d = n - 1$,

• ako i samo ako je interpolacijska,
tj. dobivena je kao

• egzaktni integral interpolacijskog polinoma za funkciju f
u čvorovima x_1, \dots, x_n .

Težine u interpolacijskim formulama

Ekvivalentno, **polinomni** stupanj egzaktnosti **integracijske** formule I_n je (barem) $d = n - 1$, **ako i samo ako** za **težinske** koeficijente w_k vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x) \ell_k(x) dx, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdje su ℓ_k , za $k = 1, \dots, n$, polinomi **Lagrangeove** baze na mreži čvorova x_1, \dots, x_n (stupanj tih polinoma je sada $n - 1$)

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Napomena: Ovo smo već **dokazali**, samo su oznake **nove!** ■

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Nameće se prirodno pitanje: može li se postići i bolje, tj.

- možemo li dobiti veći stupanj egzaktnosti, $d > n - 1$?

Uočite: Jedina šansa za to je

- “pažljiviji” izbor čvorova integracije x_k .

Naime, čim je $d \geq n - 1$,

- težine w_k su nužno određene prethodnom formulom, pa njih više ne možemo “birati”.

Odgovor je potvrđan i relativno jednostavan!

Za formulaciju rezultata definiramo tzv. polinom čvorova

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k).$$

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Teorem. Neka je ℓ zadani cijeli broj, takav da je $0 \leq \ell \leq n$.

Težinska integracijska formula

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k),$$

ima **polinomni** stupanj egzaktnosti $d = n - 1 + \ell$, **ako i samo ako** je formula **interpolacijska i**, dodatno, vrijedi

- polinom **čvorova** ω_n je **ortogonalan** na **sve** polinome $p \in \mathcal{P}_{\ell-1}$ s težinskom funkcijom w ,

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{\ell-1}.$$

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Dokaz. Iz prošlog teorema znamo da za stupanj **egzaktnosti** vrijedi $d \geq n - 1$, ako i samo ako je formula **interpolacijska**.

● Preostaje pokazati da je $d = n - 1 + \ell$ **ekvivalentno** relaciji **ortogonalnosti** za polinom ω_n .

1. smjer (nužnost): $d = n - 1 + \ell \implies$ **ortogonalnost**.

Neka je $p \in \mathcal{P}_{\ell-1}$ **bilo koji** polinom stupnja najviše $\ell - 1$.

Za **produkt** $f = \omega_n p$ onda vrijedi $\omega_n p \in \mathcal{P}_{n+\ell-1}$.

Zbog pretpostavke $d = n - 1 + \ell$, integracijska formula **egzaktno** integrira polinom $f = \omega_n p$, pa je

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k \omega_n(x_k) p(x_k).$$

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

No, **svi** čvorovi x_k su **nultočke** polinoma čvorova ω_n , tj. vrijedi

$$\omega_n(x_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Onda je

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k \omega_n(x_k) p(x_k) = 0,$$

za **svaki** $p \in \mathcal{P}_{\ell-1}$, što dokazuje prvi smjer.

2. smjer (dovoljnost): **ortogonalnost** $\implies d = n - 1 + \ell$.

Neka je $p \in \mathcal{P}_{n+\ell-1}$ **bilo koji** polinom. Treba pokazati da integracijska formula I_n **egzaktno** integrira polinom p .

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Prvo **podijelimo** p s polinomom čvorova ω_n — po **Euklidovom** teoremu o dijeljenju s ostatkom. Onda je

$$p = q\omega_n + r,$$

gdje je $q \in \mathcal{P}_{\ell-1}$ **kvocijent**, a $r \in \mathcal{P}_{n-1}$ **ostatak**.

Egzaktnom integracijom dobivamo

$$\int_a^b w(x)p(x) dx = \int_a^b w(x)q(x)\omega_n(x) dx + \int_a^b w(x)r(x) dx.$$

Zbog $q \in \mathcal{P}_{\ell-1}$ i pretpostavke **ortogonalnosti**

🔴 **prvi** integral na **desnoj** strani je **nula**.

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Dobivamo da je

$$\int_a^b w(x)p(x) dx = \int_a^b w(x)r(x) dx.$$

No, zbog $r \in \mathcal{P}_{n-1}$ i pretpostavke da je formula **interpolacijska**,
• formula I_n **egzaktno** integrira polinom r .

Zato je

$$\int_a^b w(x)r(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k r(x_k).$$

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Sad uvrstimo $r = p - q\omega_n$. Dobivamo redom

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n w_k r(x_k) &= \sum_{k=1}^n w_k (p(x_k) - q(x_k) \omega_n(x_k)) \\ &= \{ \text{znamo } \omega_n(x_k) = 0, \text{ za } k = 1, \dots, n \} \\ &= \sum_{k=1}^n w_k p(x_k).\end{aligned}$$

Kad “**spojimo**” zadnje **tri** relacije, izlazi

$$\int_a^b w(x)p(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k p(x_k) = I_n(p),$$

pa formula I_n **egzaktno** integrira **sve** polinome $p \in \mathcal{P}_{n+l-1}$. ■

O granicama za stupanj egzaktnosti

Nekoliko komentara na prethodni rezultat.

Relacija ortogonalnosti polinoma čvorova ω_n

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{\ell-1},$$

omogućava povećanje stupnja egzaktnosti formule za ℓ ,

• s $d = n - 1$,

• na $d = n - 1 + \ell$.

Ograničenje $0 \leq \ell \leq n$ u teoremu je prirodno i nužno!

Naime, ova relacija ortogonalnosti postavlja

• točno ℓ dodatnih uvjeta na čvorove x_1, \dots, x_n .

O granicama za stupanj egzaktnosti

Za $\ell = 0$ — **nema** dodatnih ograničenja, jer za **bilo koji** izbor čvorova možemo dobiti $d = n - 1$ (interpolacijska formula).

S druge strane, zbog **nenegativnosti** težinske funkcije w , **mora** biti $\ell \leq n$. **Opravdanje:**

- Polinom čvorova ω_n mora biti **ortogonalan** na sve polinome iz $\mathcal{P}_{\ell-1}$, tj. na polinome stupnja najviše $\ell - 1$.
- Za $\ell > n$, polinom ω_n bi trebao biti **ortogonalan** (barem) na sve polinome iz \mathcal{P}_n , a to znači i na **samog sebe**, što je **nemoguće!**

Dakle, $\ell = n$ je **maksimalno** povećanje stupnja egzaktnosti koje se može postići, a

- **maksimalni** stupanj egzaktnosti je $d_{\max} = 2n - 1$.

Gaussove integracijske formule — $d = 2n - 1$

Integracijske ili kvadraturene formule **maksimalnog** stupnja egzaktnosti $d = 2n - 1$ zovu se

• Gaussove ili Gauss–Christoffelove formule.

Relacija **ortogonalnosti** iz prethodnog teorema, za $\ell = n$, glasi

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

Drugim riječima, polinom čvorova ω_n (stupnja n)

• mora biti **ortogonalan** na **sve** polinome **nižeg** stupnja — do najviše $n - 1$.

No, to **isto** svojstvo zadovoljava i odgovarajući **ortogonalni** polinom p_n , stupnja n , s **težinskom** funkcijom w na $[a, b]$.

Čvorovi u Gaussovim formulama

Znamo da je p_n jednoznačno određen, do na multiplikativnu konstantu.

Ako za p_n uzmemo da ima vodeći koeficijent $A_n = 1$, onda je

$$\omega_n = p_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Zato se formule najvišeg stupnja egzaktnosti obično zovu

• Gaussove formule s težinskom funkcijom w na $[a, b]$.

U Gaussovim formulama, čvorovi x_k su potpuno određeni kao sve nultočke polinoma p_n ,

$$p_n(x_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Sjetite se, te nultočke su realne, jednostruke i leže u otvorenom intervalu (a, b) .

Težine u Gaussovima formulama

Za težine w_k znamo da vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x) \ell_k(x) dx, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdje su ℓ_k , za $k = 1, \dots, n$, polinomi **Lagrangeove** baze na mreži čvorova x_1, \dots, x_n (stupanj od ℓ_k je $n - 1$).

Kod Lagrangeove **interpolacije**, pokazali smo da polinome ℓ_k možemo izraziti preko polinoma čvorova $\omega_n = p_n$ (ranije ω), u obliku

$$\ell_k(x) = \frac{p_n(x)}{(x - x_k) p_n'(x_k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Uočite da **multiplikativna** konstanta u p_n **nije** bitna — **skrati** se, pa možemo uzeti **bilo koju** normalizaciju za polinome p_n .

Težine u Gaussovim formulama

Dobivamo izraz za težine w_k preko ortogonalnih polinoma p_n

$$w_k = \int_a^b w(x) \frac{p_n(x)}{(x - x_k) p'_n(x_k)} dx, \quad k = 1, \dots, n.$$

Prema autoru ove formule, težine w_k u Gaussovim formulama ponekad se zovu i Christoffelovi brojevi.

Navedeni integral se može eksplicitno izračunati! O tome, kao i o ostalim svojstvima Gaussovih formula — malo kasnije.

Prvo, spomenimo još dva tipa integracijskih formula koje se koriste u praksi, a imaju

● visoki, ali ne i maksimalni stupanj egzaktnosti, tj. $l < n$.

Integracijske formule s fiksnim rubovima

Prethodni teorem ima praktične primjene i za $\ell < n$.

U **težinskoj** integracijskoj ili kvadraturnoj formuli

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k).$$

unaprijed **zadamo** $n - \ell$ čvorova integracije u $[a, b]$, a

- **preostalih** ℓ čvorova određujemo tako da dobijemo **maksimalni** mogući stupanj egzaktnosti $d = n - 1 + \ell$.

Ovaj pristup se najčešće koristi za $n - \ell = 1$ i $n - \ell = 2$, a **zadani** čvorovi su

- **jedan** ili **oba ruba** intervala integracije $[a, b]$, s tim da **zadani** rubni čvor mora biti **konačan**.

Gauss–Radau formule — jedan rub, $d = 2n - 2$

Neka je **lijevi** rub intervala — točka a , konačna

• i **zadana** kao čvor integracije $x_1 = a$.

Preostalih $\ell = n - 1$ čvorova određujemo tako da

• dobijemo **maksimalni** stupanj egzaktnosti $d = 2n - 2$.

Ove integracijske formule zovu se **Gauss–Radau** formule.

Prema prethodnom teoremu, pripadni polinom **čvorova**

$$\omega_n(x) = (x - a)(x - x_2) \cdots (x - x_n) =: (x - a) p_{n-1}(x)$$

mora zadovoljavati relaciju **ortogonalnosti** za $\ell = n - 1$

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{n-2}.$$

Gauss–Radau formule — jedan rub, $d = 2n - 2$

To možemo zapisati i ovako

$$\int_a^b w(x) (x - a) p_{n-1}(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{n-2}.$$

Faktor $(x - a)$, koji odgovara fiksnom čvoru $x_1 = a$, ima **fiksni** predznak na $[a, b]$ — **nenegativan** je. Zato ga smijemo

- “izvaditi” iz polinoma čvorova ω_n
- i “dodati” težinskoj funkciji w .

Tako dobivamo “**novu**” težinsku funkciju

$$w_a(x) := (x - a) w(x),$$

koja je, također, **nenegativna** na $[a, b]$.

Gauss–Radau formule — jedan rub, $d = 2n - 2$

Relacija ortogonalnosti sada ima oblik

$$\int_a^b w_a(x) p_{n-1}(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{n-2},$$

gdje je p_{n-1} polinom stupnja $n - 1$.

Slično ranijem, odavde dobivamo sljedeći **zaključak**:

- preostalih $n - 1$ čvorova x_2, \dots, x_n moraju biti nultočke ortogonalnog polinoma p_{n-1} s težinskom funkcijom w_a .

Potpuno isti princip radi i za desni rub b , s faktorom $b - x$.

Ako fiksiramo $x_n = b$, preostali čvorovi x_1, \dots, x_{n-1} moraju biti nultočke ortogonalnog polinoma p_{n-1} s težinskom funkcijom $w_b(x) := (b - x) w(x)$.

Gauss–Lobatto formule — oba ruba, $d = 2n - 3$

Neka su **oba** ruba intervala — točke a i b , konačne

• i **zadane** kao čvorovi integracije $x_1 = a$, $x_n = b$.

Preostala $\ell = n - 2$ čvora određujemo tako da

• dobijemo **maksimalni** stupanj egzaktnosti $d = 2n - 3$.

Ove integracijske formule zovu se **Gauss–Lobatto** formule.

Na potpuno isti način se dokazuje da

• **preostala** $n - 2$ čvora x_2, \dots, x_{n-1} moraju biti nultočke **ortogonalnog** polinoma p_{n-2} s **težinskom** funkcijom $w_{a,b}$,

$$w_{a,b}(x) := (x - a)(b - x) w(x).$$

Napomena: ovo “**transformiranje**” težinske funkcije radi **samo** za čvorove u **rubovima** intervala (**nenegativnost**).

Primjer za težinske formule

Težinska Newton–Cotesova vs. Gaussova f .

Primjer. Napravimo usporedbu

- zatvorene **Newton–Cotesove** formule i
- **Gaussove** formule

s 2 čvora, za **težinsku** funkciju $w(x) = x^{-1/2}$ na intervalu $[0, 1]$.

Težinska funkcija w ima **singularitet** u lijevom rubu $a = 0$, ali je **integrabilna** na $[0, 1]$ — njezin integral je $\mu_0 = 2$.

Tražene integracijske formule glase:

$$\int_0^1 x^{-1/2} f(x) dx \approx \begin{cases} w_1^{NC} f(0) + w_2^{NC} f(1) & \text{(Newton–Cotes),} \\ w_1^G f(x_1) + w_2^G f(x_2) & \text{(Gauss).} \end{cases}$$

Težinska Newton–Cotesova formula

Za Newton–Cotesovu formulu, težine w_1^{NC} i w_2^{NC} možemo izračunati iz eksplicitne formule

$$w_k = \int_a^b w(x) \ell_k(x) dx, \quad k = 1, 2.$$

Lagrangeova baza ℓ_1 i ℓ_2 , za zadane čvorove $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$, jednaka je

$$\ell_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 1}{0 - 1} = 1 - x,$$

$$\ell_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 0}{1 - 0} = x,$$

Težinska Newton–Cotesova formula

pa imamo

$$\begin{aligned}w_1^{NC} &= \int_0^1 x^{-1/2} \ell_1(x) dx = \int_0^1 (x^{-1/2} - x^{1/2}) dx \\ &= \left(2x^{1/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3},\end{aligned}$$

$$w_2^{NC} = \int_0^1 x^{-1/2} \ell_2(x) dx = \int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{2}{3}x^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Ovaj pristup ima smisla **samo** kad se polinomi ℓ_1 i ℓ_2 **lako** računaju, tj. **samo** kad su čvorovi “jednostavni”, poput 0 i 1.

Težinska Newton–Cotesova formula

Obično je puno lakše iskoristiti da Newton–Cotesova formula egzaktno integrira “jednostavnu” bazu prostora polinoma \mathcal{P}_1 .

Uvrštavanjem $f(x) = 1$, dobivamo jednadžbu

$$w_1^{NC} \cdot 1 + w_2^{NC} \cdot 1 = \int_0^1 x^{-1/2} dx = 2,$$

a uvrštavanjem $f(x) = x$, dobivamo jednadžbu

$$w_1^{NC} \cdot 0 + w_2^{NC} \cdot 1 = \int_0^1 x^{-1/2} x dx = \frac{2}{3}.$$

Odmah izlazi

$$w_2^{NC} = \frac{2}{3}, \quad w_1^{NC} = 2 - w_2^{NC} = \frac{4}{3}.$$

Težinska Newton–Cotesova formula

Tražena zatvorena Newton–Cotesova formula glasi:

$$\int_0^1 x^{-1/2} f(x) dx = \frac{4}{3} f(0) + \frac{2}{3} f(1) + E_2^{NC}(f),$$

pri čemu je $E_2^{NC}(f)$ pripadna greška.

Uočite da **korijenski** singularitet težine w u **nuli** uzrokuje da

- vrijednost $f(0)$ dobiva **dvostruko veću** težinu od vrijednosti $f(1)$.

Gaussova formula

Gaussovu formulu najlakše je odrediti preko **ortogonalnih** polinoma. Treba nam **monični** (vodeći koeficijent $A_2 = 1$) **ortogonalni** polinom p_2 , stupnja 2, s težinom $x^{-1/2}$ na $[0, 1]$

$$p_2(x) = x^2 + a_1x + a_0.$$

Taj polinom mora biti **ortogonalan** na polinome **nižeg** stupnja.

☛ Za polinom $q_0(x) = 1$, iz $\langle p_2, q_0 \rangle = 0$, dobivamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 x^{-1/2} p_2(x) dx = \int_0^1 (x^{3/2} + a_1x^{1/2} + a_0x^{-1/2}) dx \\ &= \left(\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}a_1x^{3/2} + 2a_0x^{1/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}a_1 + 2a_0, \end{aligned}$$

Gaussova formula

• Za polinom $q_1(x) = x$, iz $\langle p_2, q_1 \rangle = 0$, dobivamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 x^{-1/2} x p_2(x) dx = \int_0^1 (x^{5/2} + a_1 x^{3/2} + a_0 x^{1/2}) dx \\ &= \left(\frac{2}{7} x^{7/2} + \frac{2}{5} a_1 x^{5/2} + \frac{2}{3} a_0 x^{3/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{7} + \frac{2}{5} a_1 + \frac{2}{3} a_0. \end{aligned}$$

Sustav jednažbi za koeficijente **moničnog** polinoma p_2 je:

$$2a_0 + \frac{2}{3}a_1 = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{5}a_1 = -\frac{2}{7}.$$

Gaussova formula

Rješenje tog sustava je

$$a_1 = -\frac{6}{7}, \quad a_0 = \frac{3}{35},$$

pa je ortogonalni polinom p_2

$$p_2(x) = x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{3}{35}.$$

Čvorovi za Gaussovu integracijsku formulu su nultočke polinoma p_2 :

$$x_1 = \frac{1}{7} \left(3 - 2\sqrt{\frac{6}{5}} \right) \approx 0.11558710999704793517,$$

$$x_2 = \frac{1}{7} \left(3 + 2\sqrt{\frac{6}{5}} \right) \approx 0.74155574714580920769.$$

Gaussova formula

Za računanje težinskih koeficijenata w_1^G i w_2^G , mogli bismo iskoristiti formulu za w_k , kao kod Newton–Cotesove formule.

Međutim, kad imamo čvorove x_1 i x_2 , puno je lakše iskoristiti da Gaussova formula egzaktno integrira bazu polinoma iz \mathcal{P}_1 .

• Za stupanj 0, stavimo $f(x) = 1$, i dobivamo jednadžbu

$$w_1^G + w_2^G = \int_0^1 x^{-1/2} dx = 2,$$

• Za stupanj 1, stavimo $f(x) = x$, i dobivamo jednadžbu

$$w_1^G x_1 + w_2^G x_2 = \int_0^1 x^{-1/2} x dx = \frac{2}{3}.$$

Gaussova formula

Kad uvrstimo **poznate** čvorove x_1, x_2 , rješenje dobivenog linearnog sustava od dvije jednačbe za **težine** w_1^G, w_2^G je

$$w_1^G = 1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}} \approx 1.30429030972509228525,$$

$$w_2^G = 1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}} \approx 0.69570969027490771475.$$

Sada je težina

🔴 w_1^G približno 1.87476 puta **veća** od težine w_2^G .

Gaussova formula

Tražena Gaussova formula glasi:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{-1/2} f(x) dx &= \left(1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}}\right) \cdot f\left(\frac{3}{7} - \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}\right) \\ &+ \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}}\right) \cdot f\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}\right) \\ &+ E_2^G(f), \end{aligned}$$

pri čemu je $E_2^G(f)$ pripadna greška.

Gaussove integracijske formule

Gaussove integracijske formule — ponavljanje

Gaussova integracijska ili kvadratura formula s težinskom funkcijom w na intervalu $[a, b]$ ima oblik

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k),$$

i dostiže **maksimalni** stupanj egzaktnosti $d_{\max} = 2n - 1$.

- Čvorovi x_k su sve **nultočke** ortogonalnog polinoma p_n s težinskom funkcijom w na $[a, b]$,
- Težine w_k su dane formulom (ℓ_k preko p_n i x_k)

$$w_k = \int_a^b w(x) \frac{p_n(x)}{(x - x_k) p_n'(x_k)} dx, \quad k = 1, \dots, n.$$

Čvorovi Gaussovih integracijskih formula

U nastavku, detaljnije analiziramo neka bitna svojstva Gaussovih formula. Samo radi jednostavnosti, dodatno pretpostavljamo da je težinska funkcija w

- pozitivna na cijelom intervalu $[a, b]$, osim eventualno u konačno mnogo točaka (singulariteti dozvoljeni).

Teorem (Svojstva čvorova). Svi čvorovi x_k su realni, različiti i leže unutar otvorenog intervala (a, b) .

Dokaz. Znamo da su čvorovi x_k sve nultočke odgovarajućeg ortogonalnog polinoma p_n s težinskom funkcijom w na $[a, b]$,

$$p_n(x_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Sve tvrdnje o čvorovima direktna su posljedica tvrdnji o nultočkama odgovarajućih ortogonalnih polinoma. ■

Težine Gaussovih integracijskih formula

Integral u formuli za težine w_k može se eksplicitno izračunati.

Teorem (Izrazi za težine). U **Gaussovoj** integracijskoj formuli reda n , za težine w_k vrijede sljedeće dvije relacije

$$w_k = \frac{a_{n-1} \gamma_{n-1}}{p_{n-1}(x_k) p'_n(x_k)} = \frac{-a_n \gamma_n}{p_{n+1}(x_k) p'_n(x_k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dokaz. Treba izračunati integrale za težine

$$w_k = \int_a^b w(x) \frac{p_n(x)}{(x - x_k) p'_n(x_k)} dx. \quad k = 1, \dots, n.$$

Zbog člana $p_n(x)/(x - x_k)$, koristimo **Christoffel–Darbouxov** identitet u x i $y = x_k$, za n (ili za $n + 1$), a zatim integriramo.

Težine Gaussovih integracijskih formula

Fiksiramo indeks k (tj. čvor x_k) i izlučimo broj $p'_n(x_k)$, pa je

$$w_k = \frac{1}{p'_n(x_k)} \int_a^b w(x) \frac{p_n(x)}{x - x_k} dx.$$

Integral računamo iz Christoffel–Darbouxovog identiteta za n , tj. **suma** na lijevoj strani ide do $n - 1$,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{p_j(x)p_j(y)}{\gamma_j} = \frac{p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)}{a_{n-1}\gamma_{n-1}(x - y)}.$$

Uvrstimo $y = x_k$ i iskoristimo da je $p_n(x_k) = 0$, pa dobijemo

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{p_j(x)p_j(x_k)}{\gamma_j} = \frac{p_n(x)p_{n-1}(x_k)}{a_{n-1}\gamma_{n-1}(x - x_k)}.$$

Težine Gaussovih integracijskih formula

Pomnožimo obje strane s $w(x) p_0(x)$ i **integriramo** na $[a, b]$.

Izlazi

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{p_j(x_k)}{\gamma_j} \int_a^b w(x) p_j(x) p_0(x) dx \\ = \frac{p_{n-1}(x_k)}{a_{n-1} \gamma_{n-1}} \int_a^b w(x) p_0(x) \frac{p_n(x)}{x - x_k} dx. \end{aligned}$$

Zbog **ortogonalnosti** polinoma p_j i p_0 , na **lijevoj** strani ostaje samo član za $j = 0$, a pripadni integral je $\|p_0\|^2 = \gamma_0$, tj.

$$\frac{p_0(x_k)}{\gamma_0} \cdot \gamma_0 = \frac{p_{n-1}(x_k)}{a_{n-1} \gamma_{n-1}} \int_a^b w(x) p_0(x) \frac{p_n(x)}{x - x_k} dx.$$

Težine Gaussovih integracijskih formula

Na kraju, znamo da je $p_0(x) = c \neq 0$, pa **skratimo** i tu **konstantu**, tako da na lijevoj strani ostaje 1. Onda je

$$\int_a^b w(x) \frac{p_n(x)}{x - x_k} dx = \frac{a_{n-1} \gamma_{n-1}}{p_{n-1}(x_k)}.$$

Kad ovo uvrstimo u izraz za w_k s početka dokaza, dobijemo **prvu** formulu iz tvrdnje

$$w_k = \frac{1}{p'_n(x_k)} \int_a^b w(x) \frac{p_n(x)}{x - x_k} dx = \frac{a_{n-1} \gamma_{n-1}}{p_{n-1}(x_k) p'_n(x_k)}.$$

Druga izlazi iz **Christoffel–Darbouxovog** identiteta za $n + 1$, ili **tročlane** rekurzije u x_k , pa je $p_{n+1}(x_k) = -c_n p_{n-1}(x_k)$. ■

Težine Gaussovih integracijskih formula

Teorem. U Gaussovoj integracijskoj formuli reda n , za težine vrijedi

$$w_k = \frac{1}{\|\tilde{z}_k\|_2^2} > 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdje je \tilde{z}_k vektor vrijednosti ortonormiranih polinoma u čvoru x_k

$$\tilde{z}_k := \tilde{z}(x_k) = \left[\frac{p_0(x_k)}{\|p_0\|}, \dots, \frac{p_{n-1}(x_k)}{\|p_{n-1}\|} \right]^T \in \mathbb{R}^n.$$

Dokaz. Iz Christoffel–Darbouxovog identiteta (za n) u jednoj točki x_k , dobivamo

$$\|\tilde{z}_k\|_2^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(p_j(x_k))^2}{\gamma_j} = \frac{p'_n(x_k)p_{n-1}(x_k) - p'_{n-1}(x_k)p_n(x_k)}{a_{n-1}\gamma_{n-1}}.$$

Težine Gaussovih formula — pozitivnost

Zbog $p_n(x_k) = 0$, iz prve formule u prošlom teoremu, slijedi

$$\|\tilde{z}_k\|_2^2 = \frac{p_n'(x_k)p_{n-1}(x_k)}{a_{n-1}\gamma_{n-1}} = \frac{1}{w_k}.$$

Nađimo prvu komponentu vektora \tilde{z}_k . Neka je $p_0(x) = c \neq 0$. Onda je

$$\|p_0\|_2^2 = \int_a^b w(x) p_0^2(x) dx = c^2 \int_a^b w(x) dx = c^2 \mu_0,$$

pa je

$$\tilde{z}_{k,1} = p_0(x_k) / \|p_0\| = 1 / \sqrt{\mu_0} > 0.$$

Iz $\|\tilde{z}_k\|_2^2 > 0$ odmah slijedi $w_k > 0$ u Gaussovim formulama. ■

U nastavku, dajemo još jedan dokaz pozitivnosti, zato jer se može lako generalizirati i na neke druge integracijske formule.

Pozitivnost težina u Gaussovima formulama

Teorem (Pozitivnost težina). Sve težine w_k su **pozitivne**.

Dokaz. Neka su l_j , za $j = 1, \dots, n$, polinomi **Lagrangeove** baze na mreži čvorova x_1, \dots, x_n (stupanj od l_j je $n - 1$).

Za polinom l_j u **čvoru** x_k vrijedi

$$l_j(x_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 0, & \text{za } j \neq k, \\ 1, & \text{za } j = k. \end{cases}$$

Uočite da **ista** relacija vrijedi i za **kvadrate** l_j^2 polinoma Lagrangeove baze u **čvorovima** x_k

$$l_j^2(x_k) = l_j(x_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 0, & \text{za } j \neq k, \\ 1, & \text{za } j = k. \end{cases}$$

Pozitivnost težina u Gaussovima formulama

Onda je očito da vrijedi

$$w_j = \sum_{k=1}^n w_k \ell_j(x_k) = \sum_{k=1}^n w_k \ell_j^2(x_k), \quad j = 1, \dots, n.$$

No, polinomi ℓ_j^2 imaju stupanj $2n - 2$, pa ih Gaussova formula integrira **egzaktno!** To znači da je

$$w_j = \sum_{k=1}^n w_k \ell_j^2(x_k) = \int_a^b w(x) \ell_j^2(x) dx > 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

zbog **pozitivnosti** podintegralne funkcije na **desnoj** strani.

Time je dokazana **pozitivnost** svih težina w_k u Gaussovima integracijskim formulama. ■

Pozitivnost težina u formulama s $d = 2n - 2$

Potpuno isti argument **vrijedi** i za

- integracijske formule stupnja egzaktnosti $2n - 2$,
(za **jedan** manjeg nego u **Gausovim** formulama),
- jer **egzaktno** integriraju polinome ℓ_k^2 , za $k = 1, \dots, n$.

Na primjer,

- težine u **Gauss–Radau** formulama su, također, **pozitivne**.

Napomena. Može se pokazati i da su težine u **Gauss–Lobatto** formulama, također, **pozitivne**.

Međutim, dokaz je nešto **složeniji** — ide preko polinoma **kardinalne** baze za pripadnu interpolaciju: rubni čvorovi a i b su **jednostruki**, a ostali čvorovi x_2, \dots, x_{n-2} su **dvostruki**.

Integralne relacije za težine — uz $d \geq 2n - 2$

Prema ranijem teoremu, u svim **interpolacijskim** kvadraturnim formulama, za **težine** w_k vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x) \ell_k(x) dx, \quad k = 1, \dots, n.$$

Iz dokaza **pozitivnosti** težina odmah dobivamo i “**proširenu**” relaciju

$$w_k = \int_a^b w(x) \ell_k(x) dx = \int_a^b w(x) \ell_k^2(x) dx > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Opet, to vrijedi za **težine** w_k u **Gaussovima** formulama ($d = 2n - 1$) i formulama stupnja egzaktnosti $d = 2n - 2$.

Konvergenција Gaussovih formula

Teorem. Ako je $[a, b]$ konačni interval, tada Gaussove formule konvergiraju za bilo koju neprekidnu funkciju f , tj. za svaku funkciju $f \in C[a, b]$ vrijedi

$$E_n(f) \rightarrow 0, \quad \text{za } n \rightarrow \infty.$$

Dokaz se temelji na Weierstrassovom teoremu o uniformnoj aproksimaciji funkcije f polinomima, koji kaže:

Ako je $\hat{p}_{2n-1}(f; \cdot)$ polinom stupnja $\leq 2n - 1$ koji najbolje uniformno aproksimira f na $[a, b]$, onda vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(\cdot) - \hat{p}_{2n-1}(f; \cdot)\|_{\infty} = 0.$$

Za bilo koji $n \in \mathbb{N}$, gledamo grešku Gaussove formule reda n .

Konvergenција Gaussovih formula

Zbog polinomnog stupnja egzaktnosti $d = 2n - 1$, odmah vidimo da je $E_n(\hat{p}_{2n-1}) = 0$. Zatim, redom, dobivamo

$$\begin{aligned} |E_n(f)| &= |E_n(f - \hat{p}_{2n-1})| \\ &= \left| \int_a^b w(x) (f(x) - \hat{p}_{2n-1}(x)) dx - \sum_{k=1}^n w_k (f(x_k) - \hat{p}_{2n-1}(f; x_k)) \right| \\ &\leq \int_a^b w(x) |f(x) - \hat{p}_{2n-1}(x)| dx + \sum_{k=1}^n |w_k| |f(x_k) - \hat{p}_{2n-1}(f; x_k)| \\ &\leq \|f(\cdot) - \hat{p}_{2n-1}(f; \cdot)\|_\infty \left(\int_a^b w(x) dx + \sum_{k=1}^n |w_k| \right). \end{aligned}$$

Konvergenција Gaussovih formula

Sad iskoristimo da su težinski koeficijenti w_k pozitivni u Gaussovim formulama. Zato je $|w_k| = w_k$, odakle slijedi

$$\sum_{k=1}^n |w_k| = \sum_{k=1}^n w_k.$$

Na kraju, uočimo još da je (egzaktna integracija konstante 1)

$$\sum_{k=1}^n w_k = \int_a^b w(x) dx = \mu_0.$$

Iz prethodne formule za ocjenu greške $|E_n(f)|$ zaključujemo

$$|E_n(f)| \leq 2\mu_0 \|f(\cdot) - \hat{p}_{2n-1}(f; \cdot)\|_\infty \rightarrow 0, \quad \text{za } n \rightarrow \infty,$$

što je trebalo dokazati. ■

Ne vrijedi za Newton–Cotesove formule

Ovaj zaključak **ne vrijedi** za Newton–Cotesove formule,

● iako formula s n čvorova **egzaktno** integrira polinom \hat{p}_{n-1} .

Naime, za malo veće n , **težine** w_k mogu biti i **negativne**. Tada još uvijek vrijedi

$$\sum_{k=1}^n w_k = \int_a^b w(x) dx = \mu_0,$$

zbog **egzaktne** integracije **konstante 1**. Međutim, **apsolutne** vrijednosti **težina neograničeno** rastu, kad n raste, tako da

$$\sum_{k=1}^n |w_k| \rightarrow \infty, \quad \text{za } n \rightarrow \infty,$$

a upravo **ova** suma ulazi u ocjenu **greške**.

Simetrija u Gaussovima integracijskim formulama

Pretpostavimo da je **težinska** funkcija w

● **simetrična** na intervalu integracije $[a, b]$.

Za **konačni** interval $[a, b]$, to znači da je w **parna** oko **polovišta** intervala

$$x_0 := \frac{a + b}{2},$$

tj. vrijedi

$$w(x_0 + h) = w(x_0 - h), \quad \text{za } |h| \leq \frac{b - a}{2}.$$

Za **cijeli** \mathbb{R} , to znači da je w **parna** oko **neke** točke $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$w(x_0 + h) = w(x_0 - h), \quad \text{za } h \in \mathbb{R}.$$

Onda su pripadni **ortogonalni** polinomi simetrični (**par–nepar**) i **Gaussove** integracijske formule su, također, **simetrične**.

Simetrija u Gausovim integracijskim formulama

Preciznije, ortogonalni polinomi p_n su parni ili neparni oko x_0 , ovisno o parnosti od n , tj. za svaki $h \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$p_n(x_0 + h) = \begin{cases} p_n(x_0 - h), & n \text{ paran,} \\ -p_n(x_0 - h), & n \text{ neparan.} \end{cases}$$

U Gaussovoj integracijskoj formuli reda n ,

- čvorovi x_k su simetrični obzirom na x_0 ,
- za simetrični par čvorova, težine w_k su jednake.

Ako čvorove poredamo uzlazno, $x_1 < \dots < x_n$, onda vrijedi

$$\frac{x_k + x_{n+1-k}}{2} = x_0, \quad w_k = w_{n+1-k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Gaussove formule i Hermiteova interpolacija

Integracija i interpolacija — ponavljanje

Vidjeli smo da se **Newton–Cotesove** formule mogu dobiti

- integracijom **Lagrangeovog** interpolacijskog polinoma za funkciju f na (zadanoj) mreži čvorova x_1, \dots, x_n .

Tu činjenicu smo onda iskoristili za

- nalaženje i ocjenu **greške** integracijske formule.

Na sličan način, i **Gaussove** formule mogu se dobiti

- integracijom **Hermiteovog** interpolacijskog polinoma za funkciju f na mreži čvorova x_1, \dots, x_n ,
- uz **dodatni** zahtjev da **koeficijenti** uz članove s **derivacijama** budu jednaki **nula** — to će **odrediti** čvorove.

Nakon dokaza, to ćemo iskoristiti za nalaženje **greške** **Gaussove** integracije.

Hermiteova interpolacija — ponavljanje

Hermiteov interpolacijski polinom za funkciju f na mreži čvorova x_1, \dots, x_n ,

- interpolira vrijednosti **funkcije** i njezine **derivacije** u čvorovima ($2n$ uvjeta),

pa, općenito, ima **stupanj** $2n - 1$.

To odgovara stupnju **egzaktnosti** $d = 2n - 1$ za **Gaussove** integracijske formule, pa cijeli pristup ima smisla.

Za početak, **ponovimo** osnovne činjenice o **Hermiteovoj** interpolaciji,

- s **promijenjenim** oznakama, jer čvorove sad brojimo od 1 , a ne od 0 .

Hermiteova interpolacija — ponavljanje

Neka su x_1, \dots, x_n međusobno različite točke. Ove točke interpretiramo kao

• dvostruke čvorove interpolacije za zadanu funkciju f .

Uvedimo još skraćene oznake za vrijednosti funkcije f i njezine derivacije f' u čvorovima:

$$f_k := f(x_k), \quad f'_k = f'(x_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Raniji rezultat o Hermiteovoj interpolaciji sada ima oblik:

Teorem. Postoji jedinstveni polinom $h_{2n-1} \in \mathcal{P}_{2n-1}$, stupnja najviše $2n - 1$, koji zadovoljava interpolacijske uvjete

$$h_{2n-1}(x_k) = f_k, \quad h'_{2n-1}(x_k) = f'_k, \quad k = 1, \dots, n.$$



Hermiteova interpolacija — ponavljanje

Ovaj polinom h_{2n-1} možemo prikazati u tzv. **Hermiteovoj** bazi na mreži čvorova x_1, \dots, x_n , kao linearnu kombinaciju

$$h_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^n (f_k h_{k,0}(x) + f'_k h_{k,1}(x)),$$

gdje su $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$, za $k = 1, \dots, n$, polinomi **Hermiteove** baze, **definirani** relacijama

$$h_{k,0}(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{za } j \neq k, \\ 1, & \text{za } j = k, \end{cases} \quad h'_{k,0}(x_j) = 0,$$

$$h_{k,1}(x_j) = 0, \quad h'_{k,1}(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{za } j \neq k, \\ 1, & \text{za } j = k. \end{cases}$$

Hermiteova interpolacija — ponavljanje

Polinome **Hermiteove** baze možemo eksplicitno izraziti u obliku

$$h_{k,0}(x) = [1 - 2(x - x_k)\ell'_k(x_k)] \ell_k^2(x)$$

$$h_{k,1}(x) = (x - x_k) \ell_k^2(x),$$

gdje je ℓ_k odgovarajući polinom **Lagrangeove** baze na mreži čvorova x_1, \dots, x_n , za $k = 1, \dots, n$.

Budući da je ℓ_k polinom stupnja $n - 1$, onda

• su $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ polinomi stupnja $2n - 1$.

Ako su točke x_1, \dots, x_n međusobno **različite**, onda su polinomi

• ℓ_k , za $k = 1, \dots, n$, — **baza** u prostoru \mathcal{P}_{n-1} ,

• $h_{k,0}, h_{k,1}$, za $k = 1, \dots, n$, — **baza** u prostoru \mathcal{P}_{2n-1} .

Greška Hermiteove interpolacije — ponavljanje

Za funkciju greške Hermiteove interpolacije

$$e_h(x) := f(x) - h_{2n-1}(x),$$

u svakom čvoru x_k , očito, vrijedi

$$e_h(x_k) = 0, \quad e'_h(x_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dakle, greška e_h ima dvostruke nultočke u točkama x_1, \dots, x_n .

Pripadni polinom čvorova ω_h za Hermiteovu interpolaciju je

$$\omega_h(x) = (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 = \omega_n^2(x),$$

gdje je ω_n polinom čvorova za Lagrangeovu interpolaciju na istoj mreži.

U novim oznakama, za grešku vrijedi sljedeći rezultat.

Greška Hermiteove interpolacije — ponavljanje

Teorem. Neka su $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ međusobno različite točke i neka je e_h greška Hermiteovog interpolacijskog polinoma h_{2n-1} za funkciju f na mreži čvorova x_1, \dots, x_n . Onda je

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n-1}(x) = \omega_n^2(x) f[x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_n, x_n, x].$$

Ako $f^{(2n)}$ postoji na $[a, b]$, onda za svaku točku $x \in [a, b]$, postoji točka $\xi \in [a, b]$, takva da je

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n-1}(x) = \omega_n^2(x) \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}.$$

Znamo da za ξ vrijedi i jača ocjena $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$, gdje je

$$x_{\min} := \min\{x, x_1, \dots, x_n\}, \quad x_{\max} := \max\{x, x_1, \dots, x_n\},$$

ali nam to neće trebati za Gaussovu integraciju.

Integral Hermiteovog interpolacijskog polinoma

Integracijom **Hermiteovog** interpolacijskog polinoma

$$h_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^n (f_k h_{k,0}(x) + f'_k h_{k,1}(x)),$$

dobivamo “**novu**” **integracijsku formulu** oblika

$$I'_n := \int_a^b w(x) h_{2n-1}(x) dx = \sum_{k=1}^n (w_k f_k + w'_k f'_k),$$

gdje je

$$w_k = \int_a^b w(x) h_{k,0}(x) dx, \quad w'_k = \int_a^b w(x) h_{k,1}(x) dx,$$

za $k = 1, \dots, n$. Naime, f_k i f'_k su **brojevi** i **ne ovise** o x .

Integral Hermiteovog interpolacijskog polinoma

Težinske koeficijente w_k i w'_k možemo napisati i tako da

- uvrstimo izraze za polinome $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ Hermiteove baze,
- u terminima polinoma l_k Lagrangeove baze.

Dobivamo sljedeće formule za težine u integracijskoj formuli I'_n

$$w_k = \int_a^b w(x) [1 - 2(x - x_k)l'_k(x_k)] l_k^2(x) dx,$$

$$w'_k = \int_a^b w(x) (x - x_k) l_k^2(x) dx,$$

za $k = 1, \dots, n$.

Integracijske formule s derivacijama u čvorovima

Ovakve **integracijske** formule

$$I'_n := \int_a^b w(x) h_{2n-1}(x) dx = \sum_{k=1}^n \left(w_k f_k + w'_k f'_k \right),$$

“slične” na **Gaussove** integracijske formule, osim što imaju

- **dodatne** članove $w'_k f'_k$, u kojima se koriste i **derivacije** funkcije f u **čvorovima** integracije x_k .

Kad bi, kao u **Newton–Cotesovim** formulama,

- svi **čvorovi** x_k bili unaprijed **zadani**,

iz uvjeta **egzaktne** integracije polinoma trebalo bi odrediti

- $2n$ parametara — **težinske** koeficijente w_k i w'_k .

Integracijske formule s derivacijama u čvorovima

Očekujemo da ovakva formula I'_n **egzaktno** integrira polinome do stupnja $2n - 1$ (dimenzija prostora je $2n$).

Zaista, **uvjeti egzaktne** integracije na bazi prostora \mathcal{P}_{2n-1} daju

- **regularni** linearni sustav, reda $2n$, za **težine**.

To je očito, jer **formule** za **težine** već imamo. Osim toga,

- **integracijska** formula je dobivena “**interpolacijski**” — na **Hermiteovoj** bazi prostora \mathcal{P}_{2n-1} .

Dakle, stupanj **egzaktnosti** formule I'_n je sigurno $d = 2n - 1$.

Uz pretpostavku dovoljne **glatkoće** funkcije f ,

- **jednostavno** se izvodi i **greška** integracijske formule I'_n ,
- direktno iz **greške Hermiteovog** interpolacijskog polinoma.

Greška formule I'_n s derivacijama u čvorovima

Sasvim općenito, za integracijske formule I'_n vrijedi

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = I'_n(f) + E'_n(f),$$

gdje je $E'_n(f)$ **greška** te formule za zadanu funkciju f .

Integracijsku formulu $I'_n(f)$ dobili smo “**interpolacijski**”, kao

- **egzaktni** integral **Hermiteovog** interpolacijskog polinoma h_{2n-1} za funkciju f na mreži čvorova x_1, \dots, x_n ,

$$I'_n(f) := \int_a^b w(x) h_{2n-1}(x) dx = \sum_{k=1}^n \left(w_k f_k + w'_k f'_k \right).$$

Greška formule I'_n s derivacijama u čvorovima

Greška $E'_n(f)$ integracijske formule $I'_n(f)$ je

$$E'_n(f) = \int_a^b w(x)(f(x) - h_{2n-1}(x)) dx = \int_a^b w(x)e_h(x) dx,$$

tj. $E'_n(f)$ je integral greške e_h interpolacijskog polinoma h_{2n-1} ,

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n-1}(x) = \omega_n^2(x) g(x),$$

gdje je

$$g(x) = f[x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_n, x_n, x].$$

Funkcija g je korektno definirana na $[a, b]$, čim f'' postoji u čvorovima. Ako je f još i neprekidna na $[a, b]$, onda je i funkcija g neprekidna na $[a, b]$.

Greška formule I'_n s derivacijama u čvorovima

Kad to uvrstimo u izraz za grešku $E'_n(f)$, dobivamo

$$E'_n(f) = \int_a^b w(x) e_h(x) dx = \int_a^b w(x) \omega_n^2(x) g(x) dx.$$

Nadalje, očito je

$$w(x) \omega_n^2(x) \geq 0, \quad \text{za svaki } x \in [a, b],$$

pa možemo iskoristiti teorem srednje vrijednosti za integrale s težinama. Izlazi

$$E'_n(f) = g(\eta) \int_a^b w(x) \omega_n^2(x) dx,$$

za neki η iz $[a, b]$. Ovo vrijedi uz vrlo blage pretpostavke na f !

Greška formule I'_n s derivacijama u čvorovima

Ako $f^{(2n)}$ postoji na $[a, b]$, onda postoji $\zeta \in [a, b]$ za kojeg je

$$E'_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \int_a^b w(x) \omega_n^2(x) dx.$$

Integral na desnoj strani ovisi samo o čvorovima x_1, \dots, x_n , i treba ga eksplicitno izračunati za zadani raspored čvorova.

Iz oba oblika greške integracijske formule I'_n , odmah vidimo da je stupanj egzaktnosti jednak $d = 2n - 1$.

Međutim, za praktičnu primjenu formule I'_n , trebamo znati

- ne samo funkcijske vrijednosti $f(x_k)$ u čvorovima,
- već i vrijednosti derivacije $f'(x_k)$ u tim čvorovima.

Put prema Gaussovim integracijskim formulama

Zato je ideja da probamo **izbjeći** korištenje **derivacija**,

• tako da **izborom** čvorova x_k

• **poništimo** sve težinske koeficijente w'_k uz **derivacije** f'_k .

Ako to “ide”, tj. **ako** je $w'_k = 0$, za $k = 1, \dots, n$, dobili bismo

$$I'_n = \int_a^b w(x) h_{2n-1}(x) dx = \sum_{k=1}^n \left(w_k f_k + w'_k f'_k \right) = \sum_{k=1}^n w_k f_k.$$

Stupanj **egzaktnosti** ove “**specijalne**” integracijske formule I'_n mora ostati **isti** — $d = 2n - 1$. No, **tako** dobivena formula

• koristila bi **samo funkcijske** vrijednosti f_k u **čvorovima**, tj. postala bi **Gaussova** integracijska formula I_n .

Gaussove formule kao interpolacijske formule

To se **može** postići! Sljedeći rezultat govori o tome **kako** treba izabrati **čvorove** x_k .

Teorem. U integracijskoj formuli I'_n vrijedi

$$w'_k = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

tj. I'_n je **Gaussova** integracijska formula, **ako i samo ako** je polinom **čvorova**

$$\omega_n := (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

ortogonalan na **sve** polinome **nižeg** stupnja, tj. vrijedi

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

Gaussove formule kao interpolacijske formule

Dokaz. Koristimo eksplicitni izraz za težine u formuli I'_n

$$w'_k = \int_a^b w(x) (x - x_k) \ell_k^2(x) dx, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdje su ℓ_k , za $k = 1, \dots, n$, polinomi **Lagrangeove** baze na mreži čvorova x_1, \dots, x_n .

Ove polinome možemo izraziti preko polinoma **čvorova** ω_n

$$\ell_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k) \omega'_n(x_k)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

pa je

$$(x - x_k) \ell_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Gaussove formule kao interpolacijske formule

Kad tu formulu uvrstimo u izraz za težine, dobivamo

$$w'_k = \frac{1}{\omega'_n(x_k)} \int_a^b w(x) \omega_n(x) \ell_k(x) dx, \quad k = 1, \dots, n,$$

1. smjer (nužnost): svi $w'_k = 0 \implies$ ortogonalnost.

Ako je

$$w'_k = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

odmah vidimo da je ω_n ortogonalan na sve polinome ℓ_k , za $k = 1, \dots, n$. No, ti polinomi čine bazu prostora \mathcal{P}_{n-1} , pa je

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

Gaussove formule kao interpolacijske formule

2. smjer (dovoljnost): ortogonalnost \implies svi $w'_k = 0$.

Ako je ω_n ortogonalan na sve polinome $p \in \mathcal{P}_{n-1}$, onda to vrijedi i za polinome Lagrangeove baze, tj. za $p = \ell_k$, pa je

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) \ell_k(x) dx = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Oдавде odmah slijedi i

$$w'_k = \frac{1}{\omega'_n(x_k)} \int_a^b w(x) \omega_n(x) \ell_k(x) dx = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$



Gaussove formule kao interpolacijske formule

Prema očekivanju, dobivamo **isti** zaključak kao i ranije.

Integracijska formula oblika I'_n je **Gaussova** integracijska formula I_n , **ako i samo ako** su **čvorovi** x_k , upravo,

- sve **nultočke** odgovarajućeg **ortogonalnog** polinoma p_n , stupnja n , s **težinskom** funkcijom w na $[a, b]$.

Pripadni polinom **čvorova** ω_n mora biti jednak

- polinomu p_n s **vodećim** koeficijentom $A_n = 1$.

Time smo još jednom dokazali **egzistenciju** i **jedinstvenost** **Gaussovih** integracijskih formula, za zadanu težinsku funkciju w na $[a, b]$.

Usput, dobivamo i **grešku** za **Gaussove** integracijske formule!

Greška Gaussovih integracijskih formula

Teorem. Neka je $I_n(f)$ Gaussova integracijska formula reda n , s težinskom funkcijom w na $[a, b]$

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k).$$

Ako $f^{(2n)}$ postoji na $[a, b]$, onda postoji $\zeta \in [a, b]$ za kojeg je

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \int_a^b w(x) p_n^2(x) dx,$$

gdje je p_n ortogonalni polinom stupnja n ,

• s vodećim koeficijentom $A_n = 1$,

uz težinsku funkciju w na $[a, b]$.

Greška Gaussovih integracijskih formula

Dokaz. Znamo da je $I_n(f) = I'_n(f)$ ako i samo ako je

- pripadni polinom **čvorova** ω_n jednak
- **ortogonalnom** polinomu p_n s **vodećim** koeficijentom $A_n = 1$.

Tvrdnja izlazi direktno iz formule za **grešku** odgovarajuće integracijske formule $I'_n(f)$, s tim da je $\omega_n = p_n$. ■

Formulu za **grešku** Gaussove integracijske formule reda n

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \int_a^b w(x) p_n^2(x) dx$$

možemo i drugačije zapisati.

Greška Gaussovih integracijskih formula

Integral na desnoj strani je kvadrat norme polinoma p_n s vodećim koeficijentom $A_n = 1$, pa je

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \int_a^b w(x) p_n^2(x) dx = \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \|p_n\|^2.$$

U principu, za zadane w i $[a, b]$,

- $\|p_n\|^2$ se može eksplicitno izračunati i ovisi samo o n (v. malo kasnije, za klasične Gaussove formule).

Ako koristimo p_n za kojeg je $A_n \neq 1$, formula za grešku se trivijalno mijenja

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \cdot \frac{\|p_n\|^2}{A_n^2}.$$

Pozitivnost težina u Gaussovima formulama

Na kraju, iz općih izraza za težine u integracijskoj formuli I'_n , jednostavno se dokazuje i

- pozitivnost težina w_k u Gaussovima integracijskim formulama.

Za težine u formuli I'_n vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x) [1 - 2(x - x_k)l'_k(x_k)] l_k^2(x) dx,$$

$$w'_k = \int_a^b w(x) (x - x_k) l_k^2(x) dx, \quad k = 1, \dots, n.$$

U izrazu za w_k iskoristimo relaciju za w'_k .

Pozitivnost težina u Gaussovima formulama

Težine w_k onda možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}w_k &= \int_a^b w(x) [1 - 2(x - x_k)l'_k(x_k)] l_k^2(x) dx \\ &= \int_a^b w(x) l_k^2(x) dx - 2l'_k(x_k)w'_k.\end{aligned}$$

U Gaussovima formulama je $w'_k = 0$, pa izlazi poznata formula

$$w_k = \int_a^b w(x) l_k^2(x) dx > 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

zbog pozitivnosti podintegralne funkcije na desnoj strani. ■

Diskretna ortogonalnost i Gaussove integracijske formule

Matrica kod Gaussove formule reda n

Neka su x_k čvorovi, a w_k težine, u Gaussovoj integracijskoj formuli reda n , s težinskom funkcijom w na intervalu $[a, b]$.

Toj formuli pridružimo matricu Z_n , reda n , zadanu stupcima

$$Z_n := [\tilde{z}_1 \ \dots \ \tilde{z}_n],$$

gdje je $\tilde{z}_k =$ vektor vrijednosti pripadnih ortonormiranih polinoma u čvoru x_k

$$\tilde{z}_k := \tilde{z}(x_k) = \left[\frac{p_0(x_k)}{\|p_0\|}, \dots, \frac{p_{n-1}(x_k)}{\|p_{n-1}\|} \right]^T \in \mathbb{R}^n.$$

Matricu Z_n smo već spominjali

🔴 kod Christoffel–Darbouxovog identiteta.

Elementi matrice Z_n

Elementi matrice Z_n su (redove brojimo od 0 do $n - 1$)

$$[Z_n]_{jk} = \frac{p_j(x_k)}{\|p_j\|}, \quad j = 0, \dots, n - 1, \quad k = 1, \dots, n,$$

ili

$$Z_n = \begin{bmatrix} \frac{p_0(x_1)}{\|p_0\|} & \frac{p_0(x_2)}{\|p_0\|} & \dots & \frac{p_0(x_n)}{\|p_0\|} \\ \frac{p_1(x_1)}{\|p_1\|} & \frac{p_1(x_2)}{\|p_1\|} & \dots & \frac{p_1(x_n)}{\|p_1\|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{p_{n-1}(x_1)}{\|p_{n-1}\|} & \frac{p_{n-1}(x_2)}{\|p_{n-1}\|} & \dots & \frac{p_{n-1}(x_n)}{\|p_{n-1}\|} \end{bmatrix} \cdot$$

Svojstva matrice Z_n

Znamo da su stupci \tilde{z}_k međusobno **ortogonalni**, tj. vrijedi

$$\langle \tilde{z}_k, \tilde{z}_\ell \rangle_n = 0, \quad \text{za } k \neq \ell,$$

gdje $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ označava “obični” skalarni produkt u \mathbb{R}^n .

Nadalje, za **Euklidske** norme stupaca \tilde{z}_k vrijedi

$$\|\tilde{z}_k\|_2^2 = \frac{1}{w_k}, \quad \text{odnosno,} \quad \|\tilde{z}_k\|_2 = \frac{1}{\sqrt{w_k}}.$$

Definiramo **dijagonalnu** matricu D_n na sljedeći način

$$D_n := \text{diag}(\sqrt{w_1}, \sqrt{w_2}, \dots, \sqrt{w_n}).$$

Njezini elementi su **inverzi** normi stupaca matrice Z_n .

Ortogonalna matrica V_n

Zatim definiramo produkt

$$V_n := Z_n D_n = Z_n \cdot \text{diag}(\sqrt{w_1}, \sqrt{w_2}, \dots, \sqrt{w_n}).$$

Stupci matrice V_n su vektori v_k oblika

$$v_k := \sqrt{w_k} \tilde{z}_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

odakle odmah slijedi da su ti stupci **ortonormirani**, tj. vrijedi

$$\langle v_k, v_\ell \rangle_n = 0, \quad \text{za } k \neq \ell, \quad \|v_k\|_2 = 1.$$

Drugim riječima, V_n je **ortogonalna** matrica ($V_n^* V_n = I_n$).

No, onda V_n mora imati i **ortonormirane retke** ($V_n V_n^* = I_n$).

- To su relacije tzv. **diskretne ortogonalnosti** ortogonalnih polinoma p_0, \dots, p_{n-1} , u **nultočkama** polinoma p_n .

Ortogonalnost redaka = diskretna ortogonalnost

Elementi matrice V_n su (redove brojimo od 0 do $n - 1$)

$$[V_n]_{jk} = \sqrt{w_k} \frac{p_j(x_k)}{\|p_j\|}, \quad j = 0, \dots, n - 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Za skalarni produkt i -tog i j -tog retka dobivamo

$$\sum_{k=1}^n [V_n]_{ik} \cdot [V_n]_{jk} = \sum_{k=1}^n \sqrt{w_k} \frac{p_i(x_k)}{\|p_i\|} \cdot \sqrt{w_k} \frac{p_j(x_k)}{\|p_j\|} = \delta_{ij}.$$

Kad sredimo ovaj izraz i uvažimo $\delta_{ij} = 0$ za $i \neq j$, izlazi

$$\sum_{k=1}^n w_k p_i(x_k) p_j(x_k) = \|p_i\| \cdot \|p_j\| \cdot \delta_{ij} = \|p_j\|^2 \cdot \delta_{ij}.$$

Diskretna ortogonalnost vrijedi za sve parove indeksa $i, j < n$.

Diskretna ort. = egzaktnost Gaussove formule

Polinomi p_i i p_j pripadaju sustavu **ortogonalnih** polinoma, tj. $\langle p_i, p_j \rangle = \|p_j\|^2 \cdot \delta_{ij}$, pa za **desnu** stranu vrijedi

$$\sum_{k=1}^n w_k p_i(x_k) p_j(x_k) = \langle p_i, p_j \rangle = \int_a^b w(x) p_i(x) p_j(x) dx,$$

gdje su x_k **nultočke** polinoma p_n , uz $n > i, j$.

Uočite da **produkt** polinoma $p_i \cdot p_j$ ima stupanj $i + j \leq 2n - 2$.

Prethodna formula **diskretne ortogonalnosti** je, zapravo,

- zapis **egzaktne** integracije **produkta** $p_i \cdot p_j$
- **Gaussovom** integracijskom formulom reda n (uz $n > i, j$).

Isto vrijedi i za $i < j = n$, zbog $p_n(x_k) = 0$.

Diskretni skal. produkti iz Gaussove formule

Gaussova integracijska formula reda n , s čvorovima x_k i težinama w_k , generira diskretni skalarni produkt funkcija f i g

$$\langle f, g \rangle_{G_n} := \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) g(x_k).$$

Skalarni produkt je aproksimacija integrala produkta $f \cdot g$ tom Gaussovom formulom.

Na n -dimenzionalnom prostoru \mathbb{R}^n , pripadni skalarni produkt vektora y i z je

$$\langle y, z \rangle_{W_n} := z^T \cdot \text{diag}(w_1, \dots, w_n) \cdot y = \sum_{k=1}^n w_k y_k z_k.$$

Oba skalarna produkta su korektna, jer su težine w_k pozitivne.

Veza između funkcija i vektora

Veza između funkcija i vektora — funkciji f pridružujemo vektor vrijednosti u čvorovima

$$f \mapsto [f(x_1), \dots, f(x_n)]^T \in \mathbb{R}^n.$$

Slično vrijedi i za kompleksne funkcije, odnosno, \mathbb{C}^n .

Diskretna ortogonalnost: Za integralni skalarni produkt, zadan težinskom funkcijom w na intervalu $[a, b]$, i za svaki $n \in \mathbb{N}$,

- pripadni **ortogonalni** polinomi p_0, \dots, p_{n-1}
- su **ortogonalni** i u **diskretnom** skalarnom produktu, generiranom pripadnom **Gaussovom** integracijskom formulom reda n .

Prostori \mathcal{P}_k s produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle_{G_n}$ su **unitarni** prostori, za $k < n$.

Pregled klasičnih Gaussovih integracijskih formula

Gauss–Legendreove formule

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se **Gauss–Legendreove** formule (težina je $w(x) = 1$).

Čvorovi integracije su **nultočke Legendreovih** polinoma P_n .

Za njih vrijedi tzv. Rodriguesova formula

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \geq 0.$$

Za P_n je

$$\gamma_n = \frac{2}{2n+1}, \quad A_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}, \quad n \geq 0.$$

Gauss–Legendreove formule

Težine u Gaussovoj formuli možemo napisati na razne načine

$$\begin{aligned}w_k &= \frac{2(1 - x_k^2)}{[nP_{n-1}(x_k)]^2} = \frac{2(1 - x_k^2)}{[(n+1)P_{n+1}(x_k)]^2} \\ &= \frac{2}{nP'_n(x_k)P_{n-1}(x_k)} = -\frac{2}{(n+1)P'_n(x_k)P_{n+1}(x_k)} \\ &= \frac{2}{(1 - x_k^2)[P'_n(x_k)]^2}, \quad k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Greška kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$$

Gauss–Laguerreove formule

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se **Gauss–Laguerreove** formule.

Čvorovi integracije su **nultočke Laguerreovih** polinoma \tilde{L}_n .

Za njih vrijedi Rodriguesova formula

$$\tilde{L}_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad n \geq 0.$$

Za \tilde{L}_n je

$$\gamma_n = (n!)^2, \quad A_n = (-1)^n, \quad n \geq 0.$$

Gauss–Laguerreove formule

Težine u Gaussovoj formuli možemo napisati na razne načine

$$\begin{aligned}w_k &= \frac{[(n-1)!]^2 x_k}{[n\tilde{L}_{n-1}(x_k)]^2} = \frac{(n!)^2 x_k}{[\tilde{L}_{n+1}(x_k)]^2} \\ &= -\frac{[(n-1)!]^2}{\tilde{L}'_n(x_k)\tilde{L}_{n-1}(x_k)} = \frac{(n!)^2}{\tilde{L}'_n(x_k)\tilde{L}_{n+1}(x_k)} \\ &= \frac{(n!)^2}{x_k[\tilde{L}'_n(x_k)]^2}, \quad k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Greška kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (0, \infty).$$

Gauss–Hermiteove formule

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se **Gauss–Hermiteove** formule.

Čvorovi integracije su **nultočke Hermiteovih** polinoma H_n .

Za njih vrijedi Rodriguesova formula

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}), \quad n \geq 0.$$

Za H_n je

$$\gamma_n = 2^n n! \sqrt{\pi}, \quad A_n = 2^n, \quad n \geq 0.$$

Gauss–Hermiteove formule

Težine u Gaussovoj formuli možemo napisati na razne načine

$$\begin{aligned}w_k &= \frac{2^{n-1}(n-1)! \sqrt{\pi}}{n[H_{n-1}(x_k)]^2} = \frac{2^{n+1}n! \sqrt{\pi}}{[H_{n+1}(x_k)]^2} \\ &= \frac{2^n(n-1)! \sqrt{\pi}}{H'_n(x_k) H_{n-1}(x_k)} = -\frac{2^{n+1}n! \sqrt{\pi}}{H'_n(x_k) H_{n+1}(x_k)} \\ &= \frac{2^{n+1}n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_k)]^2}, \quad k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Greška kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-\infty, \infty).$$

Gauss–Čebiševljeve formule

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se Gauss–Čebiševljeve formule.

Čvorovi integracije su nultočke Čebiševljevih polinoma prve vrste T_n . Za njih vrijedi Rodriguesova formula

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} \sqrt{1-x^2}}{2^{n+1} \Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^{n-1/2}), \quad n \geq 0.$$

Za T_n je

$$\gamma_0 = \pi, \quad A_0 = 1, \quad \gamma_n = \frac{\pi}{2}, \quad A_n = 2^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Gauss–Čebiševljeve formule

Za $x = \cos \varphi$, znamo da je $T_n(\cos \varphi) = \cos(n\varphi)$, pa se čvorovi integracije **lako** računaju — vrijedi formula

$$x_k = \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Sve **težine** u Gaussovoj formuli su **jednake** i vrijedi

$$w_k = \frac{\pi}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Greška kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$$

Gauss–Čebiševljeve formule druge vrste

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se Gauss–Čebiševljeve formule druge vrste.

Čvorovi integracije su nultočke Čebiševljevih polinoma druge vrste U_n . Za njih vrijedi Rodriguesova formula

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1) \sqrt{\pi}}{2^{n+1} \Gamma(n + \frac{3}{2}) \sqrt{1-x^2}} \frac{d^n}{dx^n} \left((1-x^2)^{n+1/2} \right), \quad n \geq 0.$$

Za U_n je

$$\gamma_n = \frac{\pi}{2}, \quad A_n = 2^n, \quad n \geq 0.$$

Gauss–Čebiševljeve formule druge vrste

Za $x = \cos \varphi$, znamo da je $U_n(\cos \varphi) = \sin((n+1)\varphi) / \sin(\varphi)$, pa se **čvorovi** integracije **lako** računaju — vrijedi formula

$$x_k = \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Težine u Gaussovoj formuli se, također, **lako** računaju i vrijedi

$$w_k = \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \left(\frac{k\pi}{n+1} \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Greška kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n+1}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$$