

# *Numerička matematika*

## *13. predavanje*

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.hr/~singer`

PMF – Matematički odjel, Zagreb

# Sadržaj predavanja

- Numerička integracija (nastavak):
  - Gaussove formule i Hermiteova interpolacija.
  - Računanje čvorova i težina Gaussovih formula.
  - Primjer za Gaussove formule.
  - Pregled klasičnih Gaussovih integracijskih formula.
- Rješavanje nelinearnih jednažbi:
  - Općenito o iterativnim metodama.
  - Brzina konvergencije i pojam reda konvergencije.
  - Metoda raspolavljanja — bisekcije.
  - Regula falsi — metoda pogrešnog položaja.

# Informacije

**Bitno:** nadoknada “predkolokvijskog” petka 19. 6. je **sutra**

● **subota, 13. 6., od 11–14 u (003).**

**Službeni termin drugog kolokvija je:**

● **srijeda, 1. 7., u 12 sati.**

Rok za **predaju** zadaća je

● **dan drugog kolokvija, 1. 7., do ponoći (24 sata).**

**Neslužbeni termin popravnog kolokvija je:**

● **ponedjeljak, 13. 7., u 9 sati.**

**Konzultacije** počev od sljedećeg tjedna (19. 6.):

● **petak, 12–14 sati.**

## Informacije — nastavak

**Domaće zadaće** iz NM — realizacija ide preko **web** aplikacije. Pogledajte na **službeni** web kolegija, pod “**zadaće**”.

● Tamo su **početne upute**.

Skraćeni link je

<http://web.math.hr/nastava/unm/zadace.php>

Direktni link na **aplikaciju** za **zadaće** je

<http://degiorgi.math.hr/nm/>

Kolegij “**Numerička matematika**” ima **demonstratora**!

● **Sonja Šimpraga** — termin je **četvrtkom**, od **16–18**.

Pogledajte oglas na oglasnoj ploči za dogovor.

## Informacije — nastavak

Moja web stranica za **Numeričku matematiku** je

[http://web.math.hr/~singer/num\\_mat/](http://web.math.hr/~singer/num_mat/)

**Skraćena** verzija skripte — 1. dio (prvih 7 tjedana):

[http://web.math.hr/~singer/num\\_mat/num\\_mat1.pdf](http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat1.pdf)

**Skraćena** verzija skripte — 2. dio (drugih 7 tjedana):

[http://web.math.hr/~singer/num\\_mat/num\\_mat2.pdf](http://web.math.hr/~singer/num_mat/num_mat2.pdf)

## Informacije — nastavak

Na molbu Sanje Singer i Vedrana Novakovića, za goste je otvorena i web stranica kolegija Matematika 3 i 4 na FSB-u.

Tamo možete naći dodatne materijale za neke dijelove NM,

• posebno — vježbe i riješene zadatke.

Predavanja su “malo nježnija” od naših. Početna stranica je

<http://e-ucenje.fsb.hr/>

Zatim potražite “Katedra za matematiku” i onda:

• odete (kliknete) na kolegije Matematika 3 i 4,

• kliknete na gumb “Prijava kao gost”,

• na stranici potražite blok 3 “Numerička matematika”.

Iskoristite! Naravno, smijete pogledati i ostalo!

## Informacije — nastavak

Na <http://e-ucenje.fsb.hr/>,

- pod kolegijem **Numerička analiza**,
- možete naći “naša” predavanja.

Ako naš web zakaže, ima tamo ...

# Gaussove formule i Hermiteova interpolacija



# Integracija i interpolacija — ponavljanje

Vidjeli smo da se **Newton–Cotesove** formule mogu dobiti

- integracijom **Lagrangeovog** interpolacijskog polinoma za funkciju  $f$  na (zadanoj) mreži čvorova  $x_1, \dots, x_n$ .

Tu činjenicu smo onda iskoristili za

- nalaženje i ocjenu **greške** integracijske formule.

Na sličan način, i **Gaussove** formule mogu se dobiti

- integracijom **Hermiteovog** interpolacijskog polinoma za funkciju  $f$  na mreži čvorova  $x_1, \dots, x_n$ ,
- uz **dodatni** zahtjev da **koeficijenti** uz članove s **derivacijama** budu jednaki **nula** — to će **odrediti** čvorove.

Nakon dokaza, to ćemo iskoristiti za nalaženje **greške** **Gaussove** integracije.

# Hermiteova interpolacija — ponavljanje

Hermiteov interpolacijski polinom za funkciju  $f$  na mreži čvorova  $x_1, \dots, x_n$ ,

- interpolira vrijednosti funkcije i njezine derivacije u čvorovima ( $2n$  uvjeta),

pa, općenito, ima stupanj  $2n - 1$ .

To odgovara stupnju egzaktnosti  $d = 2n - 1$  za Gaussove formule, pa cijeli pristup ima smisla.

Za početak, ponovimo osnovne činjenice o Hermiteovoj interpolaciji,

- s promijenjenim oznakama, jer čvorove sad brojimo od 1, a ne od 0.

# Hermiteova interpolacija — ponavljanje

Neka su  $x_1, \dots, x_n$  međusobno različite točke. Ove točke interpretiramo kao

• dvostruke čvorove interpolacije za zadanu funkciju  $f$ .

Uvedimo još skraćene oznake za vrijednosti funkcije  $f$  i njezine derivacije  $f'$  u čvorovima:

$$f_k := f(x_k), \quad f'_k = f'(x_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Raniji rezultat o Hermiteovoj interpolaciji sada ima oblik:

**Teorem.** Postoji jedinstveni polinom  $h_{2n-1} \in \mathcal{P}_{2n-1}$ , stupnja najviše  $2n - 1$ , koji zadovoljava interpolacijske uvjete

$$h_{2n-1}(x_k) = f_k, \quad h'_{2n-1}(x_k) = f'_k, \quad k = 1, \dots, n.$$



# Hermiteova interpolacija — ponavljanje

Ovaj polinom  $h_{2n-1}$  možemo prikazati u tzv. **Hermiteovoj** bazi na mreži čvorova  $x_1, \dots, x_n$ , kao linearnu kombinaciju

$$h_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^n (f_k h_{k,0}(x) + f'_k h_{k,1}(x)),$$

gdje su  $h_{k,0}$  i  $h_{k,1}$ , za  $k = 1, \dots, n$ , polinomi **Hermiteove** baze **definirani** relacijama

$$h_{k,0}(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{za } j \neq k, \\ 1, & \text{za } j = k, \end{cases} \quad h'_{k,0}(x_j) = 0,$$

$$h_{k,1}(x_j) = 0, \quad h'_{k,1}(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{za } j \neq k, \\ 1, & \text{za } j = k. \end{cases}$$

# Hermiteova interpolacija — ponavljanje

Polinome **Hermiteove** baze možemo eksplicitno izraziti u obliku

$$h_{k,0}(x) = [1 - 2(x - x_k)\ell'_k(x_k)] \ell_k^2(x)$$

$$h_{k,1}(x) = (x - x_k) \ell_k^2(x),$$

gdje je  $\ell_k$  odgovarajući polinom **Lagrangeove** baze na mreži čvorova  $x_1, \dots, x_n$ , za  $k = 1, \dots, n$ .

Budući da je  $\ell_k$  polinom stupnja  $n - 1$ , onda

• su  $h_{k,0}$  i  $h_{k,1}$  polinomi stupnja  $2n - 1$ .

Ako su točke  $x_1, \dots, x_n$  međusobno **različite**, onda su polinomi

•  $\ell_k$ , za  $k = 1, \dots, n$ , — **baza** u prostoru  $\mathcal{P}_{n-1}$ ,

•  $h_{k,0}, h_{k,1}$ , za  $k = 1, \dots, n$ , — **baza** u prostoru  $\mathcal{P}_{2n-1}$ .

# Greška Hermiteove interpolacije — ponavljanje

Za funkciju **greške** Hermiteove interpolacije

$$e_h(x) := f(x) - h_{2n-1}(x)$$

u svakom čvoru  $x_k$ , očito, vrijedi

$$e_h(x_k) = 0, \quad e'_h(x_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dakle, **greška**  $e_h$  ima **dvostruke** nultočke u točkama  $x_1, \dots, x_n$ .

Pripadni **polinom čvorova**  $\omega_h$  za **Hermiteovu** interpolaciju je

$$\omega_h(x) = (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 = \omega_n^2(x),$$

gdje je  $\omega_n$  polinom čvorova za **Lagrangeovu** interpolaciju na istoj mreži.

U novim oznakama, za **grešku** vrijedi sljedeći rezultat.

# Greška Hermiteove interpolacije — ponavljanje

**Teorem.** Neka su  $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$  međusobno različite točke i pretpostavimo da je  $f \in C^{2n}[a, b]$ .

Nadalje, neka je  $e_h$  greška Hermiteovog interpolacijskog polinoma  $h_{2n-1}$  za funkciju  $f$  na mreži čvorova  $x_1, \dots, x_n$ .

Za svaku točku  $x \in [a, b]$ , postoji točka  $\xi \in [a, b]$ , takva da je

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n-1}(x) = \omega_n^2(x) \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}.$$

Znamo da za  $\xi$  vrijedi i jača ocjena  $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$ , gdje je

$$x_{\min} := \min\{x, x_1, \dots, x_n\}, \quad x_{\max} := \max\{x, x_1, \dots, x_n\},$$

ali nam to neće trebati za Gaussovu integraciju.

# Integral Hermiteovog interpolacijskog polinoma

Integracijom **Hermiteovog** interpolacijskog polinoma

$$h_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^n (f_k h_{k,0}(x) + f'_k h_{k,1}(x)),$$

dobivamo “**novu**” **integracijsku formulu** oblika

$$I'_n := \int_a^b w(x) h_{2n-1}(x) dx = \sum_{k=1}^n (w_k f_k + w'_k f'_k),$$

gdje je

$$w_k = \int_a^b w(x) h_{k,0}(x) dx, \quad w'_k = \int_a^b w(x) h_{k,1}(x) dx,$$

za  $k = 1, \dots, n$ . Naime,  $f_k$  i  $f'_k$  su **brojevi** i **ne ovise** o  $x$ .



# Integral Hermiteovog interpolacijskog polinoma

Težinske koeficijente  $w_k$  i  $w'_k$  možemo napisati i tako da

- uvrstimo izraze za polinome  $h_{k,0}$  i  $h_{k,1}$  Hermiteove baze,
- u terminima polinoma  $\ell_k$  Lagrangeove baze.

Dobivamo sljedeće formule za težine u  $I'_n$

$$w_k = \int_a^b w(x) [1 - 2(x - x_k)\ell'_k(x_k)] \ell_k^2(x) dx,$$

$$w'_k = \int_a^b w(x) (x - x_k) \ell_k^2(x) dx,$$

za  $k = 1, \dots, n$ .

# Integracijske formule s derivacijama u čvorovima

Ovakve **integracijske** formule

$$I'_n := \int_a^b w(x) h_{2n-1}(x) dx = \sum_{k=1}^n \left( w_k f_k + w'_k f'_k \right),$$

“slične” na **Gaussove** integracijske formule, osim što imaju

- **dodatne** članove  $w'_k f'_k$ , u kojima se koriste i **derivacije** funkcije  $f$  u **čvorovima** integracije  $x_k$ .

Kad bi, kao u **Newton–Cotesovim** formulama,

- svi **čvorovi**  $x_k$  bili unaprijed **zadani**,

iz uvjeta **egzaktne** integracije polinoma trebalo bi odrediti

- $2n$  parametara — **težinske** koeficijente  $w_k$  i  $w'_k$ .

# Integracijske formule s derivacijama u čvorovima

Očekujemo da ovakva formula  $I'_n$  **egzaktno** integrira polinome do stupnja  $2n - 1$  (dimenzija prostora je  $2n$ ).

Zaista, **uvjeti egzaktne** integracije na bazi prostora  $\mathcal{P}_{2n-1}$  daju

- **regularni** linearni sustav reda  $2n$  za **težine**.

To je očito, jer **formule** za **težine** već imamo. Osim toga,

- **integracijska** formula je dobivena “**interpolacijski**” — na **Hermiteovoj** bazi prostora  $\mathcal{P}_{2n-1}$ .

Dakle, stupanj **egzaktnosti** formule  $I'_n$  je sigurno  $d = 2n - 1$ .

Uz pretpostavku dovoljne **glatkoće** funkcije  $f$ ,

- **jednostavno** se izvodi i **greška** integracijske formule  $I'_n$ ,
- direktno iz **greške Hermiteovog** interpolacijskog polinoma.

# Greška formule $I'_n$ s derivacijama u čvorovima

Sasvim općenito, za integracijske formule  $I'_n$  vrijedi

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = I'_n(f) + E'_n(f),$$

gdje je  $E'_n(f)$  **greška** te formule za zadanu funkciju  $f$ .

Integracijsku formulu  $I'_n(f)$  dobili smo “**interpolacijski**”, kao

- **egzaktni** integral **Hermiteovog** interpolacijskog polinoma  $h_{2n-1}$  za funkciju  $f$  na mreži čvorova  $x_1, \dots, x_n$ ,

$$I'_n(f) := \int_a^b w(x) h_{2n-1}(x) dx = \sum_{k=1}^n \left( w_k f_k + w'_k f'_k \right).$$

# Greška formule $I'_n$ s derivacijama u čvorovima

Greška  $E'_n(f)$  integracijske formule  $I'_n(f)$  je

$$E'_n(f) = \int_a^b w(x) (f(x) - h_{2n-1}(x)) dx = \int_a^b w(x) e_h(x) dx,$$

tj.  $E'_n(f)$  je **integral** greške  $e_h$  interpolacijskog polinoma  $h_{2n-1}$ .

Neka je funkcija  $f \in C^{2n}[a, b]$ . U **svakoj** točki  $x \in [a, b]$  vrijedi

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n-1}(x) = \omega_n^2(x) \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!},$$

za **neki**  $\xi \in [a, b]$ .

## Greška formule $I'_n$ s derivacijama u čvorovima

Kad to uvrstimo u izraz za grešku  $E'_n(f)$ , dobivamo

$$E'_n(f) = \int_a^b w(x) e_h(x) dx = \int_a^b w(x) \omega_n^2(x) \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} dx.$$

Zbog pretpostavke  $f \in C^{2n}[a, b]$ , slijedi da je  $f^{(2n)} \in C[a, b]$ , tj.  $f^{(2n)}$  je neprekidna na  $[a, b]$ . Osim toga, očito je

$$w(x) \omega_n^2(x) \geq 0, \quad \text{za svaki } x \in [a, b],$$

pa možemo iskoristiti teorem srednje vrijednosti za integrale s težinama, s tim da je

$$g(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}.$$

# Greška formule $I'_n$ s derivacijama u čvorovima

Zaključujemo da postoji  $\zeta \in [a, b]$  za koji je

$$E'_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \int_a^b w(x) \omega_n^2(x) dx.$$

Integral na desnoj strani ovisi samo o čvorovima  $x_1, \dots, x_n$ , i treba ga eksplicitno izračunati za zadani raspored čvorova.

Iz ovog oblika greške integracijske formule  $I'_n$  odmah vidimo da je stupanj egzaktnosti jednak  $d = 2n - 1$ .

Međutim, za praktičnu primjenu formule  $I'_n$  trebamo znati

- ne samo funkcijske vrijednosti  $f(x_k)$  u čvorovima,
- već i vrijednosti derivacije  $f'(x_k)$  u tim čvorovima.

## Put prema Gaussovim integracijskim formulama

Zato je ideja da probamo **izbjeći** korištenje **derivacija**,

• tako da **izborom** čvorova  $x_k$

• **poništimo** sve težinske koeficijente  $w'_k$  uz **derivacije**  $f'_k$ .

Ako to “ide”, tj. **ako** je  $w'_k = 0$ , za  $k = 1, \dots, n$ , dobili bismo

$$I'_n = \int_a^b w(x) h_{2n-1}(x) dx = \sum_{k=1}^n \left( w_k f_k + w'_k f'_k \right) = \sum_{k=1}^n w_k f_k.$$

Stupanj **egzaktnosti** ove “**specijalne**” integracijske formule  $I'_n$  mora ostati **isti** —  $d = 2n - 1$ . No, **tako** dobivena formula

• koristila bi **samo funkcijske** vrijednosti  $f_k$  u **čvorovima**,  
tj. postala bi **Gaussova** integracijska formula  $I_n$ .



# Gaussove formule kao interpolacijske formule

To se **može** postići! Sljedeći rezultat govori o tome **kako** treba izabrati **čvorove**  $x_k$ .

**Teorem.** U integracijskoj formuli  $I'_n$  vrijedi

$$w'_k = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

tj.  $I'_n$  je **Gaussova** integracijska formula, **ako i samo ako** je polinom **čvorova**

$$\omega_n := (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

**ortogonalan** na **sve** polinome **nižeg** stupnja, tj. vrijedi

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

# Gaussove formule kao interpolacijske formule

**Dokaz.** Koristimo eksplicitni izraz za težine u formuli  $I'_n$

$$w'_k = \int_a^b w(x) (x - x_k) \ell_k^2(x) dx, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdje su  $\ell_k$ , za  $k = 1, \dots, n$ , polinomi **Lagrangeove** baze na mreži čvorova  $x_1, \dots, x_n$ .

Ove polinome možemo izraziti preko polinoma **čvorova**  $\omega_n$

$$\ell_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k) \omega'_n(x_k)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

pa je

$$(x - x_k) \ell_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

# Gaussove formule kao interpolacijske formule

Kad tu formulu uvrstimo u izraz za težine, dobivamo

$$w'_k = \frac{1}{\omega'_n(x_k)} \int_a^b w(x) \omega_n(x) \ell_k(x) dx, \quad k = 1, \dots, n,$$

1. smjer (nužnost): svi  $w'_k = 0 \implies$  ortogonalnost.

Ako je

$$w'_k = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

odmah vidimo da je  $\omega_n$  ortogonalan na sve polinome  $\ell_k$ , za  $k = 1, \dots, n$ . No, ti polinomi čine bazu prostora  $\mathcal{P}_{n-1}$ , pa je

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

# Gaussove formule kao interpolacijske formule

2. smjer (dovoljnost): ortogonalnost  $\implies$  svi  $w'_k = 0$ .

Ako je  $\omega_n$  ortogonalan na sve polinome  $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ , onda to vrijedi i za polinome Lagrangeove baze, tj. za  $p = \ell_k$ , pa je

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) \ell_k(x) dx = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Oдавде odmah slijedi i

$$w'_k = \frac{1}{\omega'_n(x_k)} \int_a^b w(x) \omega_n(x) \ell_k(x) dx = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$



# Gaussove formule kao interpolacijske formule

Prema očekivanju, dobivamo **isti** zaključak kao i ranije.

Integracijska formula oblika  $I'_n$  je **Gaussova** integracijska formula  $I_n$ , **ako i samo ako** su **čvorovi**  $x_k$  upravo

- sve **nultočke** odgovarajućeg **ortogonalnog** polinoma  $p_n$ , stupnja  $n$ , s **težinskom** funkcijom  $w$  na  $[a, b]$ .

Pripadni polinom **čvorova**  $\omega_n$  mora biti jednak

- polinomu  $p_n$  s **vodećim** koeficijentom  $A_n = 1$ .

Time smo još jednom dokazali **egzistenciju** i **jedinstvenost** **Gaussovih** integracijskih formula, za zadanu težinsku funkciju  $w$  na  $[a, b]$ .

Usput, dobivamo i **grešku** za **Gaussove** integracijske formule!

# Greška Gaussovih integracijskih formula

**Teorem.** Neka je  $I_n(f)$  Gaussova integracijska formula reda  $n$  s težinskom funkcijom  $w$  na  $[a, b]$

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k).$$

Ako je  $f \in C^{2n}[a, b]$ , onda postoji  $\zeta \in [a, b]$  za koji je

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \int_a^b w(x) p_n^2(x) dx,$$

gdje je  $p_n$  ortogonalni polinom stupnja  $n$

• s vodećim koeficijentom  $A_n = 1$ ,

uz težinsku funkciju  $w$  na  $[a, b]$ .

# Greška Gaussovih integracijskih formula

**Dokaz.** Znamo da je  $I_n(f) = I'_n(f)$  ako i samo ako je

- pripadni polinom **čvorova**  $\omega_n$  jednak
- **ortogonalnom** polinomu  $p_n$  s **vodećim** koeficijentom  $A_n = 1$ .

Tvrdnja izlazi direktno iz formule za **grešku** odgovarajuće integracijske formule  $I'_n(f)$ , s tim da je  $\omega_n = p_n$ . ■

Formulu za **grešku** Gaussove integracijske formule

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \int_a^b w(x) p_n^2(x) dx$$

možemo i drugačije zapisati.

# Greška Gaussovih integracijskih formula

Integral na desnoj strani je kvadrat norme polinoma  $p_n$  s vodećim koeficijentom  $A_n = 1$ , pa je

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \int_a^b w(x) p_n^2(x) dx = \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \|p_n\|^2.$$

U principu, za zadane  $w$  i  $[a, b]$ ,

- $\|p_n\|^2$  se može eksplicitno izračunati i ovisi samo o  $n$  (v. malo kasnije za klasične formule).

Ako koristimo  $p_n$  za koji je  $A_n \neq 1$ , formula za grešku se trivijalno mijenja

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \cdot \frac{\|p_n\|^2}{A_n^2}.$$



# Pozitivnost težina u Gaussovim formulama

Na kraju, iz općih izraza za težine u integracijskoj formuli  $I'_n$ , jednostavno se dokazuje i

- pozitivnost težina  $w_k$  u Gaussovim integracijskim formulama.

Za težine u formuli  $I'_n$  vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x) [1 - 2(x - x_k)l'_k(x_k)] l_k^2(x) dx,$$

$$w'_k = \int_a^b w(x) (x - x_k) l_k^2(x) dx, \quad k = 1, \dots, n.$$

U izrazu za  $w_k$  iskoristimo relaciju za  $w'_k$ .

# Pozitivnost težina u Gaussovima formulama

Težine  $w_k$  onda možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}w_k &= \int_a^b w(x) [1 - 2(x - x_k)l'_k(x_k)] l_k^2(x) dx \\ &= \int_a^b w(x) l_k^2(x) dx - 2l'_k(x_k)w'_k.\end{aligned}$$

U Gaussovima formulama je  $w'_k = 0$ , pa izlazi poznata formula

$$w_k = \int_a^b w(x) l_k^2(x) dx > 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

zbog pozitivnosti podintegralne funkcije na desnoj strani. ■

# Računanje čvorova i težina u Gaussovima formulama

# Problem nalaženja Gaussovih formula

Neka je zadana **težinska** funkcija  $w \geq 0$  na intervalu  $[a, b]$ .

**Problem:** Za zadani  $n \in \mathbb{N}$ , treba naći sve “parametre” odogovarajuće **Gaussove** integracijske formule **reda**  $n$

$$\int_a^b w(x) f(x) dx \approx I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k).$$

To znači da treba **izračunati**

• sve **čvorove**  $x_k$  i **težine**  $w_k$ , za  $k = 1, \dots, n$ .

Usput, ove parametre treba izračunati maksimalno **točno**, da osiguramo što **točniju numeričku** integraciju **raznih** funkcija  $f$ .

**Idealno:** izračunati čvorove i težine na “**punu**” točnost aritmetike računala (u kojoj radimo).

# Sustav jednažbi iz uvjeta egzaktne integracije

Znamo da Gaussove integracijske formule **egzaktno** integriraju sve polinome iz  $\mathcal{P}_{2n-1}$ .

- Možemo izabrati bilo koju **bazu** u tom prostoru  $\mathcal{P}_{2n-1}$
- i napisati sustav od  **$2n$  jednažbi** s  **$2n$  nepoznanica**, iz **uvjeta egzaktne** integracije na toj **bazi**.

Na primjer, u **standardnoj** bazi  $\{1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}\}$  dobivamo sustav oblika

$$\mu_j = \int_a^b w(x)x^j dx = \sum_{k=1}^n w_k x_k^j, \quad j = 0, 1, \dots, 2n - 1.$$

Međutim, to je **loš** pristup!

# Sustav jednažbi iz uvjeta egzaktne integracije

Što **ne valja**? Ključni problem je **nelinearnost** ovog sustava.

- Ovisnost o nepoznanicama  $x_k$  je **nelinearna**.

Već i dokaz da ovaj **nelinearni** sustav ima **jedinstveno** rješenje **nije jednostavan**.

Drugi problem je moguća

- **loša uvjetovanost** izabrane baze prostora polinoma.

Potencijalni **popravak**:

- uzeti bazu pripadnih **ortogonalnih** polinoma  $p_n$ .

Nažalost, to **pomaže** tek kad jednom **izračunamo** čvorove  $x_k$ , pa ostaje **linearni** sustav (reda  $n$ ) za **težine**  $w_k$ .

Dakle, **nema** puno smisla!

# Parametri Gaussovih formula

Napomena. Za neke “klasične” izbore težinskih funkcija  $w$  i intervala  $[a, b]$ , postoje

- tablice čvorova i težina pripadnih Gaussovih formula,
- za neke (male) vrijednosti  $n$  — tipično je  $n \leq 20$ ,
- na vrlo visoku točnost — 20, pa i više decimala.

Međutim, čak i tad imamo “problem”:

- treba korektno “prekucati” tabelirane vrijednosti u naš program!

Probajte jednom — i provjerite jesu li sve vrijednosti korektne! (Test je egzaktna integracija).

Dakle, korisno je znati kako izgleda algoritam za računanje parametara Gaussovih formula.

# Ortogonalni polinomi i tročlana rekurzija

Algoritam se bazira na pripadnim **ortogonalnim** polinomima i **tročlanoj** rekurziji za te polinome.

Neka je  $\{p_k \mid k \geq 0\}$  familija **ortogonalnih** polinoma na intervalu  $[a, b]$  s težinskom funkcijom  $w$ .

Već smo pokazali da ovi polinomi zadovoljavaju **tročlanu homogenu** rekurziju oblika

$$p_{k+1}(x) = (a_k x + b_k)p_k(x) - c_k p_{k-1}(x), \quad k \geq 1.$$

Izveli smo i formule za **koeficijente**  $a_k$ ,  $b_k$  i  $c_k$  u ovoj rekurziji (ali nam one neće trebati).



# Monični ortogonalni polinomi

Za nalaženje parametara **Gaussovih** formula standardno se koriste **ortogonalni** polinomi  $p_k$

• s **vodećim** koeficijentom  $A_k = 1$ .

Ovi polinomi katkad se zovu **monični** ortogonalni polinomi.

**Monični ortogonalni** polinomi zadovoljavaju

• još **jednostavniju tročlanu** rekurziju,

koja se standardno piše u sljedećem obliku:

$$p_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)p_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x), \quad k = 0, 1, \dots$$

Uočite “**pomak**” u rekurziji — rekurzija starta od **nule!**

# Rekurzija za monične ortogonalne polinome

Rekurzija je

$$p_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)p_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x), \quad k = 0, 1, \dots$$

Po definiciji, **prva dva** polinoma su

$$p_{-1}(x) := 0, \quad p_0(x) = 1.$$

Uz skraćeni zapis integralnog skalarnog produkta  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , **koeficijenti** u ovoj rekurziji dani su formulama

$$\alpha_k = \frac{\langle xp_k, p_k \rangle}{\langle p_k, p_k \rangle}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\beta_k = \frac{\langle xp_k, p_{k-1} \rangle}{\langle p_{k-1}, p_{k-1} \rangle} = \frac{\langle p_k, p_k \rangle}{\langle p_{k-1}, p_{k-1} \rangle} > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

# Rekurzija za monične ortogonalne polinome

Standardno se još **definira** da je

$$\beta_0 := \mu_0 = \int_a^b w(x) dx.$$

Zbog  $p_{-1}(x) = 0$ , ovaj koeficijent  $\beta_0$  **nije** bitan u rekurziji, već ima **drugu** svrhu. I za njega vrijedi  $\beta_0 > 0$ .

Pretpostavimo sad da su

• **svi** potrebni koeficijenti  $\alpha_k$  i  $\beta_k$  **poznati**.

Ako **nisu**, postoje **numerički** postupci za njihovo **računanje**.

Za zadani  $n$ , **čvorovi**  $x_1, \dots, x_n$  su **nultočke** polinoma  $p_n$ .

Zato u rekurziji trebamo koeficijente za  $k \leq n - 1$ .

# Matrični zapis rekurzije za ortogonalne polinome

Za početak, rekurziju za **monične** ortogonalne polinome

$$p_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)p_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x), \quad k = 0, 1, \dots,$$

napišemo tako da član  $xp_k(x)$  ostane **sam** na jednoj strani

$$p_{k+1}(x) + \alpha_k p_k(x) + \beta_k p_{k-1}(x) = xp_k(x), \quad k = 0, 1, \dots,$$

**Prvih**  $n$  relacija iz rekurzije, za  $k = 0, \dots, n - 1$ , možemo zapisati u **matričnom** zapisu,

- tako da **lijevu** stranu **svake** relacije gledamo kao **linearnu kombinaciju** vrijednosti

$$p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x).$$

U **zadnjoj** relaciji,  $p_n(x)$  pišemo **posebno**.

# Matrični zapis rekurzije za ortogonalne polinome

Dobivamo

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & 1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-2} & 1 \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \\ p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p_n(x) \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \\ p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}(x) \end{bmatrix} .$$

Uvedimo oznake

$$T_n = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-2} & 1 \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad z(x) = \begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \\ p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}(x) \end{bmatrix} .$$

# Matrični zapis rekurzije za ortogonalne polinome

Onda dobivamo “skraćeni” matrični zapis

$$T_n z(x) + p_n(x) e_n = x z(x),$$

gdje je  $e_n = (0, \dots, 0, 1)^T$  zadnji vektor standardne baze u  $\mathbb{R}^n$ .  
Dodatno još, zbog  $p_0(x) = 1$ , uvijek vrijedi  $z(x) \neq 0$ .

Sad ide ključna primjedba:

- ako je  $x_k$  nultočka polinoma  $p_n$ , onda je  $x_k$  svojstvena vrijednost matrice  $T_n$ , a  $z(x_k)$  je pripadni svojstveni vektor.

Vrijedi i obrat:

- ako je  $x$  svojstvena vrijednost matrice  $T_n$ , onda je  $x$  nultočka polinoma  $p_n$ .

# Čvorovi kao svojstvene vrijednosti

Dakle, sve **svojstvene vrijednosti** matrice  $T_n$  su upravo sve **nultočke** polinoma  $p_n$ , tj. svi **čvorovi** integracije  $x_1, \dots, x_n$ .

**Zaključak:** za računanje **čvorova** možemo koristiti algoritme

- za računanje **svojstvenih vrijednosti** tridijagonalne (općenito, **nesimetrične**) matrice  $T_n$ .

Međutim, to se u praksi nikad **ne radi** tako,

- preko **nesimetrične** matrice  $T_n$ .

**Razlog:** postoji i **puno bolji** pristup!

- Matrica  $T_n$  se **uvijek** može **simetrizirati** u tzv. **Jacobijevu** matricu  $J_n$ .

## Simetrizacija matrice — Jacobijeva matrica $J_n$

Tvrdnja. Matrica  $T_n$  je dijagonalno slična simetričnoj matrici

$$J_n = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \sqrt{\beta_{n-2}} & \alpha_{n-2} & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

koju zovemo **Jacobijeva** matrica. Ovdje je **bitno** da je  $\beta_k > 0$ .

Preciznije, vrijedi  $D_n^{-1}T_nD_n = J_n$ , pri čemu je

$$D_n = d_0 D'_n = d_0 \cdot \text{diag}(1, \sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_1\beta_2}, \dots, \sqrt{\beta_1 \cdots \beta_{n-1}}),$$

a  $d_0 \neq 0$  je proizvoljan skalar ( $d_0$  se **skrati** u izrazu za  $J_n$ ).



# Čvorovi kao svojstvene vrijednosti matrice $J_n$

Slične matrice  $T_n$  i  $J_n$  imaju iste svojstvene vrijednosti.

Zaključak: čvorove možemo izračunati kao

- svojstvene vrijednosti simetrične tridijagonalne matrice  $J_n$ .

Prednosti ovog pristupa:

- Simetrična matrica  $J_n$  ima realne svojstvene vrijednosti,
- pripadni svojstveni vektori su ortogonalni,
- iz njih se lako računaju i težine (Golub–Welsh algoritam).

Dodatno, za simetrične tridijagonalne matrice postoje

- vrlo efikasni i točni algoritmi za svojstveni problem.

## Simetrizacija matrice i rekurzija

Simetrizaciji matrice  $T_n$  u **Jacobijevu** matricu  $J_n$  odgovara

● **simetrizacija** rekurzije za pripadne **ortogonalne** polinome.

Iz **moničnih** polinoma  $p_k$ , supstitucijom

$$\tilde{p}_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\beta_1 \cdots \beta_k}} p_k(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

prelazimo na **ortogonalne** polinome  $\tilde{p}_k$  koji više **nisu monični**, ali zadovoljavaju **simetriziranu** rekurziju

$$\sqrt{\beta_{k+1}} \tilde{p}_{k+1}(x) = (x - \alpha_k) \tilde{p}_k(x) - \sqrt{\beta_k} \tilde{p}_{k-1}(x),$$

za  $k = 0, 1, \dots$ . Start je, kao i prije,  $\tilde{p}_{-1}(x) = 0$  i  $\tilde{p}_0(x) = 1$ .

Ovoj rekurziji odgovara **Jacobijeva** matrica  $J_n$ .

## Svojstveni vektori Jacobijeve matrice $J_n$

Ortogonalni polinomi  $p_n$  i  $\tilde{p}_n$ , naravno, imaju iste nultočke, a to su ujedno i svojstvene vrijednosti matrice  $J_n$ .

Za bilo koju nultočku  $x_k$  polinoma  $\tilde{p}_n$ , iz matičnog zapisa rekursije slijedi

$$J_n \tilde{z}_k = x_k \tilde{z}_k,$$

gdje je

$$\tilde{z}_k := \tilde{z}(x_k) = \begin{bmatrix} \tilde{p}_0(x_k) \\ \tilde{p}_1(x_k) \\ \vdots \\ \tilde{p}_{n-1}(x_k) \end{bmatrix}$$

svojstveni vektor matrice  $J_n$  koji pripada svojstvenoj vrijednosti  $x_k$ , za  $k = 1, \dots, n$ .

# Diskretna ortogonalnost ortogonalnih polinoma

Znamo da su sve svojstvene vrijednosti  $x_k$  međusobno različite (to su nultočke ortogonalnog polinoma  $\tilde{p}_n$ ). Onda su

- pripadni svojstveni potprostori jednodimenzionalni,
- i još moraju biti ortogonalni, jer je  $J_n$  simetrična matrica!

To znači da su svojstveni vektori  $\tilde{z}_k$  međusobno ortogonalni. Uz oznaku  $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$  za “obični” skalarni produkt u  $\mathbb{R}^n$ , vrijedi

$$\langle \tilde{z}_j, \tilde{z}_k \rangle_n = 0, \quad \text{za } j \neq k.$$

Kad se ova relacija raspiše, dobivamo

- diskretnu ortogonalnost polinoma  $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n-1}$
  - u nultočkama prvog sljedećeg ortogonalnog polinoma  $\tilde{p}_n$ ,
- i to vrijedi za svaki  $n \in \mathbb{N}$ .

# Ortonormirana baza svojstvenih vektora

Svojstveni vektori  $\tilde{z}_k$  matrice  $J_n$

● nisu normirani, tj. vrijedi  $\|\tilde{z}_k\| \neq 1$ ,  
već su skalirani tako da im je prva komponenta jednaka 1

$$\tilde{z}_{k,1} = \tilde{p}_0(x_k) = 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ako želimo ortonormiranu bazu svojstvenih vektora, možemo ih normirati,

$$v_k := \frac{\tilde{z}_k}{\|\tilde{z}_k\|}, \quad k = 1, \dots, n,$$

i onda vrijedi

$$\langle v_j, v_k \rangle_n = \delta_{jk}.$$

Dakle,  $v_1, \dots, v_n$  je ortonormirana baza svojstvenih vektora matrice  $J_n$ .

# Ortonormirana baza svojstvenih vektora

Za **prve** komponente vektora  $v_k$  **ortonormirane** baze onda vrijedi

$$v_{k,1} = \frac{1}{\|\tilde{z}_k\|}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ako **znamo**  $v_k$ , odavde dobivamo **norme**  $\|\tilde{z}_k\|$ .

Ova veza je **korisna** u praksi:

- 🔴 Ako numerički **računamo** **svojstvene vektore** matrice  $J_n$ ,
- 🔴 uvijek, kao rezultat, dobivamo **ortonormiranu** bazu  $v_1, \dots, v_n$ .

Razlog: **Dijagonalizacija simetrične** matrice  $J_n$  radi se **ortogonalnim** transformacijama (sličnosti = kongruencije)!

# Računanje težina Gaussovih formula

Za računanje težina  $w_k$  u Gaussovima koristimo

- ortogonalnost polinoma  $\tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_{n-1}$ ,
- i uvjete egzaktnosti integracije tih istih polinoma.

Za bilo koji ortogonalni polinom  $\tilde{p}_k$ , iz relacije ortogonalnosti na konstantu  $\tilde{p}_0(x) = 1$ , dobivamo da je

$$\langle \tilde{p}_k, \tilde{p}_0 \rangle = \int_a^b w(x) \tilde{p}_k(x) dx = \begin{cases} \beta_0, & \text{za } k = 0, \\ 0, & \text{za } k > 0. \end{cases}$$

Iz uvjeta egzaktnosti integracije polinoma  $\tilde{p}_k$ , za  $k \leq n - 1$ , slijedi

$$\sum_{j=1}^n w_j \tilde{p}_k(x_j) = \langle \tilde{p}_k, \tilde{p}_0 \rangle = \beta_0 \cdot \delta_{k,0}, \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

## Računanje težina Gaussovih formula

Ovaj **linearni sustav** za težine  $w_1, \dots, w_n$  možemo zapisati u vektorskoj notaciji, preko **svojstvenih vektora**  $\tilde{z}_j$ , u obliku

$$\sum_{j=1}^n w_j \tilde{z}_j = \beta_0 e_1,$$

gdje je  $e_1$  **prvi** vektor standardne baze u  $\mathbb{R}^n$ .

Ovu relaciju **skalarno** pomnožimo s vektorom  $\tilde{z}_k$ . Izlazi

$$\sum_{j=1}^n w_j \langle \tilde{z}_j, \tilde{z}_k \rangle_n = \beta_0 \cdot \tilde{z}_{k,1} = \beta_0.$$

Sad iskoristimo **ortogonalnost** svojstvenih vektora

$$\langle \tilde{z}_j, \tilde{z}_k \rangle_n = \|\tilde{z}_k\|^2 \cdot \delta_{jk}, \quad j = 1, \dots, n.$$



# Računanje težina Gaussovih formula

Dobivamo da je

$$w_k \|\tilde{z}_k\|^2 = \beta_0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Na kraju, u **ortonormiranoj** bazi je  $v_{k,1} = 1/\|\tilde{z}_k\|$ .

Time smo pokazali da za **težine** vrijedi

$$w_k = \frac{\beta_0}{\|\tilde{z}_k\|^2} = \beta_0 v_{k,1}^2, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ovaj postupak za računanje parametara **Gaussovih** integracijskih formula zove se **Golub–Welsh** algoritam.

# Složenost cijelog postupka

Složenost:

- $O(n^3)$  — ako za matricu  $J_n$  računamo svojstvene vrijednosti  $x_k$  i (ortonormirane) svojstvene vektore  $v_1, \dots, v_n$ ,
- $O(n^2)$  — ako računamo samo svojstvene vrijednosti  $x_k$ , a elemente  $\tilde{p}_j(x_k)$  svojstvenih vektora  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$  računamo na kraju, po rekurziji.

# Pregled klasičnih Gaussovih integracijskih formula

# Gauss–Legendreove formule

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se **Gauss–Legendreove** formule.

• Težinska funkcija je  $w(x) = 1$  na intervalu  $[-1, 1]$ .

Čvorovi integracije su **nultočke** polinoma  $P_n$  definiranih Rodriguesovom formulom

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \geq 0.$$

## Gauss–Legendreove formule

Težine u Gaussovoj formuli možemo napisati na razne načine

$$\begin{aligned}w_k &= \frac{2(1 - x_k^2)}{[nP_{n-1}(x_k)]^2} = \frac{2(1 - x_k^2)}{[(n+1)P_{n+1}(x_k)]^2} \\ &= \frac{2}{nP'_n(x_k)P_{n-1}(x_k)} = -\frac{2}{(n+1)P'_n(x_k)P_{n+1}(x_k)} \\ &= \frac{2}{(1 - x_k^2)[P'_n(x_k)]^2}, \quad k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Greška kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$$

# Gauss–Laguerreove formule

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se **Gauss–Laguerreove** formule.

• Težinska funkcija je  $w(x) = e^{-x}$  na intervalu  $[0, \infty)$ .

Čvorovi integracije su **nultočke** polinoma  $\tilde{L}_n$  definiranih Rodriguesovom formulom

$$\tilde{L}_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad n \geq 0.$$

# Gauss–Laguerreove formule

Težine u Gaussovoj formuli možemo napisati na razne načine

$$\begin{aligned}w_k &= \frac{[(n-1)!]^2 x_k}{[n\tilde{L}_{n-1}(x_k)]^2} = \frac{(n!)^2 x_k}{[\tilde{L}_{n+1}(x_k)]^2} \\ &= -\frac{[(n-1)!]^2}{\tilde{L}'_n(x_k)\tilde{L}_{n-1}(x_k)} = \frac{(n!)^2}{\tilde{L}'_n(x_k)\tilde{L}_{n+1}(x_k)} \\ &= \frac{(n!)^2}{x_k[\tilde{L}'_n(x_k)]^2}, \quad k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Greška kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (0, \infty).$$

# Gauss–Hermiteove formule

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se **Gauss–Hermiteove** formule.

- Težinska funkcija je  $w(x) = e^{-x^2}$  na intervalu  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ .

Čvorovi integracije su **nultočke** polinoma  $H_n$  definiranih Rodriguesovom formulom

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}), \quad n \geq 0.$$



## Gauss–Hermiteove formule

Težine u Gaussovoj formuli možemo napisati na razne načine

$$\begin{aligned}w_k &= \frac{2^{n-1}(n-1)! \sqrt{\pi}}{n[H_{n-1}(x_k)]^2} = \frac{2^{n+1}n! \sqrt{\pi}}{[H_{n+1}(x_k)]^2} \\ &= \frac{2^n(n-1)! \sqrt{\pi}}{H'_n(x_k) H_{n-1}(x_k)} = -\frac{2^{n+1}n! \sqrt{\pi}}{H'_n(x_k) H_{n+1}(x_k)} \\ &= \frac{2^{n+1}n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_k)]^2}, \quad k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Greška kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-\infty, \infty).$$

# Gauss–Čebiševljeve formule

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se Gauss–Čebiševljeve formule.

● Težinska funkcija je  $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$  na intervalu  $[-1, 1]$ .

Čvorovi integracije su nultočke Čebiševljevih polinoma  $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ . Za nultočke vrijedi formula

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

# Gauss–Čebiševljeve formule

Sve težine u Gaussovoj formuli su jednake

$$w_k = \frac{\pi}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Greška kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$$

# Rješavanje nelinearnih jednadžbi

# Općenito o iterativnim metodama

Neka je zadana **nelinearna funkcija**

$$f : I \rightarrow \mathbb{R},$$

gdje je  $I$  neki interval. Tražimo sve one  $x \in I$  za koje je

$$f(x) = 0.$$

Takve točke  $x$  zovu se

- **rješenja** ili **korijeni** pripadne jednačbe,
- ili **nultočke** funkcije  $f$ .

U pravilu, pretpostavljamo da je

- $f$  **neprekidna** na  $I$  i
- da su joj nultočke **izolirane**.

## Neprekidnost funkcije $f$

Neprekidnost funkcije  $f$  obično se koristi pri određivanju intervala gdje se nalazi nultočka. Naime, ako je

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

na nekom intervalu  $[a, b]$ , to znači da funkcija je promijenila znak na  $[a, b]$ . To se može dogoditi na dva načina:

- ili  $f$  ima nultočku na  $[a, b]$ ,
- ili  $f$  ima prekid na  $[a, b]$ .

Ako je

- $f$  neprekidna na  $[a, b]$ ,
- i vrijedi  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ,

onda  $f$  sigurno ima nultočku na  $[a, b]$ .

# Izoliranost nultočaka

Definicija. (Izolirana nultočka) Za nultočku  $x_k$  ćemo reći da je **izolirana** ako postoji krug nekog **pozitivnog** radijusa oko  $x_k$

• takav da je  $x_k$  **jedina** nultočka **unutar** tog kruga.

U protivnom, kažemo da je nultočka **neizolirana**. ■

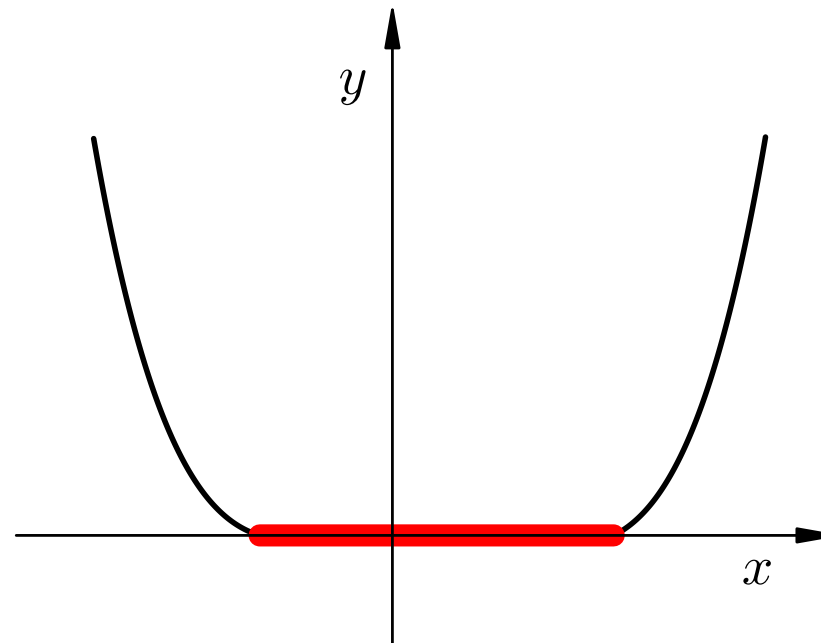
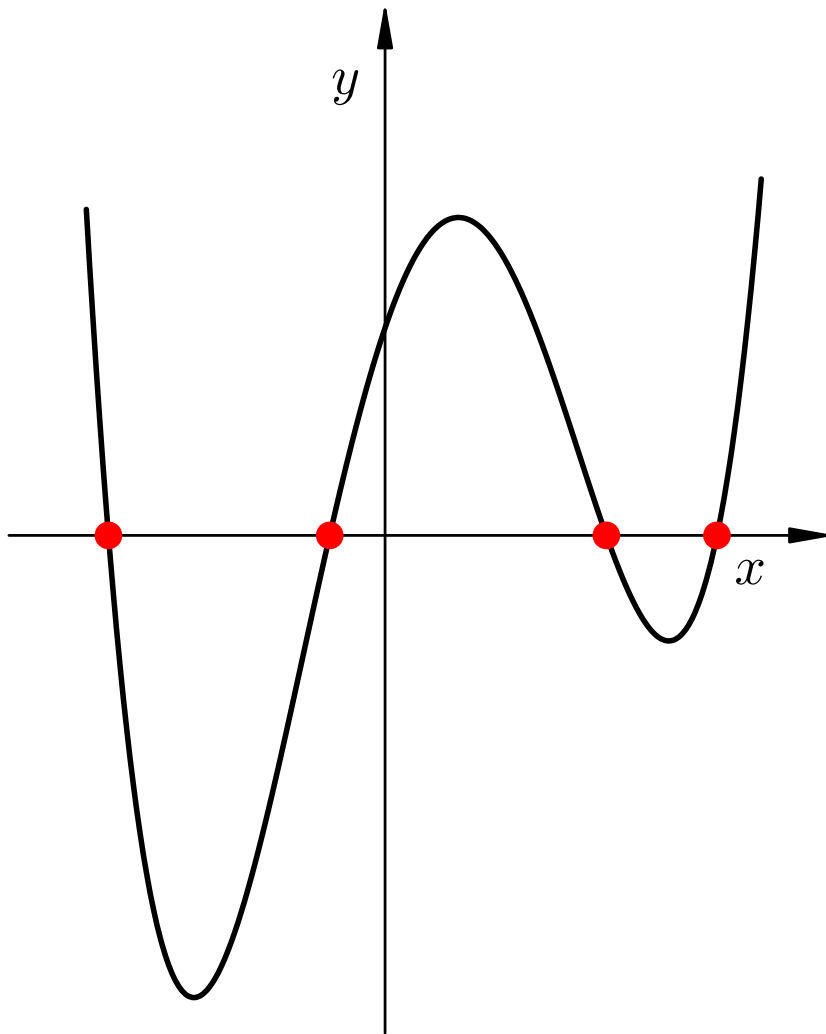
Kod **neizoliranih** nultočaka postoji problem **konvergencije** algoritama za nalaženje nultočaka.

Odsad nadalje, pretpostavljano da  $f$  ima samo **izolirane** nultočke.

Na sljedećoj stranici su primjeri funkcije s

- **izoliranim** nultočkama (lijevo),
- **neizoliranim** nultočkama (desno).

# Izoliranost nultočka





# Računanje nultočke na zadanu točnost

Traženje nultočki na zadanu točnost sastoji se od **dvije** faze:

1. Izolacije **jedne** ili **više** nultočki, tj. nalaženje intervala  $I$  unutar kojeg se nalazi **barem jedna** nultočka. Ovo je **teži** dio posla i obavlja se na temelju **analize toka** funkcije.
2. **Iterativno** nalaženje nultočke na traženu **točnost**.

Postoji **mnogo metoda** za nalaženje nultočaka nelinearnih funkcija na zadanu točnost. One se bitno razlikuju po tome


- imamo li **sigurnu** konvergenciju ili **ne**,
- i po **brzini** konvergencije (kad konvergiraju).

Uobičajeno:

- **brze** metode **nemaju** sigurnu konvergenciju,
- dok je **sporije** metode **imaju**.


# Brzina konvergencije

Definirajmo sada **brzinu konvergencije** niza iteracija. Te iteracije **moгу**, ali **ne moraju** biti iteracije za računanje nultočke funkcije.

**Definicija.** Niz iteracija  $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$  **konvergira** prema točki  $\alpha$   s **redom konvergencije**  $p, p \geq 1$ , ako je  $p$  **najveći** broj takav da vrijedi

$$|\alpha - x_n| \leq c |\alpha - x_{n-1}|^p, \quad n \in \mathbb{N}$$

za neki  $c > 0$ .

Ako je  $p = 1$ , kažemo da niz konvergira **linearno** prema  $\alpha$ . U tom je slučaju **nužno** da je  $c < 1$  i obično se  $c$  naziva **faktor linearne konvergencije**. 

# Brzina konvergencije

Prethodna definicija, katkad, nije zgodna za linearne iterativne algoritme.

Ako u prethodnoj formuli upotrijebimo indukciju za  $p = 1$ ,  $c < 1$ , onda dobivamo da je

$$|\alpha - x_n| \leq c^n |\alpha - x_0|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Katkad će biti mnogo lakše pokazati ovu relaciju, nego onu iz definicije. I u ovom slučaju reći ćemo da niz iteracija konvergira linearno s faktorom  $c$ .

# Metoda bisekcije (raspolavljanja)

# Uvodno o metodi raspolavljanja

Najjednostavnija metoda nalaženja nultočaka funkcije je **metoda bisekcije** ili **raspolavljanja**.

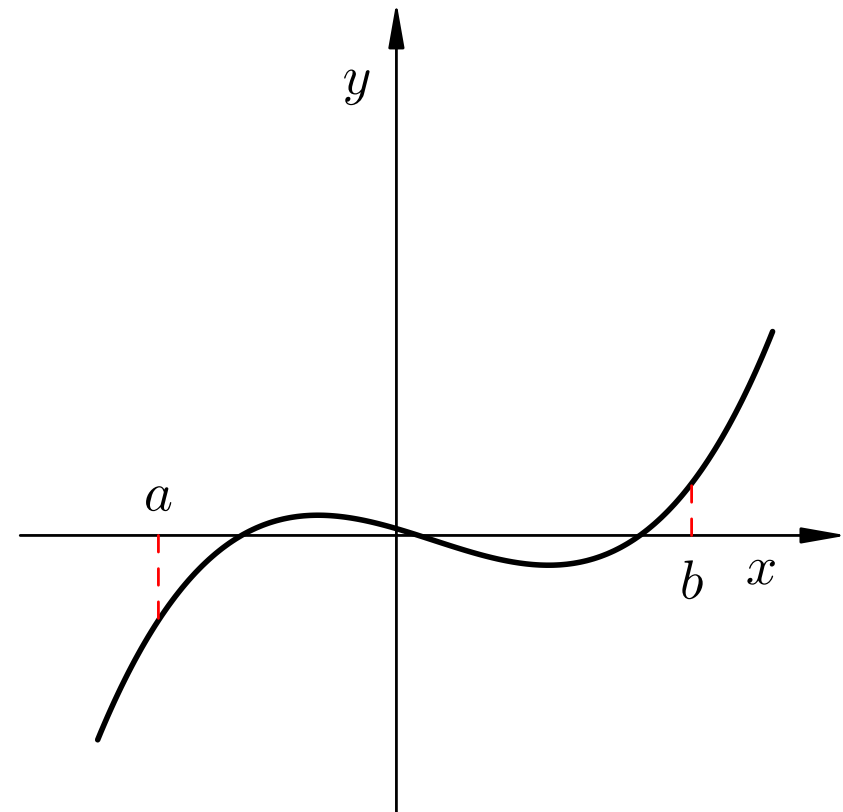
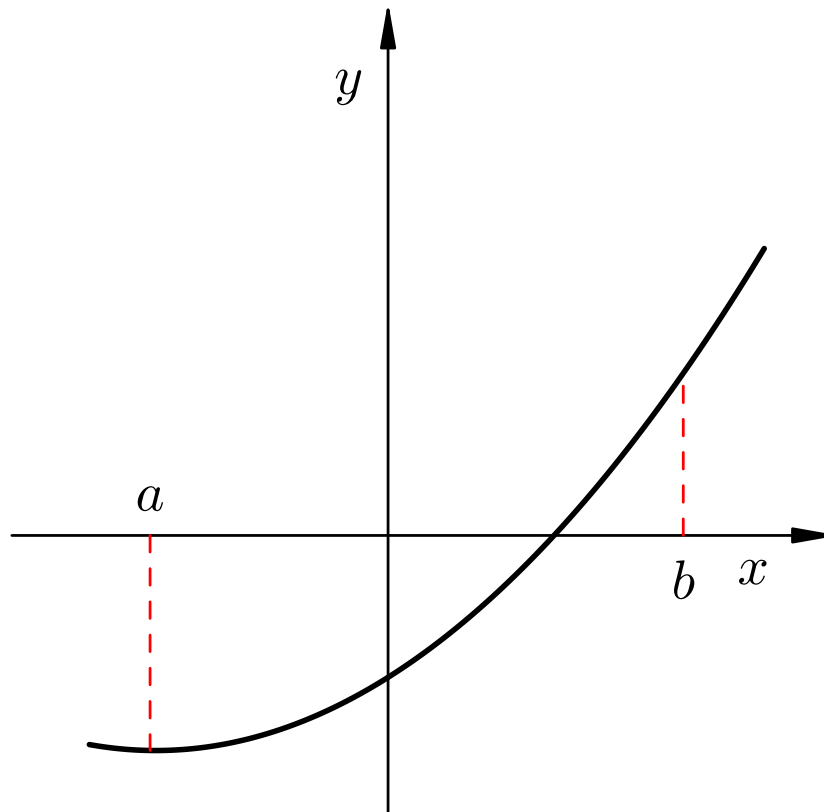
- Osnovna pretpostavka za početak algoritma raspolavljanja je **neprekidnost** funkcije  $f$  na intervalu  $[a, b]$ , s tim da u **rubovima** intervala vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

To znači da  $f$  ima na  $[a, b]$  **barem jednu** nultočku. Međutim,  $f$  može imati i **više** nultočaka unutra  $[a, b]$ . Na sljedećoj stranici su primjeri kad

- $f$  ima **tačno jednu** nultočku (lijevo).
- **više nultočaka**, točnije, **neparan** broj njih, brojeći kratnost (desno).

# Uvodno o metodi raspolavljanja



# Uvodno o metodi raspolavljanja

Ako je

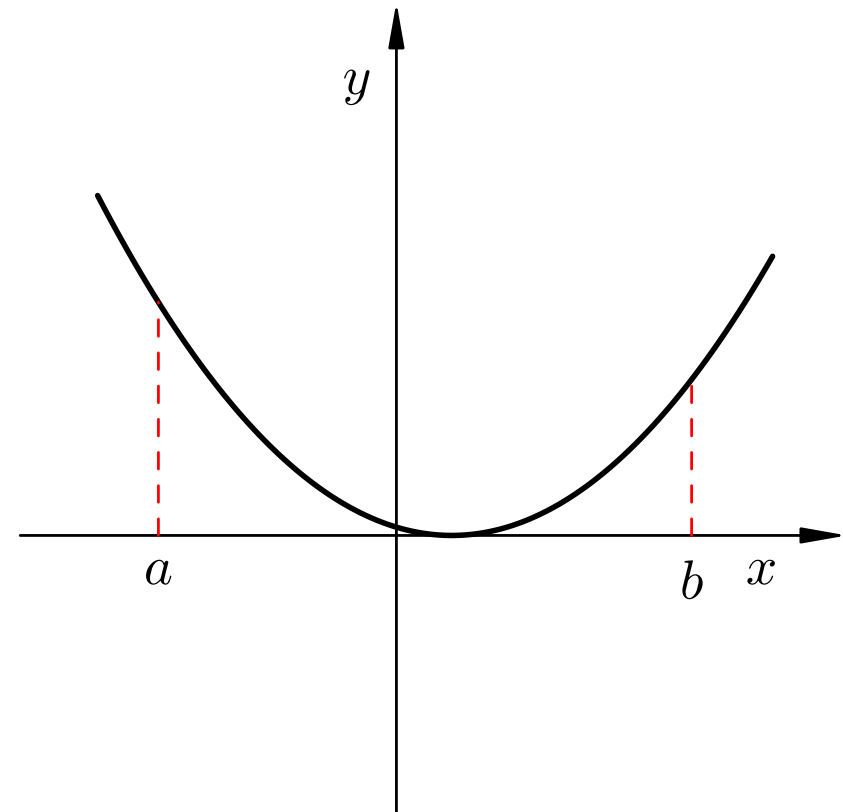
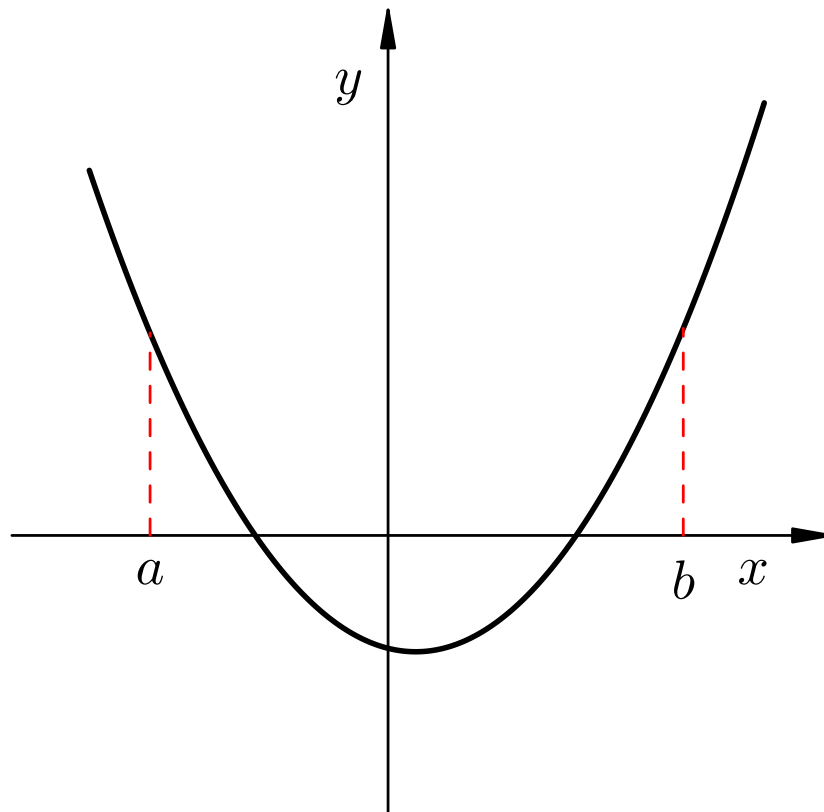
$$f(a) \cdot f(b) > 0,$$

to **ne mora** značiti da  **$f$  nema** nultočku unutar  $[a, b]$ .

Na primjer, moglo se dogoditi da smo **loše separirali** nultočke i da  **$f$**  ima unutar intervala  $[a, b]$

- **paran** broj nultočaka (slika lijevo),
- ili nultočku **parnog** reda (slika desno).

# Uvodno o metodi raspolavljanja





# Uvodno o metodi raspolavljanja

## Zaključak.

- Boljom separacijom nultočaka na lijevoj slici lako ćemo postići da je  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .
- Nultočke parnog reda **nemoguće** je **direktno** naći metodom bisekcije.

Kad ćemo govoriti o nultočkama **višeg** reda, onda ćemo pokazati kako treba **modificirati** funkciju tako da i metodom bisekcije možemo naći **višestruku** nultočku.

- **Umjesto**  $f$ , treba raditi s funkcijom  $f/f'$ .

# Algoritam

Označimo s  $\alpha$  pravu nultočku funkcije, a zatim s

•  $a_0 := a,$

•  $b_0 := b$  i

•  $x_0 :=$  polovište intervala  $[a_0, b_0]$ , tj.

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Ideja metode: u  $n$ -tom koraku algoritma

• konstruiramo interval  $[a_n, b_n]$  kojemu je

• duljina = polovina duljine prethodnog intervala,

• ali tako da je nultočka ostala unutar intervala  $[a_n, b_n]$ .

# Algoritam

Konstrukcija intervala  $[a_n, b_n]$  sastoji se u **raspolavljanju** intervala  $[a_{n-1}, b_{n-1}]$  točkom  $x_{n-1}$  i to tako da je

$$a_n = x_{n-1}, \quad b_n = b_{n-1} \quad \text{ako je} \quad f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) > 0,$$

$$a_n = a_{n-1}, \quad b_n = x_{n-1} \quad \text{ako je} \quad f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) < 0.$$

Uočimo da je **dovoljno** ispitivati koji predznak imamo za  $f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1})$ . Imamo **tri** mogućnosti:

- $f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) = 0$ , znači da je nultočka **upravo**  $x_{n-1}$ .
- $f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) < 0$  znači da je **barem jedna** nultočka **unutar**  $[a_{n-1}, x_{n-1}]$ .
- $f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) > 0$  znači da je **barem jedna** nultočka **unutar**  $[x_{n-1}, b_{n-1}]$ .

# Algoritam

Objasnimo posljednju činjenicu. Množenjem lijevih strana nejednakosti

$$f(a_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) < 0$$

$$f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) > 0$$

dobivamo

$$f(a_{n-1})^2 \cdot f(x_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) < 0,$$

pa mora biti

$$f(x_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) < 0.$$

# Konvergenција i zaustavljanje algoritma

**Tvrđnja.** Ako vrijede startne pretpostavke za metodu raspolavljanja, ona će **konvergirati** prema **nekoj** nultočki iz intervala  $[a, b]$ .

Nultočku smo našli sa zadanom **točnošću**  $\varepsilon$  ako je

$$|\alpha - x_n| \leq \varepsilon.$$

Kako ćemo znati da je to **ispunjeno**, ako **ne znamo**  $\alpha$ ?

- Budući da je  $x_n$  **polovište** intervala  $[a_n, b_n]$  i  $\alpha \in [a_n, b_n]$ , onda je

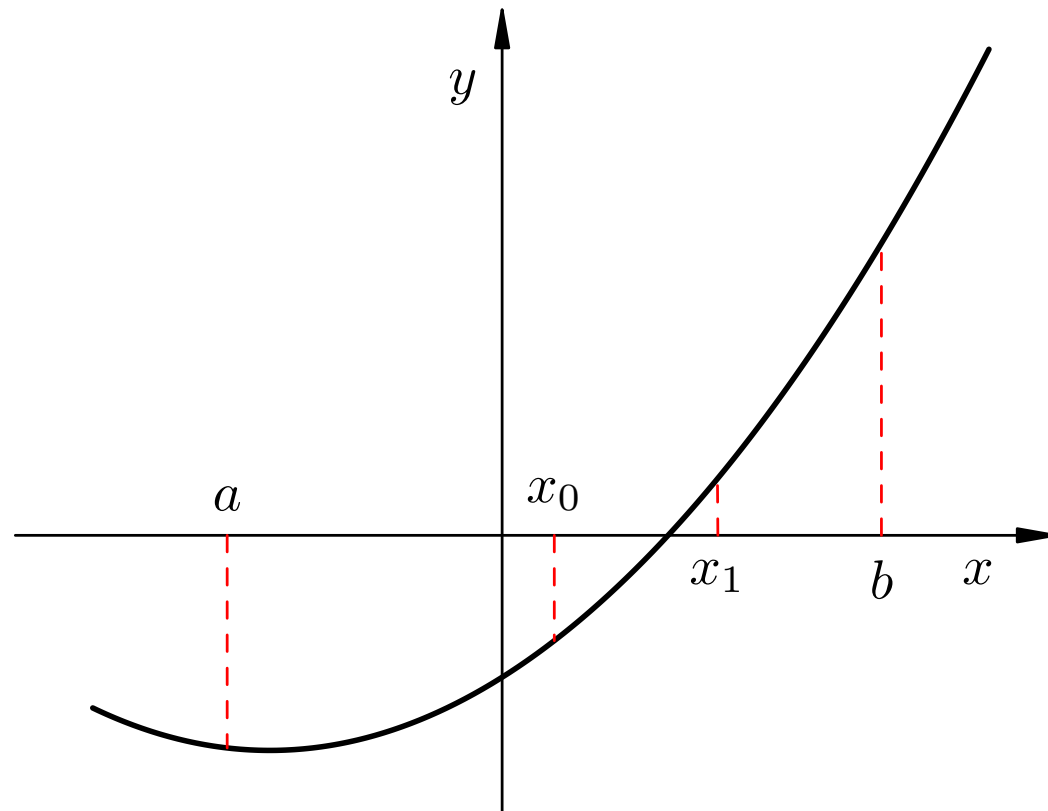
$$|\alpha - x_n| \leq b_n - x_n = \frac{1}{2} (b_n - a_n),$$

- pa je dovoljno zahtijevati

$$b_n - x_n \leq \varepsilon.$$

# Metoda raspolavljanja grafički

Grafički, metoda **raspolavljanja** izgleda ovako



# Algoritam

## Metoda raspolavljanja

```
x := (a + b) / 2;
dok je b - x > epsilon radi {
    ako je f(x) * f(b) < 0.0 tada {
        a := x
    };
    inače {
        b := x;
    };
    x := (a + b) / 2;
};
/* Na kraju je x ≈ alpha. */
```

## Ocjena greške

Iz konstrukcije metode, lako se izvodi **pogreška**  $n$ -te aproksimacije  $x_n$  nultočke  $\alpha$ . Vrijedi:

$$\begin{aligned} |\alpha - x_n| &\leq b_n - x_n = \frac{1}{2} (b_n - a_n) = \frac{1}{2^2} (b_{n-1} - a_{n-1}) \\ &= \dots = \frac{1}{2^{n+1}} (b - a). \end{aligned}$$

Nadalje, vrijedi  $(b - a)/2 = b - x_0 = x_0 - a$ , pa slijedi da je

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{1}{2^n} (b - x_0) = \frac{1}{2^n} (x_0 - a).$$

Ova relacija podsjeća na **linearnu konvergenciju**, ali se zdesna **ne** pojavljuje  $|\alpha - x_0|$ . Ipak, **desna** strana daje naslutiti da će konvergencija biti **dosta spora**.



# Ocjena greške

Relacija

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} (b - a)$$

omogućava da se **unaprijed** odredi koliko je **koraka** raspolavljanja potrebno da bismo postigli **točnost**  $\varepsilon$ .

Da osiguramo  $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$ , dovoljno je zahtijevati da je

$$\frac{1}{2^{n+1}} (b - a) \leq \varepsilon.$$

Množenjem prethodne jednadžbe s  $2^{n+1}$  i dijeljenjem s  $\varepsilon$  dobivamo

$$\frac{b - a}{\varepsilon} \leq 2^{n+1},$$

...

## Ocjena greške

a zatim logaritmiranje daje

$$\log(b - a) - \log \varepsilon \leq (n + 1) \log 2,$$

odnosno,

$$n \geq \frac{\log(b - a) - \log \varepsilon}{\log 2} - 1, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ako je funkcija  $f$  još i klase  $C^1[a, b]$ , tj. ako  $f$  ima neprekidnu prvu derivaciju, može se dobiti dinamička ocjena greške.

Po Teoremu srednje vrijednosti za funkciju  $f$  oko  $\alpha$ , imamo

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\xi)(x_n - \alpha),$$

pri čemu je  $\xi$  između  $x_n$  i  $\alpha$ .

## Ocjena greške

Prvo iskoristimo da je  $\alpha$  **nultočka**, tj.  $f(\alpha) = 0$ , a zatim uzmemo apsolutne vrijednosti obje strane. Dobivamo

$$|f(x_n)| = |f'(\xi)| |\alpha - x_n|.$$

Primijetite da je

$$|f'(\xi)| \geq m_1, \quad m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

Ako je  $m_1 > 0$ , uvrštavanjem ove ocjene izlazi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$

## Ocjena greške

Drugim riječima, ako želimo da je  $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$ , dovoljno je zahtijevati da je

$$\frac{|f(x_n)|}{m_1} \leq \varepsilon,$$

odnosno, da vrijedi

$$|f(x_n)| \leq m_1 \varepsilon.$$

Ovaj uvjet možemo provjeriti u **svakoj** iteraciji.

# Regula falsi

(metoda pogrešnog položaja)

# Uvodno o metodi pogrešnog položaja

Znamo da metoda **raspolavljanja** ima

- **sigurnu** konvergenciju, ali je vrlo **spora**.

**Regula falsi** ili metoda **pogrešnog položaja** je **prirodan** pokušaj **ubrzavanja** metode raspolavljanja. I ova metoda ima

- **sigurnu** konvergenciju,

uz **iste** pretpostavke kao u metodi raspolavljanja.

Pretpostavimo da je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- **neprekidna** na intervalu  $[a, b]$
- **i** da u **rubovima** intervala vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

# Ideja i skica algoritma

Ideja metode: Aproksimirajmo funkciju  $f$  pravcem koji prolazi točkama  $(a, f(a))$  i  $(b, f(b))$ .

Traženu nultočku  $\alpha$  tada možemo aproksimirati

• nultočkom tog pravca — označimo ju s  $x_0$ .

Uočite da pravac sigurno siječe os  $x$ , zbog  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .

Nakon toga,

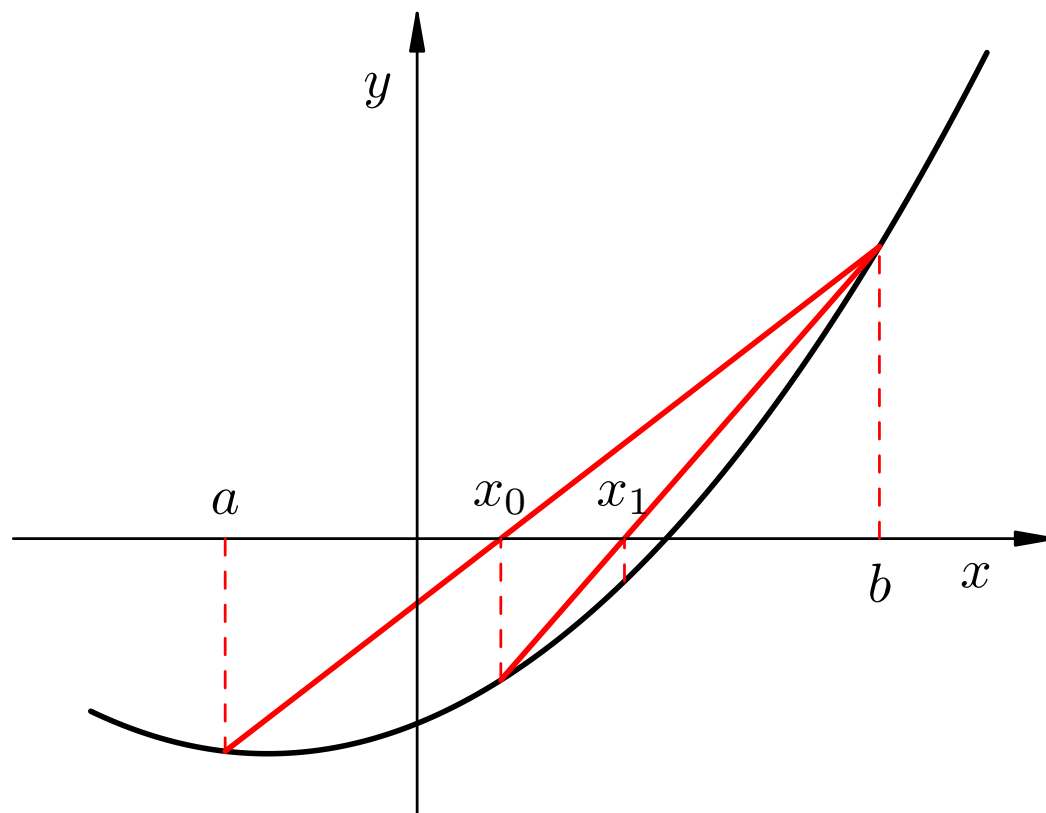
• pomaknemo ili točku  $a$ , ili točku  $b$  — u točku  $x_0$ ,

• ali tako da je nultočka ostala unutar novodobivenog intervala (test predznaka, kao kod raspolavljanja).

Postupak ponavljamo sve dok nismo postigli željenu točnost.

# Metoda pogrešnog položaja — grafički

Grafički, regula falsi ili metoda pogrešnog položaja izgleda ovako





## Regula falsi — osnovne ideje

Točka  $x_0$  dobiva se jednostavno iz jednadžbe **pravca**, pa je

$$x_0 = b - f(b) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}.$$

Dakle, **osnovne ideje** metode su:

- aproksimacija **pravcem**
- i “**zatvaranje**” nultočke u određeni — **sve manji** interval.

Iz slike zaključujemo da je to sasvim dobra ideja,

- za **monotone** i **konveksne** (ili **konkavne**) funkcije.

Nažalost, postoje ozbiljni **problemi** i s ovom metodom.

- Konvergencija je i dalje **linearna**, kao kod raspolavljanja.
- Može biti vrlo **spora** — sporija nego kod raspolavljanja.

# Regula falsi — red konvergencije

Izvedimo **red konvergencije** metode.

Uz oznaku za **prvu** podijeljenu razliku

$$f[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

formula za **prvu** aproksimaciju  $x_0$  glasi

$$x_0 = b - \frac{f(b)}{f[a, b]}.$$

Treba naći izraz za **grešku**  $\alpha - x_0$ .

Prethodnu relaciju **pomnožimo** s  $-1$  i **dodamo**  $\alpha$  na obje strane.

# Regula falsi — red konvergenције

Dobivamo redom

$$\begin{aligned}\alpha - x_0 &= \alpha - b + \frac{f(b)}{f[a, b]} = (\text{izlučimo } \alpha - b) \\ &= (\alpha - b) \left( 1 + \frac{f(b)}{(\alpha - b)f[a, b]} \right) = (\text{uvalimo } f(\alpha) = 0) \\ &= (\alpha - b) \left( 1 + \frac{f(b) - f(\alpha)}{(\alpha - b)f[a, b]} \right) = (\text{sredimo u } f[b, \alpha]) \\ &= (\alpha - b) \left( 1 - \frac{f[b, \alpha]}{f[a, b]} \right) = (\alpha - b) \frac{f[a, b] - f[b, \alpha]}{f[a, b]} \\ &= -(\alpha - b) (\alpha - a) \frac{f[a, b, \alpha]}{f[a, b]}.\end{aligned}$$

# Regula falsi — red konvergencije

Ako je funkcija  $f$  dovoljno **glatka**, onda

- **podijeljene razlike**  $f[a, b, \alpha]$  i  $f[a, b]$  možemo napisati preko **derivacija** funkcije  $f$ .

Ako je  $f$  klase  $C^1[a, b]$ , onda po Teoremu srednje vrijednosti imamo

$$f[a, b] = f'(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Na sličan način, ako je  $f$  klase  $C^2[a, b]$ , onda vrijedi

$$f[a, b, \alpha] = \frac{1}{2} f''(\zeta),$$

gdje se  $\zeta$  nalazi između **minimuma** i **maksimuma** vrijednosti  $a$ ,  $b$  i  $\alpha$ . Zbog  $\alpha \in [a, b]$  to opet daje  $\zeta \in [a, b]$ .

Sad ove dvije relacije uvrstimo u izraz za grešku.

## Regula falsi — red konvergencije

Za funkciju  $f \in C^2[a, b]$ , dobivamo sljedeći izraz za **grešku**

$$\alpha - x_0 = -(\alpha - b)(\alpha - a) \frac{f''(\zeta)}{2f'(\xi)}.$$

Uočimo još da, zbog  $\alpha \in [a, b]$ , vrijedi

$$-(\alpha - b)(\alpha - a) = (b - \alpha)(\alpha - a) > 0.$$

Da bismo **pojednostavnili** analizu, pretpostavimo da

- **prva** derivacija  $f'$  i **druga** derivacija  $f''$  imaju **konstantan** predznak na  $[a, b]$  (pozitivne ili negativne).

Onda je  $\alpha$  **jedina** nultočka funkcije  $f$  u intervalu  $[a, b]$ , jer je  $f$  **monotona**.

## Regula falsi — red konvergencije

U nastavku gledamo samo **jedan** od **četiri** moguća slučaja za predznake  $f'$  i  $f''$ .

Pretpostavimo da je  $f' > 0$  i  $f'' > 0$  na  $[a, b]$ , tj. da je

•  $f$  monotono **rastuća** i **konveksna** na  $[a, b]$ .

U tom slučaju,

• **spojnica** točaka  $(a, f(a))$  i  $(b, f(b))$  uvijek se nalazi **iznad** grafa funkcije  $f$ , kao na prethodnoj slici.

Uvrštavanjem podataka o **predznaku** prve i druge derivacije u

$$\alpha - x_0 = (b - \alpha) (\alpha - a) \frac{f''(\zeta)}{2f'(\xi)},$$

dobivamo da je **desna** strana **veća** od 0, tj.  $\alpha > x_0$ .

## Regula falsi — red konvergencije

Što sve slijedi iz  $\alpha > x_0$ ?

Po pretpostavci, funkcija  $f$  monotonno **raste** na  $[a, b]$ , pa je

$$f(a) < f(x_0) < f(\alpha) = 0 < f(b).$$

To znači da treba “**pomaknuti**”  $a$  za **sljedeći** korak metode, jer  $f(a)$  i  $f(x_0)$  imaju **isti** predznak. Dakle, imamo

•  $a_1 := x_0$ , a  $b$  ostaje **fiksni**,  $b_1 := b$ .

Potpuno **isto** će se dogoditi i u **svim** narednim koracima.

Drugim riječima,

- aproksimacije  $x_n$  neprestano ostaju **lijevo** od nultočke  $\alpha$ ,
- tj. pomiče se **lijevi** rub intervala,  $a_n := x_{n-1}$ ,
- a **desni** rub  $b$  ostaje **fiksni**.

## Regula falsi — red konvergencije

Kad to uvažimo u relaciji za **grešku**, za proizvoljnu iteraciju  $x_n$  dobivamo

$$\alpha - x_n = (b - \alpha) (\alpha - a_n) \frac{f''(\zeta_n)}{2f'(\xi_n)}.$$

Uzimanjem apsolutnih vrijednosti zdesna i slijeva, slijedi da u ovom slučaju

• regula falsi **konvergira linearno**, jer je  $a_n = x_{n-1}$ .

Sasvim analogno se analiziraju i ostala **tri** slučaja za **predznake**. Na primjer, ako je  $f$  **konveksna**, tj.  $f'' > 0$ , ali monotonno **pada**, tj.  $f' < 0$ ,

• aproksimacija  $x_n$  je uvijek **desno** od  $\alpha$ ,

• a uvijek se **pomiče desni** rub  $b$ .



## Regula falsi — red konvergencije

Za metodu **bisekcije** dobili smo **sličnu** relaciju za grešku, samo je **faktor** bio  $1/2$ .

Usporedbom izraza za **greške** zaključujemo da

- **nije teško** konstruirati **primjere** kad je metoda **bisekcije** **brža** no **regula falsi**.

Probajte naći takav primjer!