Numeričke metode u fizici, 4. kolokvij 13. 07. 2009.

1. Trokut e u globalnom xy sustavu koordinata u ravnini ima koordinate vrhova (u cm) $i(3,3)$, $j(7,0)$ i $k(6,4)$, a u trokutu je smješten koncentrirani izvor topline jačine $Q = 52\,\delta(x-5)\delta(y-2)\mathrm{W/cm^2}$. Nađite distribuciju topline koncentriranog izvora po vrhovima trokuta uz pretpostavku aproksimacije temperature linearnim simplex elementom, tj. izračunajte
$$\int\int_{(e)} [\mathrm{N}]^{\mathrm{T}} \mathrm{Q}\, \mathrm{dxdy}$$
gdje je [N] vektor funkcija baze za linearni simplex element.

2. Za jednadžbu
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f \qquad \text{u } \Omega$$
uz homogene rubne i početne uvjete napišite slabu (Galerkinovu) formulaciju, te pokažite kako numerička formulacija vodi na sustav običnih linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima. Opišite prednosti i mane Eulerove metode unaprijed i Eulerove metode unazad za rješavanje dobivenog sustava običnih linearnih diferencijalnih jednadžbi.

3. Napišite numeričku aproksimaciju pomoću metode konačnih elemenata za problem vlastitih frekvencija
$$\begin{aligned} \mathrm{div}(k(x)\cdot \mathrm{grad}\, u(x)) &= \lambda\, u(x), \quad x \in \Omega, \\ u|_{\delta\Omega} &= 0, \end{aligned}$$
i pokažite da ta aproksimacija vodi na algebarski problem svojstvenih vrijednosti.

4. Metodom karakteristika riješite problem
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 1 \qquad t \geq 0, \quad x \in \mathcal{R}$$
uz početni uvjet
$$u(x,0) = \begin{cases} f_1(x), & x < 0, \\ f_2(x), & x \geq 0. \end{cases}$$
Pretpostavljamo da je $f(x)$ neprekidna s desna. Što se događa s prekidom u početnom uvjetu za $t > 0$?