Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno–matematički fakultet–Matematički odjel

Tina Bosner

Polarne forme i ubacivanje čvorova splajnova

Magistarski rad

Voditelj rada: dr.sc. Mladen Rogina

Zagreb, 2002.

Sadržaj

Poglavlje 1

Polarne forme i ubacivanje čvorova

1.1 Uvod

Koristeći dobro poznatu činjenicu da su polinomi stupnja p i simetrična p-afina preslikavanja ekvivalentni jedni drugima, napravit ćemo sasvim nove dokaze već poznatih teorema. Zahvaljujući njihovoj geometrijskoj prirodi, ti su dokazi kraći od postojećih i mogu dati bolji uvid u osnovnu teoriju B-splajnova (v. [16]). Prvo ćemo dati definiciju i osnovna svojstva polarnih formi, te de Casteljau-ov algoritam (v. [10]) za njihovo računanje, a zatim pomoću njih na novi način izraziti de Boor-ove točke B-splajn krivulje, te izvesti Curry-Schoenberg-ov teorem i de Boor-ov algoritam. Na kraju ćemo proučiti ubacivanje čvorova iz perspektive polarnih formi, i dati Boehm-ov i Oslo algoritam (v. [1]) kao primjere. Kao dodatak, ukratko ćemo prodiskutirati svojstvo smanjenja varijacije B-splajnova i de Boor-Fix-ovu formu dualnog funkcionala (v. [2]).

1.2 "Blossoming" princip

Prisjetimo se da funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ zovemo *afina* ako ona čuva afinu kombinaciju, tj. ako f zadovoljava

$$f\left(\sum_i a_i \cdot u_i\right) = \sum_i a_i \cdot f(u_i) \tag{1.1}$$

za realne brojeve $a_1, \dots, a_n, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ uz $\sum_i a_i = 1$. Funkciju $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^d$ zovemo *p-afina* (ili samo *multiafina*) ako je afina u svakom pojedinom argumentu. Prema tome, f je *p-afina* ako je preslikavanje

$$f_{a_1,\dots,\hat{a}_j,\dots,a_p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d : \quad u \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, u, a_{j+1}, \dots, a_p)$$

afino. Konačno, funkcija $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^d$ zove se *simetrična* ako čuva vrijednost kod bilo koje permutacije svojih parametara.

Teorem 1.1 ("Blossoming" princip) *Za svaki polinom $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stupnja p postoji jedinstveno simetrično p-afino preslikavanje $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ koje zadovoljava*

$$f(\underbrace{u, \dots, u}_{p}) = F(u)$$

za svaki $u \in \mathbb{R}$. Nadalje, q-ta derivacija od F dana je formulom

$$F^{(q)}(u) = \frac{p!}{(p-q)!} \sum_{i=0}^{q} \binom{q}{i} (-1)^{q-i} f(\underbrace{u, \dots, u}_{p-i}, \underbrace{u+1, \dots, u+1}_{i}). \tag{1.2}$$

Dokaz: Označimo sa $\sigma_k(u_1, \dots, u_p)$ k-tu *elementarnu simetričnu funkciju* od p parametara, tj. polinom sa p varijabli dobiven odabirom k različitih u_i-eva, formiranjem njihovog produkta, i zatim sumiranjem svih takvih $\binom{p}{k}$ mogućih kombinacija. Primijetimo da je σ_k p-afina i simetrična, te da je njezina dijagonala dana sa $\sigma_k(t, \dots, t) = \binom{p}{k} t^k$.

Ako polinom p-tog stupnja $F(t)$ prikažemo kao linearnu kombinaciju potencija od t, recimo $F(t) = \sum_{i=0}^{p} a_i t^i$, traženo se preslikavanje f dobiva tako da svaki t^k zamjenimo sa $\sigma_k(u_1, \dots, u_p)/\binom{p}{k}$, čime smo pokazali egzistenciju od f.

Jednadžba (1.2) dobije se indukcijom, korištenjem simetričnosti i multiafinosti od f. Pokažimo prvo da (1.2) vrijedi za prvu derivaciju:

$$\begin{aligned}
F'(u) &= \lim_{t \to 0} \frac{F(u+t) - F(u)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(u+t, \dots, u+t) - f(u, \dots, u)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f((1-t)u + t(u+1), \dots, u+t) - f(u, \dots, u)}{t}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,((1-t)f(u,u+t,\ldots,u+t) + t\,f(u+1,u+t,\ldots,u+t) \\
&\qquad -f(u,\ldots,u)) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Bigg(\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}(1-t)^i t^{p-i} f(\underbrace{u,\ldots,u}_{i},\underbrace{u+1,\ldots,u+1}_{p-i}) \\
&\qquad -f(u,\ldots,u)\Bigg) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Bigg(\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{i}(1-t)^i t^{p-i} f(\underbrace{u,\ldots,u}_{i},\underbrace{u+1,\ldots,u+1}_{p-i}) \\
&\qquad +(1-t)^p f(u,\ldots,u) - f(u,\ldots,u)\Bigg) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Bigg(\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{i}(1-t)^i t^{p-i} f(\underbrace{u,\ldots,u}_{i},\underbrace{u+1,\ldots,u+1}_{p-i}) \\
&\qquad +(-pt+\binom{p}{2}t^2 - \ldots + (-1)^p t^p) f(u,\ldots,u)\Bigg) \\
&= \lim_{t\to 0} \binom{p}{p-1}(1-t)^{p-1} f(u,\ldots,u,u+1) - p\,f(u,\ldots,u) \\
&= p\,f(u,\ldots,u,u+1) - p\,f(u,\ldots,u).
\end{aligned}
$$

Analogno, ali uz podulji račun, dokazuje se i korak indukcije.

Pretpostavimo sada da vrijedi $f(u,\ldots,u) = F(u) = g(u,\ldots,u)$ za svaki $u \in \mathbb{R}$, gdje je g također simetrična p-afina funkcija, i neka je $(u_1,\ldots,u_p)$ proizvoljna uređena p-torka. Indukcijom po i iz 1.2 dobiva se da je

$$
f(\underbrace{u,\ldots,u}_{p-i},\underbrace{u+1,\ldots,u+1}_{i}) = g(\underbrace{u,\ldots,u}_{p-i},\underbrace{u+1,\ldots,u+1}_{i}) \tag{1.3}
$$

za $i = 0,\ldots,p$. Ako u_1 raspišemo kao

$$
u_1 = (u+1-u_1)\cdot u + (u_1 - u)\cdot(u+1),
$$

tj. kao afinu kombinaciju od u i $u+1$, zbog p-afinosti dobiva se da je

$$
f(u_1,u_2,\ldots,u_p) = (u+1-u_1)\cdot f(u,u_2,\ldots,u_p) + (u_1-u)\cdot f(u+1,u_2,\ldots,u_p).
$$

Nastavimo li na isti način, raspisujući svaki u_i kao afinu kombinaciju od u i $u+1$, koristeći p-afinost i simetriju od f, dobit ćemo $f(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ kao linearnu kombinaciju od $f(\underbrace{u, \ldots, u}_{p-i}, \underbrace{u+1, \ldots, u+1}_{i})$ za $i = 0, \ldots, p$. Ponovimo li isti postupak za g, dobit ćemo da je $g(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ također linearna kombinacija od $g(\underbrace{u, \ldots, u}_{p-i}, \underbrace{u+1, \ldots, u+1}_{i})$ sa istim koeficijentima kao i kod f, pa je zbog (1.3)

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_p) = g(u_1, u_2, \ldots, u_p),$$

što dokazuje jedinstvenost. ■

Za dani polinom F, *blossom ili polarna forma* je jedinstveni simetrični multiafini polinom f iz Teorema 1.1.

Primjer: Promotrimo polinom $F(t) = t^3 + 3t^2 - 6t - 8$. Prema konstrukciji iz dokaza Teorema 1.1 polarna forma od F jednaka je

$$\begin{aligned} f(u, v, w) &= 1 \cdot uvw + 3 \cdot \frac{uv + uw + vw}{3} - 6 \cdot \frac{u + v + w}{3} - 8 \\ &= uvw + uv + uw + vw - 2u - 2v - 2w - 8. \end{aligned}$$

Posebno nas zanima slučaj parametarskih krivulja. Neka je $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *polinomna parametarska krivulja.* Tada je p-polarna forma od F funkcija $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ kod koje je svaka komponenta f_i polarna forma komponente F_i. Iz Teorema 1.1 također slijedi da je p-polarna forma jedinstvena simetrična p-afina funkcija $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ za koju vrijedi $F(u) = f(u, \ldots, u)$.

Korolar 1.2 *Neka je F polinom stupnja p definiran na intervalu $[s, t]$, i neka je f njegova polarna forma. Definirajmo da je*

$$b_i := f(\underbrace{s, \ldots, s}_{p-i}, \underbrace{t, \ldots, t}_{i}). \tag{1.4}$$

Tada je

$$F(u) = \sum_{i=0}^{p} b_i \cdot B_i^p(u) \tag{1.5}$$

Bezier-ova reprezentacija od F, gdje $B_i^p(u)$ za $i = 0, \ldots, p$ čine Bernstein-ovu bazu, a $(b_i)_{i=0}^p$ nazivamo Bezier-ovim točkama.

Dokaz: Raspisujući

$$u = \frac{t-u}{t-s} \cdot s + \frac{u-s}{t-s} \cdot t$$

kao afinu kombinaciju od s i t dobivamo

$$\begin{aligned} f(u,\ldots,u) &= \frac{t-u}{t-s} \cdot f(s,u,\ldots,u) + \frac{u-s}{t-s} \cdot f(t,u,\ldots,u) \qquad (1.6) \\ &= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \left(\frac{t-u}{t-s}\right)^{p-i} \left(\frac{u-s}{t-s}\right)^{i} f(\underbrace{s,\ldots,s}_{p-i},\underbrace{t,\ldots,t}_{i}) \\ &= \sum_{i=0}^{p} b_i \cdot B_i^p(u). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

de Casteljau-ov algoritam: Kao posljedica Korolara 1.2, ovaj algoritam na vrlo jednostavan način računa $F(u)$ iz Bezier-ovih točaka. Radi jednostavnosti promotrit ćemo ga na primjeru kubične parametarske krivulje F. Neka je f njezina polarna forma, i pretpostavimo da znamo četiri polarne vrijednosti $f(s,s,s)$, $f(s,s,t)$, $f(s,t,t)$ i $f(t,t,t)$ iz kojih želimo izračunati vrijednost $F(u) = f(u,u,u)$ za neki $u \in [s,t]$.

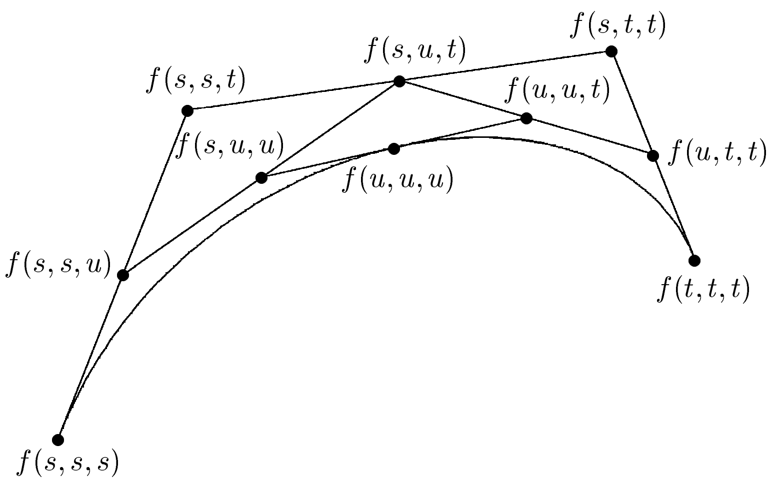
Pošto je je polarna forma f afina u trećem argumentu, pravac koji prolazi kroz točke $f(s,s,s)$ i $f(s,s,t)$ mora biti pravac $f(s,s,v)$ za sve v, a točka $f(s,s,u)$ mora se nalaziti na tom pravcu između $f(s,s,s)$ i $f(s,s,t)$. $f(s,s,u)$ se naravno računa analogno kao u (1.6), koristeći afinost. Točke $f(s,u,t)$ i $f(u,t,t)$ konstruiraju se na isti način. Ove tri afine interpolacije čine prvu fazu algoritma.

U drugoj fazi uz afinost koristimo i simetričnost. Pošto je f simetrična, $f(s,s,u)$ koji smo dobili u prvoj fazi, može se također zapisati i kao $f(s,u,s)$, a zbog afinosti od f u trećem argumentu, točka $f(s,u,u)$ konstruira se kao afina kombinacija od $f(s,u,s)$ i $f(s,u,t)$. Točka $f(u,u,t)$ dobiva se na isti način.

U našem slučaju sa trećom fazom algoritam završava, i to konstrurajući $f(u,u,u)$ interpolacijom između $f(s,u,u) = f(u,u,s)$ i $f(u,u,t)$.

Napomenimo samo da vrijednost prametra u općenito ne mora ležati u intervalu $[s,t]$.

Ovaj algoritam se vrlo jednostavno proširuje i na polinome n-tog stupnja za bilo koji n. Ako je F polinom n-tog stupnja, algoritam će se sastojati od n faza afinih interpolacija, od kojih će svaka dodavati novu kopiju zadanog



Slika 1.1: Kubična Bezier-ova krivulja: Bezier-ove točke i de Casteljau-ov algoritam

argumenta u na listu polarnih argumenata. Nakon n-te faze, konstruirali smo traženu dijagonalnu vrijednost $f(u,\ldots,u)=F(u)$.

Napomenimo na kraju da se de Casteljau-ov algoritam može koristiti i za računanje bilo koje polarne vrijednosti od F, a ne samo dijagonalne. Da bi izračunali polarnu vrijednost $f(u_1,\ldots,u_n)$ kontroliramo svaku fazu afinih interpolacija sa drugim polarnim argumentom, primjerice u i-toj fazi sa u_i. $\blacksquare$

Teorem 1.3 *Pretpostavimo da su dana dva polinoma $F:(r,s)\to\mathbb{R}^d$ i $G:(s,t)\to\mathbb{R}^d$ stupnja p, sa pripadajućim polarnim formama f i g. Tada je spoj između F i G u točki s C^q-neprekidan ako i samo ako*

$$f(\underbrace{u_1,\ldots,u_q}_{q},\underbrace{s,\ldots,s}_{p-q})=g(\underbrace{u_1,\ldots,u_q}_{q},\underbrace{s,\ldots,s}_{p-q}) \tag{1.7}$$

vrijedi za svaki niz $u_1,\ldots,u_q\in\mathbb{R}$, tj. ako se f i g podudaraju u svim p-torkama argumenata koje sadrže s barem $p-q$ puta.

Dokaz: U jednom smjeru dokaz slijedi direktno iz (1.2). Pretpostavimo sada da je $F^{(i)}(s)=G^{(i)}(s)$ za $0\leqslant i\leqslant q$. Indukcijom po i , ponovno iz (1.2), kao u dokazu Teorema 1.1 dobiva se da je

$$f(\underbrace{s,\ldots,s}_{p-i},\underbrace{s+1,\ldots,s+1}_{i})=g(\underbrace{s,\ldots,s}_{p-i},\underbrace{s+1,\ldots,s+1}_{i})$$

za $0 \leqslant i \leqslant q$. Koristeći Korolar 1.2 prethodna jednakost zapravo postaje ekvivalentna tvrdnji da dvije Bezier-ove krivulje F_* i G_* definirane na intervalu $[s, s+1]$ uz njihove pripadajuće polarne forme

$$f_* : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^d : \quad (u_1, \dots, u_q) \mapsto f(\underbrace{u_1, \dots, u_q}_{q}, \underbrace{s, \dots, s}_{p-q})$$

i

$$g_* : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^d : \quad (u_1, \dots, u_q) \mapsto g(\underbrace{u_1, \dots, u_q}_{q}, \underbrace{s, \dots, s}_{p-q})$$

imaju iste Bezier-ove točke. Ali, u tom slučaju su F_* i G_* jednake, pa slijedi da su i njihove polarne forme f_* i g_* jednake, što i daje tvrdnju teorema. ■

1.3 Polarna forma B-splajna

Neka je $T = (t_0 = \dots = t_p, t_{p+1}, \dots, t_m, t_{m+1} = \dots = t_{m+p+1})$ nepadajući niz realnih brojeva uz $t_i < t_{i+p+1}$. Promatrat ćemo normalizirane B-splajnove N_i^p stupnja p nad T definirane pomoću rekurzije (v. [3], [4])

$$N_i^0(u) := \begin{cases} 1 \text{ ako je } t_i \leqslant u < t_{i+1}, \\ 0 \text{ inače} \end{cases} \tag{1.8}$$

i

$$N_i^r(u) := \frac{u - t_i}{t_{i+r} - t_i} \cdot N_i^{r-1}(u) + \frac{t_{i+r+1} - u}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} \cdot N_{i+1}^{r-1}(u) \tag{1.9}$$

za $1 \leqslant r \leqslant p$.

Iz definicije slijedi da su funkcije N_i^p po dijelovima polinomi stupnja p sa mogućim prekidima u t_i, a indukcijom se lagano može provjeriti da N_i^p ima lokalan nosač, tj.

$$N_i^p(u) = 0 \quad \text{za } u \notin [t_i, t_{i+p+1}], \tag{1.10}$$

i da funkcije N_i^p čine particiju jedinice, tj.

$$N_i^p(u) \geqslant 0 \quad \text{i} \quad \sum_i N_i^p(u) = 1. \tag{1.11}$$

Sada ćemo primjeniti polarne forme na rekurzije (1.8),(1.9). Za $t_j < t_{j+1}$ restrikcija od N_i^p na interval $I_j := [t_j, t_{j+1})$ jednaka je nekom polinomu $N_{i,j}^p$. Slijedeći teorem prikazuje kako se izračunava njegova polarna forma:

Teorem 1.4 *Uz gore navedene oznake, polarna forma $n_{i,j}^r$ od $N_{i,j}^r$ zadovoljava rekurziju*

$$n_{i,j}^0(\ ) = \delta_{i,j} \tag{1.12}$$

i

$$\begin{aligned} n_{i,j}^r(u_1, \ldots, u_r) = & \frac{u_r - t_i}{t_{i+r} - t_i} \cdot n_{i,j}^{r-1}(u_1, \ldots, u_{r-1}) \\ & + \frac{t_{i+r+1} - u_r}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} \cdot n_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \ldots, u_{r-1}) \end{aligned} \tag{1.13}$$

za $1 \leqslant r \leqslant p$.

Dokaz: Indukcijom dobivamo da je $n_{i,j}^r$ definiran pomoću (1.12),(1.13) afin u svakoj varijabli $u_1, \ldots, u_{r-1}$, a direktan račun pokazuje da je $n_{i,j}^r$ afin i u u_r. Indukcija također pokazuje da je $n_{i,j}^r$ simetričan u $u_1, \ldots, u_{r-1}$. Dvostruka upotreba (1.13) na $n_{i,j}^r$, kao i na $n_{i,j}^{r-1}$ i $n_{i+1,j}^{r-1}$, dovodi do toga da je $n_{i,j}^r$ simetričan i u u_r, u_{r-1}, a odatle da je zapravo simetričan po svim $u_1, \ldots, u_r$. Pošto je očito $N_{i,j}^r$ dijagonala od $n_{i,j}^r$, iz Teorema 1.1 slijedi da je $n_{i,j}^r$ jedinstvena r-afina polarna forma od $N_{i,j}^r$, čime je teorem dokazan. ■

Korolar 1.5 *Za $t_j < t_{j+1}$ i $j - r \leqslant l \leqslant j$ polarna forma $n_{i,j}^r$ od $N_{i,j}^r$ zadovoljava jednakost*

$$n_{i,j}^r(t_{l+1}, \ldots, t_{l+r}) = \delta_{i,l}. \tag{1.14}$$

Dokaz: Koristit ćemo indukciju po r u (1.13). Za $l > j - r$ dobivamo:

$$\begin{aligned} n_{i,j}^r(t_{l+1}, \ldots, t_{l+r}) &= \frac{t_{l+r} - t_i}{t_{i+r} - t_i} \cdot \delta_{i,l} + \frac{t_{i+r+1} - t_{l+r}}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} \cdot \delta_{i+1,l} \\ &= \begin{cases} \frac{t_{i+r} - t_i}{t_{i+r} - t_i} \cdot 1 + 0, & l = i \\ 0 + \frac{t_{i+r+1} - t_{i+r+1}}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} \cdot 1, & l = i + 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\ &= \delta_{i,l}, \end{aligned}$$

dok za $l = j - r$, uzimajući da t_{l+1} kontrolira afinu kombinaciju te koristeći simetričnost, slijedi:

$$\begin{aligned} n_{i,j}^r(t_{l+2}, \ldots, t_{l+r}, t_{l+1}) &= \frac{t_{l+1} - t_i}{t_{i+r} - t_i} \cdot \delta_{i,l+1} + \frac{t_{i+r+1} - t_{l+1}}{t_{i+r+1} - t_i} \cdot \delta_{i+1,l+1} \\ &= \begin{cases} \frac{t_i - t_i}{t_{i+r} - t_i} \cdot 1 + 0, & l = i - 1 \\ 0 + \frac{t_{i+r+1} - t_{i+1}}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} \cdot 1, & l = i \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\ &= \delta_{i,l}. \end{aligned}$$

Ako nije ispunjen niti jedan od ova dva slučaja, r mora biti jednak nuli, pa rezultat slijedi iz (1.12). ∎

Prije nego što izračunamo de Boor-ove točke, iskoristit ćemo do sada obrađene činjenice o B-splajnovima i polarnim formama da bi dokazali da B-splajn rekurzija (1.8),(1.9) rezultira glatkom funkcijom N_i^p (v. [4]):

Korolar 1.6 *Neka je $s = t_{j+1} = \cdots = t_{j+\mu}$ čvor multipliciteta $\mu \leqslant p+1$ iz T. Tada je N_i^p $C^{p-\mu}$ neprekidna u s.*

Dokaz: Promatrat ćemo pripadajuće polarne forme $n_{i,j}^p$ i $n_{i,j+\mu}^p$ od restrikcija $N_{i,j}^p$ i $N_{i,j+\mu}^p$ na nepraznim otvorenim intervalima (t_j, t_{j+1}) i $(t_{j+\mu}, t_{j+\mu+1})$. Tada jednadžba (1.14) dovodi do

$$\begin{aligned} n_{i,j}^{\mu}(\underbrace{s,\ldots,s}_{\mu}) &= n_{i,j}^{\mu}(t_{j+1},\ldots,t_{j+\mu}) \\ &= \delta_{i,j} \ = \ n_{i,j+\mu}^{\mu}(t_{j+1},\ldots,t_{j+\mu}) \\ &= n_{i,j+\mu}^{\mu}(\underbrace{s,\ldots,s}_{\mu}) \end{aligned}$$

za svaki i. Koristeći (1.13) dobivamo

$$n_{i,j}^p\Big(\underbrace{u_1,\ldots,u_{p-\mu}}_{p-\mu},\underbrace{s,\ldots,s}_{\mu}\Big) = n_{i,j+\mu}^p\Big(\underbrace{u_1,\ldots,u_{p-\mu}}_{p-\mu},\underbrace{s,\ldots,s}_{\mu}\Big),$$

pa Teorem 1.3 povlači tvrdnju korolara. ∎

Nadalje, ako B-splajn krivulju prikažemo u rastavu po bazi B-splajnova

$$F(u) = \sum_{i=0}^{m} d_i \cdot N_i^p(u),$$

gdje d_i za $i = 0,\ldots,m$ nazivamo *de Boor-ovim točkama*, tada d_i želimo izraziti pomoću polarnih formi. Za $t_j < t_{j+1}$ restrikcija od F na neprazan interval $I_j := [t_j, t_{j+1})$ jednaka je nekom polinomu F_j sa polarnom formom f_j.

Teorem 1.7 *Za $t_j < t_{j+1}$ i $j-p \leqslant l \leqslant j$ de Boor-ove točke d_l dane su jednadžbom*

$$d_l = f_j(t_{l+1},\ldots,t_{l+p}). \tag{1.15}$$

Napomena. Zahvaljujući pretpostavci da T ne sadrži točke multipliciteta $\mu > p+1$, za svaki $0 \leqslant l \leqslant m$ postoji neki indeks j takav da zadovoljava tražene nejednakosti $t_j < t_{j+1}$ i $j-p \leqslant l \leqslant j$.

Dokaz: Prema (1.10), restrikcija F_j od F na neprazni interval $I_j = [t_j, t_{j+1})$ dana je sa

$$F_j(u) = \sum_{i=j-p}^{j} d_i \cdot N_{i,j}^p(u),$$

pa zbog jedinstvenosti polarne forme dobivamo

$$f_j(u_1, \ldots, u_p) = \sum_{i=j-p}^{j} d_i \cdot n_{i,j}^p(u_1, \ldots, u_p).$$

Nadalje, jednakost (1.15) direktno slijedi iz Korolara 1.5. ■

Sada je moguće dati vrlo kratak dokaz poznatog rezultata [3] koji kaže da se svaka po dijelovima polinomijalna funkcija može prikazati kao linearna kombinacija B-splajnova.

Teorem 1.8 (Curry-Schoenberg) *Promatramo niz čvorova $T = (t_0 = \cdots = t_p, t_{p+1}, \ldots, t_m, t_{m+1} = \cdots = t_{m+p+1})$ gdje je svaki čvor t_i multipliciteta $\mu_i \leqslant p+1$. Tada su normalizirani B-splajnovi $\{N_i^p \mid i = 0, \ldots, m\}$ nad T linearno nezavisni, a prostor $\mathcal{S}_T^p := \{\sum_{i=0}^m d_i \cdot N_i^p \mid d_i \in \mathbb{R}\}$ podudara se sa prostorom $\mathcal{P}_{T,p-\mu}^p$ svih po dijelovima polinomnih funkcija stupnja p sa čvorovima t_i koje su $C^{p-\mu_i}$-neprekidne u t_i.*

Dokaz: Pošto $\mathcal{P}_{T,p-\mu}^p$ ima dimenziju $m+1$, a $\mathcal{S}_T^p$ je sadržan u $\mathcal{P}_{T,p-\mu}^p$ po Korolaru 1.6, preostaje nam samo sa dokažemo da su B-splajnovi $\{N_i^p \mid i = 0, \ldots, m\}$ linearno nezavisni. Pretpostavimo linearnu kombinaciju $F = \sum_{i=0}^m d_i \cdot N_i^p \equiv 0$. Tada F_j, a time i f_j, iščezavaju za svaki segment $[t_j, t_{j+1})$. Tada prema Teoremu 1.7 imamo $d_i = 0$ za $i = 0, \ldots, m$, pa tvrdnja slijedi. ■

Nadalje, latit ćemo se de Boor-ovog algoritma i Boehm-ovog algoritma za ubacivanje novog čvora u B-splajn krivulju.

Teorem 1.9 (de Boor-ov algoritam) *Neka je $F(u)$ B-splajn krivulja stupnja p nad T. Za $t_l \leqslant u < t_{l+1}$ promatrajmo rekurziju*

$$d_i^0 := d_i \tag{1.16}$$

i

$$d_i^r := \left(1 - \frac{u - t_i}{t_{i+p+1-r} - t_i}\right) \cdot d_{i-1}^{r-1} + \frac{u - t_i}{t_{i+p+1-r} - t_i} \cdot d_i^{r-1} \tag{1.17}$$

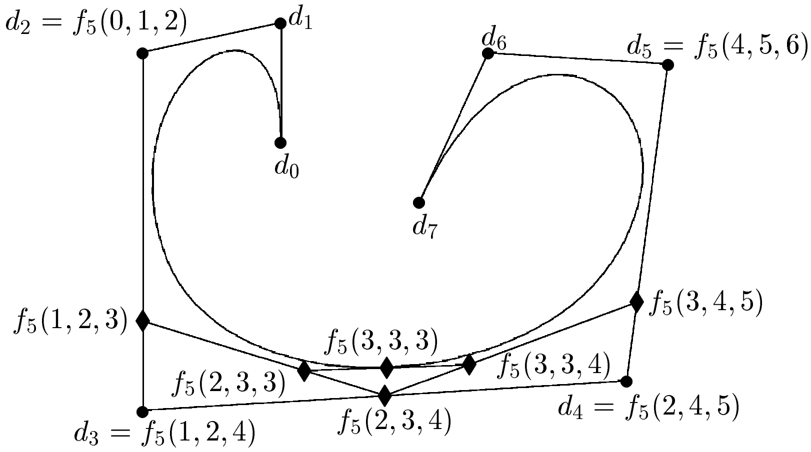
za $l - p + r \leqslant i \leqslant l$. *Tada se funkcijska vrijednost* $F(u)$ *može izračunati kao*

$$F(u) = d_l^p.$$

Dokaz: Gornju rekurziju zadovoljava

$$d_i^r := f_l(t_{i+1}, \ldots, t_l, \underbrace{u, \ldots, u}_{r}, t_{l+1}, \ldots, t_{i+p-r}),$$

što slijedi iz Teorema 1.7 i činjenice da je f_l simetričan i afin u svakom svojem argumentu:



Slika 1.2: de Boor-ov algoritam za računanje vrijednosti kubične splajn krivulje nad $T = (0,0,0,0,1,2,4,5,6,6,6,6)$ u točki $u = 3$

$$\begin{aligned} d_i^r &= \left(1 - \frac{u - t_i}{t_{i+p+1-r} - t_i}\right) \cdot f_l(t_i, \ldots, t_l, \underbrace{u, \ldots, u}_{r-1}, t_{l+1}, \ldots, t_{i+p-r}) \\ &\quad + \frac{u - t_i}{t_{i+p+1-r} - t_i} \cdot f_l(t_{i+1}, \ldots, t_l, \underbrace{u, \ldots, u}_{r-1}, t_{l+1}, \ldots, t_{i+p-r+1}) \\ &= f_l(t_{i+1}, \ldots t_l, \underbrace{u, \ldots, u}_{r-1}, \left(1 - \frac{u - t_i}{t_{i+p+1-r} - t_i}\right) \cdot t_i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{u-t_i}{t_{i+p+1-r}-t_i}\cdot t_{i+p-r+1}, t_{l+1},\ldots,t_{i+p-r})\\
&= f_l(t_{i+1},\ldots t_l,\underbrace{u,\ldots,u}_{r},t_{l+1},\ldots,t_{i+p-r}).
\end{aligned}
$$

Zbog toga je

$$
d_l^p = f_l(\underbrace{u,\ldots,u}_{p}) = F_l(u) = F(u),
$$

pa tvrdnja teorema slijedi. ■

1.4 Ubacivanje čvorova

Ovdje ćemo promatrati ubacivanje samo po jednog čvora. Neka je dana B-splajn krivulja $F(u) = \sum_{i=0}^{m} d_i \cdot N_i^p(u)$ nad nizom čvorova $T = (t_0,\ldots, t_{m+p+1})$. Nakon ubacivanja novog čvora $t \in (t_p, t_{m+1})$ uz $t_l \leqslant t < t_{l+1}$, F ima jedinstvenu reprezentaciju $F = \sum_{i=0}^{m+1} d_i^* \cdot N_i^{p*}$ kao B-splajn nad profinjenim nizom točaka $T^* = (t_0,\ldots,t_l,t,t_{l+1},\ldots,t_{m+p+1})$.

Teorem 1.10 *Uz gore navedene oznake, nove de Boor-ove točke dane su sa:*

$$
d_i^* = \begin{cases} f_j(t_{i+1},\ldots,t_{i+p}) & \text{za } i \leqslant l-p \text{ i } i \leqslant j \leqslant i+p,\\ f_l(t_{i+1},\ldots,t_l,t,t_{l+1},\ldots,t_{i+p-1}) & \text{za } l-p+1 \leqslant i \leqslant l,\\ f_j(t_i,\ldots,t_{i+p-1}) & \text{za } l+1 \leqslant i \text{ i } i \leqslant j+1 \leqslant i+p. \end{cases} \tag{1.18}
$$

Dokaz: Razmatramo podniz $t_l = t_l^* \leqslant t = t_{l+1}^* < t_{l+2}^* = t_{l+1}$ niza čvorova T^*. Za $t_j^* < t_{j+1}^*$ postižemo

$$
F_j^* = \begin{cases} F_j & \text{za } j \leqslant l,\\ F_{j-1} & \text{za } j > l, \end{cases}
$$

iz čega slijedi

$$
f_j^* = \begin{cases} f_j & \text{za } j \leqslant l,\\ f_{j-1} & \text{za } j > l, \end{cases}
$$

pa Teorem 1.7, primjenjen na f_j^* dovodi do tvrdnje. ■

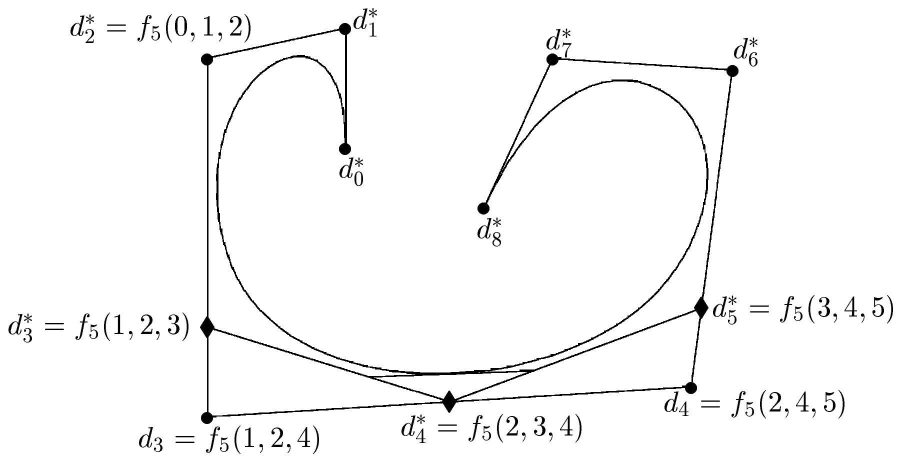
Korolar 1.11 (Boehm) *Nove de Boor-ove točke d_i^* mogu se izračunati kao*

$$
d_i^* = a_i \cdot d_i + (1-a_i)\cdot d_{i-1} \tag{1.19}
$$

uz

$$a_i := \begin{cases} 1 & za\ i \leqslant l-p, \\ \dfrac{t-t_i}{t_{i+p}-t_i} & za\ l-p+1 \leqslant i \leqslant l, \\ 0 & za\ l+1 \leqslant i. \end{cases} \tag{1.20}$$

Dokaz: Potrebno je samo razmotriti slučaj $l-p+1 \leqslant i \leqslant l$. Nakon što raspišemo $t = a_i \cdot t_{i+p} + (1-a_i) \cdot t_i$ kao afinu kombinaciju od t_i i t_{i+p}, tvdnja slijedi iz činjenice da je f_l afin u svakoj komponenti. ■



Slika 1.3: Ubacivanje novog čvora $u = 3$ u danu paticiju $T = (0,0,0,0,1,\ 2,4,5,6,6,6,6)$ za kubičnu B-splajn krivulju

Korolar 1.11 može se iskoristiti za generiranje Bezier-ovih točaka splajn krivulje uz ubacivanje svakog čvora do multipliciteta p.

Teorem 1.12 *Pretpostavimo da oba čvora $t_j < t_{j+1}$ imaju multiplicitet jednak p. Tada se Bezier-ove točke s obzirom na segment I_j podudaraju sa odgovarajućim deBoor-ovim točkama. Preciznije, i-ta Bezier-ova točka b_i od F_j jednaka je $j-p+i$-toj deBoor-ovoj točki d_{j-p+i}, tj.*

$$b_i = d_{j-p+i}. \tag{1.21}$$

Dokaz: Koristeći Korolar 1.2 i Teorem 1.7 postižemo da je

$$\begin{aligned} b_i &= f_j(\underbrace{t_j,\ldots,t_j}_{p-i},\underbrace{t_{j+1},\ldots,t_{j+1}}_{i}) \\ &= f_j(t_{j-(p-i)+1},\ldots,t_j,t_{j+1},\ldots,t_{j+i}) \ = \ d_{j-(p-i)}. \end{aligned}$$ ■

Ovaj odjeljak želimo završiti kratkim razmatranjem Schoenberg-ove splajn aproksimacije sa svojstvom smanjenja varijacije.

Pretpostavimo da je dan niz točaka $T = (t_0 = \cdots = t_p, \ldots, t_{m+1} = \cdots = t_{m+p+1})$. Splajn aproksimacija $V(G)$ stupnja p neke neprekidne funkcije $G : [t_0, t_{m+p+1}] \to \mathbb{R}^d$ definirana je sa

$$\begin{aligned} V(G) : [t_0, t_{m+p+1}] &\to \mathbb{R}^d, \\ u &\mapsto \sum_{i=0}^{m} G(t_i^*) \cdot N_i^p(u), \end{aligned} \tag{1.22}$$

gdje su 'čvorovi' t_i^* dani sa $t_i^* := (t_{i+1} + \cdots + t_{i+p})/p$. Dobro je poznato da operator V zadovoljava slijedeći teorem:

Teorem 1.13 (Svojstvo smanjenja varijacije) *Neka je H afina hiperravnina u $\mathbb{R}^d$. Tada splajn aproksimacija $V(G)$ proizvoljne funkcije $G : [t_0, t_{m+p+1}] \to \mathbb{R}^d$ sječe hiperravninu H najviše onoliko puta koliko G sječe H. Nadalje, operator V reproducira afine funkcije egzaktno.*

Dokaz: (i) Prvo ćemo pokazati da su afine funkcije reproducirane egzaktno. Pretpostavimo afinu funkciju $L(u) = a \cdot u + b \in \mathbb{R}^d$. Pošto je p-afina polarna forma od L dana sa

$$l(u_1, \ldots, u_p) = a \cdot \frac{1}{p}(u_1 + \cdots + u_p) + b,$$

Teorem 1.7 implicira da B-splajn reprezentacija od L nad T zadovoljava

$$L(u) = \sum_{i=0}^{m} d_i \cdot N_i^p(u) \quad \text{sa } d_i := l(t_{i+1}, \ldots, t_{i+p}) = L(t_i^*).$$

Slijedi da operator V reproducira afine funkcije egzaktno.

(ii) Označimo sa $S_H^-(F)$ i $S_H^-(d_i)_{i=0}^m$ broj koliko puta funkcija $F : [t_0, t_{m+p+1}] \to \mathbb{R}^d$ i niz $(d_i)_{i=0}^m$ mijenjaju strane afine hiperravnine H u $\mathbb{R}^d$. Poznato je da B-splajn funkcija $F(u) = \sum_{i=0}^m d_i \cdot N_i^p(u)$ u $\mathbb{R}^d$ zadovoljava

$$S_H^-(F) \leqslant S_H^-(d_i)_{i=0}^m. \tag{1.23}$$

Lagani dokaz ove činjenice zasnovan na ubacivanju čvorova, može se naći u [4], a baziran je na činjenici da vrijedi $S_H^-(d_i^*)_{i=0}^{m+1} \leqslant S_H^-(d_i)_{i=0}^m$, gdje su d_i^* nove de Boor-ove točke nakon ubacivanja novog čvora t u dani niz čvorova T. To slijedi direktno iz (1.19),(1.20) pošto je d_i^* dobivena iz d_{i-1}, d_i kao konveksna kombinacija. Razmotrimo sada proizvoljan niz $t_0 < u_1 < \cdots < u_k < t_{p+m+1}$ i označimo sa (d_i^{**}) rezultirajući niz kontrolnih točaka nakon ubacivanja svakog u_i sve do multipliciteta p u T. Pošto je $(F(u_1), \ldots, F(u_k))$ podniz od (d_i^{**}), dobivamo

$$S_H^-(F(u_1), \ldots, F(u_k)) \leqslant S_H^-(d_i^{**}) \leqslant S_H^-(d_i)_{i=0}^m,$$

čime je dokazana nejednakost (1.23). Za funkciju $G : [t_0, t_{m+p+1}] \to \mathbb{R}^d$ tada je

$$S_H^-(V(G)) \leqslant S_H^-(G(t_i^*))_{i=0}^m \leqslant S_H^-(G), \tag{1.24}$$

i tvrdnja slijedi. ■

1.5 Marsden-ov identitet i de Boor-Fix-ova forma dualnog funkcionala

Neka je dan nepadajući niz čvorova $t_0 = \cdots = t_p, t_{p+1}, \ldots t_m, t_{m+1} = \cdots = t_{m+p+1}$ za kojeg vrijedi $t_i < t_{i+p}$. Definirajmo polinom stupnja p

$$\Psi_i(t) = (t_{i+1} - t) \cdots (t_{i+p} - t), \quad i = 0, \ldots, m.$$

Ako $\Psi_i(t)$ rastavimo po bazi potencija, dobivamo

$$\Psi_i(t) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \sigma_{p-k}(t_{i+1}, \ldots, t_{i+p}) t^k, \quad i = 0, \ldots, m,$$

gdje je $\sigma_k(t_{i+1}, \ldots, t_{i+p})$ k-ta elementarna simetrična funkcija koju smo definirali u dokazu Teorema 1.1. Zbog toga je

$$\Psi_i^{(k)}(0) = (-1)^k k! \sigma_{p-k}(t_{i+1}, \ldots, t_{i+p}), \quad \begin{array}{l} i = 0, \ldots, m, \\ k = 0, \ldots, p. \end{array} \tag{1.25}$$

Teorem 1.14 (Marsden-ov identitet) *Uz gore navadene oznake vrijedi*

$$(x - t)^p = \sum_{i=0}^{m} \Psi_i(t) N_i^p(x), \tag{1.26}$$

i za neki čvor t_j

$$(x - t_j)_+^p = \sum_{i=0}^{m} \Psi_i^+(t_j) N_i^p(x), \tag{1.27}$$

gdje je $(x-t_j)_+^p = \max\{(x-t_j)^p, 0\}$*, a* Ψ_i^+ *je funkcija koja se podudara sa* Ψ_i *na* $(-\infty, \tau_i]$ *i identički je jednaka nuli na* (τ_i, ∞)*, za proizvoljan* $\tau_i \in (t_i, t_{i+p+1})$*.*

Dokaz: Neka je, za fiksirani t, $\Psi(x) = (x-t)^p$. Ako sa ψ označimo polarnu formu od Ψ, po Teoremu 1.7 vrijedi

$$\Psi(x) = \sum_{i=0}^{m} \psi(t_{i+1}, \ldots, t_{i+p}) \cdot N_i^p(x).$$

Ali, po definiciji je

$$\Psi(x) = (x-t)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{p-k}(-1)^k t^k,$$

pa odavde, koristeći konstrukciju polarne forme iz dokaza Teorema 1.1, direktno dobivamo $\psi(t_{i+1}, \ldots, t_{i+p}) = \Psi_i(t)$.

Nadalje, pošto $N_i^p(t_j) \neq 0$ povlači da je $\Psi_i(t_j) = 0$, dobivamo da je

$$(x-t)_+^p = \sum_{i \geqslant j} \Psi_i(t) N_i^p(x),$$

iz čega slijedi druga jednakost. ■

Teorem 1.15 (de Boor-Fix-ovi dualni funkcionali) *Za svaki polinom* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ *stupnja* p *i njegovu polarnu formu* f *vrijedi*

$$f(t_{i+1}, \ldots, t_{i+p}) = \sum_{k=0}^{p} \left[\frac{(-1)^{p-k}}{p!} \right] F^{(k)}(t) \Psi_i^{(p-k)}(t), \tag{1.28}$$

uz $i = 0, \ldots, m$*.*

Dokaz: Primijetimo prvo da je desna strana u (1.28) konstanta neovisna o t, pošto se direktnim računom može provjeriti da je njena derivacija jednaka nuli, pa je možemo promatrati, na primjer u 0. Prema Taylor-ovom teoremu sada slijedi

$$F(t) = \sum_{k=0}^{p} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

Ako promatramo polarne forme obiju strana, uz upotrebu (1.25), dobivamo

$$\begin{aligned} f(t_{i+1},\dots,t_{i+p}) &= \sum_{k=0}^{p} \frac{F^{(k)}(0)\sigma_k(t_{i+1},\dots,t_{i+p})}{\binom{p}{k}k!} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \left[\frac{(-1)^{p-k}}{p!}\right] F^{(k)}(0)\Psi_i^{(p-k)}(0). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Funkcionali $\lambda_0,\dots,\lambda_m$ definirani formulom

$$\lambda_i(F)(t) = \sum_{k=0}^{p} \left[\frac{(-1)^{p-k}}{p!}\right] F^{(k)}(t)\Psi_i^{(p-k)}(t), \quad i = 0,\dots,m,$$

zovu se *de Boor-Fix-ova forma dualnog funkcionala* za bazu $N_0^p,\dots,N_m^p$. Ako sada promatramo B-splajn F nad nizom čvorova $(t_i)_{i=0}^{m+p+1}$,

$$F(u) = \sum_{i=0}^{m} d_i N_i^p(u),$$

i ako za definiciju λ_i uzmemo $t \in (t_i, t_{i+p+1})$, tada zbog Teorema 1.7 i (1.28) vrijedi da je

$$\lambda_i(F)(t) = d_i.$$

Stavimo li da je $F = N_j^p$, tada prethodna jednakost daje

$$\lambda_i(N_j^p)(t) = \delta_{i,j},$$

što i potvrđuje naziv funkcionala.

1.6 Ubacivanje čvorova Boehm-ovim i Oslo algoritmom

Ubacivanje čvorova je transformacijska tehnika: ako je zadana krivulja u jednoj reprezentaciji, ona prikazuje tu istu krivulju u nekoj drugoj. Promatrat ćemo dvije perspektive. Prva je orijentirana prema čvorovima, a cijeli se proces sastoji od ubacivanja niza čvorova. Primitivan korak u takvom algoritmu bit će ubacivanje jednog čvora. Druga pak perspektiva je orijentirana prema kontrolnim točkama (de Boor-ovim točkama). Rezultat takvog algoritma su nove kontrolne točke, tako da je osnovni korak pronalaženje jedne nove točke.

Boehm-ov algoritam: Boehm-ov algoritam je orijentiran prema čvorovima, a zapravo se sastoji od ubacivanja samo jednog čvora. Pretpostavimo da je dan polinom $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stupnja n i njegova polarna forma $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, te čvorovi t_i i da želimo ubaciti čvor $t_q \leqslant \hat{t} < t_{q+1}$. Nove kontrolne točke su, prema Teoremu 1.11,

$$\begin{aligned} f(t_{j+1}, \dots, t_{j+n-1}, \hat{t}) &= f\left(t_{j+1}, \dots, t_{j+n-1}, \frac{t_{j+n} - \hat{t}}{t_{j+n} - t_j} t_j + \frac{\hat{t} - t_j}{t_{j+n} - t_j} t_{j+n}\right) \\ &= \frac{t_{j+n} - \hat{t}}{t_{j+n} - t_j} \cdot f(t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+n-1}) + \frac{\hat{t} - t_j}{t_{j+n} - t_j} \cdot \\ &\quad f(t_{j+1}, \dots, t_{j+n-1}, t_{j+n}) \end{aligned}$$

za $j = q - n + 1, \dots, q$. Ako stare kontrolne točke označimo sa c_i a nove sa d_i, Boehm-ova fromula tada glasi

$$d_j = \begin{cases} c_j, & \text{za } j \leqslant q - n, \\ \frac{t_{j+n} - \hat{t}}{t_{j+n} - t_j} \cdot c_{j-1} + \frac{\hat{t} - t_j}{t_{j+n} - t_j} \cdot c_j, & \text{za } j = q - n + 1, \dots, q, \\ c_{j-1}, & \text{za } j \geqslant q + 1. \end{cases}$$

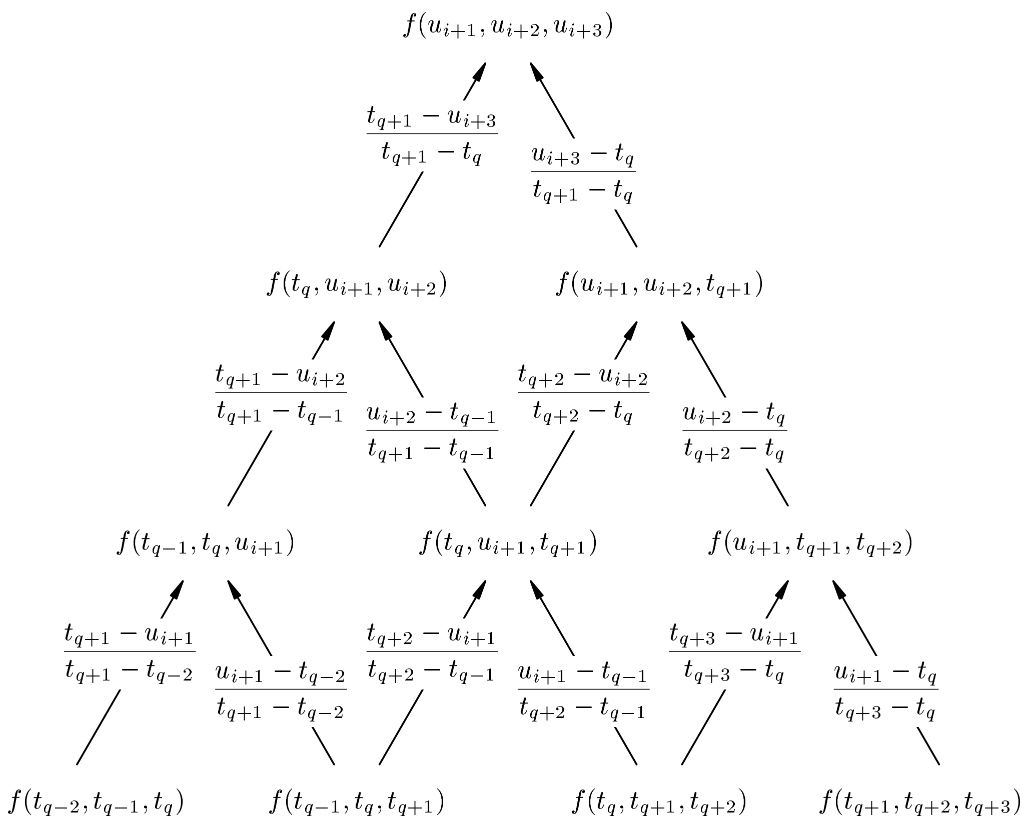
Ako se ubacuje više čvorova, ubacuju se jedan po jedan, koristeći obnovljen niz čvorova i kontrolne točke iz prijašnjeg koraka.

Dakle, ako ubacujemo jedan čvor, Boehm-ov algoritam računa n novih kontrolnih točaka iz $n+1$ starih koristeći pri tom n afinih kombinacija. ■

$$\begin{array}{ccccccc} & d_{q-2} = f(t_{q-1}, t_q, \hat{t}) & & d_{q-1} = f(t_q, \hat{t}, t_{q+1}) & & d_q = f(\hat{t}, t_{q+1}, t_{q+2}) & \\ \nearrow & & \nwarrow \; \nearrow & & \nwarrow \; \nearrow & & \nwarrow \\ f(t_{q-2}, t_{q-1}, t_q) & & f(t_{q-1}, t_q, t_{g+1}) & & f(t_q, t_{g+1}, t_{q+2}) & & f(t_{g+1}, t_{q+2}, t_{q+3}) \\ = d_{q-3} = c_{q-3} & & = c_{q-2} & & = c_{q-1} & & = d_{q+1} = c_q \end{array}$$

Slika 1.4: Ubacivanje čvora pomoću Boehm-ovog algoritma na primjeru kubičnog polinoma; ubacuje se čvor $t_q \leqslant \hat{t} < t_{q+1}$

Oslo algoritam: Oslo algoritam je orijentiran prema novim kontrolnim točkama. Označimo sa t_i originalne čvorove, a sa u_i čvorove koji ih profinjuju.



Slika 1.5: Ubacivanje čvorova pomoću Oslo algoritma na primjeru kubičnog polinoma

Trebamo naći nove kontrolne točke

$$d_i = f(u_{i+1}, \ldots, u_{i+n})$$

iz starih kontrolnih točaka

$$c_j = f(t_{j+1}, \ldots, t_{j+n}).$$

Neka je F polinom stupnja n i f njegova polarna forma, i želimo izračunati novu kontrolnu točku $d_i = f(u_{i+1}, \ldots, u_{i+n})$. Neka je $[t_q, t_{q+1})$ bilo koji originalni interval koji sadrži novi interval na čiji krivuljni segment utječe d_i. Krenut ćemo od $n + 1$ originalnih kontrolnih točaka $f(t_{q-n+1}, \ldots, t_q)$, $f(t_{q-n+2}, \ldots, t_{q+1}), \ldots, f(t_{q+1}, \ldots, t_{q+n})$. Pomoću simetrije i multiafinosti polarne forme, kao i u Boehm-ovom algoritmu, kombinacijom prve dvije stare točke dobija se $f(t_{q-n+2}, \ldots, t_q, u_{i+1})$, zatim druge dvije daju $f(t_{q-n+3}, \ldots, t_{q+1}, u_{i+1})$, i tako dalje, dok će zadnji par dati $f(t_{q+1}, \ldots, t_{q+n-1}, u_{i+1})$. Isto ponavljamo i sa tako dobivenih n točaka, dobivajući $f(t_{q-n+3}, \ldots, t_q, u_{i+1}, u_{i+2}), \ldots, f(t_{q+1}, \ldots, t_{q+n-2}, u_{i+1}, u_{i+2})$. Proces se nastavlja tako da se u k-tom koraku računaju nove $n+1-k$ točke, i to iz točaka dobivenih prethodnim korakom, a završava, naravno, n-tim korakom u kom je jedini izlaz upravo $f(u_{i+1}, \ldots, u_{i+n}) = d_i$. Oslo algoritam sastoji se zapravo od niza trokutastih shema, svaka od njih za jednu novu kontrolnu točku. Svaki trokut počinje s određenim starim kontrolnim točkama a završava traženom novom. Trokutasta shema za proizvoljan stupanj n sastoji se od $n(n+1)/2$ afinih kombinacija organiziranih u n nivoa. U svakom nivou uvodi se novi čvor kao argument u polarnoj formi. Koeficijenti u tim afinim kombinacijama su, u stvari, isti kao i za de Boor-ov algoritam, osim što se varijabla u zamjenuje po jednim argumentom polarne forme u svakom nivou trokuta.

Kada su jedan ili više čvorova, koji se pojavljuju u argumentima polarne reprezentacije nove kontrolne točke, elementi originalne mreže čvorova, pojavljuje se više originalnih segmenata krivulje od kojih možemo krenuti da bi dobili traženu novu točku. Na primjer, u kubičnom slučaju, da bi našli novu točku $f(t_q, u, t_{q+1})$, gdje je $t_q \leqslant u < t_{q+1}$, možemo upotrijebiti segmente nad intervalima $[t_{q-1}, t_q)$, $[t_q, t_{q+1})$ ili $[t_{q+1}, t_{q+2})$. U takvom slučaju Oslo algoritam najčešće uzima krajnji lijevi interval. ■

1.7 Zaključak

Na kraju ovog poglavlja trebalo bi povući paralelu i pokazati analognost algoritama koji su naoko sasvim različiti. Da budemo precizniji, četiri algoritma koje smo tu obradili zapravo se svode na istu ideju: ubacivanje jednog ili više čvorova za dani splajn, i računanje novih de Boor-ovih točaka na profinjenoj mreži. Prvo u de Casteljau-ovom algoritmu računamo vrijednost nekog polinoma F stupnja p preko Bezier-ovih točaka, a kako su one odgovarajuće de Boor-ove točke po Teoremu 1.12, iz Teorema 1.11 slijedi da je de Casteljau-ov algoritam zapravo ubacivanje jednog čvora sve do kratnosti p. de Boor-ov algoritam je poopćenje de Casteljau-ovog algortma na polinomijalne splajnove uz proizvoljan niz čvorova. Na kraju su tu još Boehm-ov i Oslo algoritam od koji prvi ubacuje jedan novi čvor, a drugi, ako se radi o splajnu reda $p+1$, ubacuje p proizvoljnih, moguće i različitih čvorova.

Dakle, možemo reći da su de Casteljau-ov, de Boor-ov i Oslo algoritam zapravo tri varijante istog algoritma, te se za svaki od njih može napraviti trokutasta shema analogna slici 1.5, dok bi Boehm-ov algoritam bio samo jedan nivo takve sheme.

Poglavlje 2

Reduciranje čvorova

2.1 Uvod

Po dijelovima polinomne funkcije naširoko se koriste za aproksimacije funkcija i podataka zbog dobrih aproksimativnih svojstava i zbog lakoće njihovog manipuliranja računalom. Da bi računali sa po djelovima polinomnim funkcijama, prvo moramo odabrati pogodnu reprezentaciju, tj. bazu za odabrani prostor po dijelovima polinomnih funkcija.

Česti odabir je upotreba B-splajnova kao baznih funkcija. Ta baza je prilično dobro uvjetovana i ima puno drugih lijepih svojstava koja obično vode do stabilnih i jednostavnih algoritama (v. [3], [15]). Također ćemo po dijelovima polinomne funkcije izražene preko B-splajnova zvati *splajn funkcije* ili jednostavno *splajnovi*.

Cilj nam je u ovom poglavlju prikazati strategiju reduciranja broja čvorova danog splajna bez perturbiranja splajna za više od zadane tolerancije (v. [9]). Takva redukcija znači da dani splajn iz, primjerice, prostora $\mathcal{S}$ aproksimiramo sa splajnom iz potprostora od $\mathcal{S}$. Drugim riječima, broj stupnjeva slobode se smanjuje, čime se postiže redukcija podataka, pa taj proces nazivamo 'redukcija podataka' ili 'izbacivanje čvorova'.

Ovdje ćemo detaljno opisati strategiju izbacivanja čvorova za skalarne funkcije jedne varijable, i dati primjenu za aproksimaciju funkcija i točaka. Nakon toga generalizirat ćemo metodu na parametarske B-splajn krivulje (v. [8]), te dati generalnu metodu baziranu na izbacivanju čvorova, koja računa splajn aproksimaciju danih podataka, s greškom manjom od dane tolerancije u svakoj točki podataka. Metoda odabire i broj čvorova i položaj svakog od njih, uz restrikciju da se čvorovi moraju nalaziti u danim točkama. Ako želimo aproksimirati funkciju, prvo moramo sakupiti vrijednosti te funkcije u dovoljnom broju točaka. Treba još naglasiti da se greška može mjeriti u bilo kojoj normi, ali mi ćemo koristiti max-normu.

U preostalom djelu ovog odjeljka, uvest ćemo osnovne oznake i ponoviti neke činjenice. Neka su m i k prirodni brojevi uz $m \geqslant k$. Za dani nepadajući niz $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i=1}^{m+k}$, neka je

$$\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}} = \operatorname{span}\{B_{1,k,\boldsymbol{t}}, \ldots, B_{m,k,\boldsymbol{t}}\},$$

gdje $B_{i,k,\boldsymbol{t}}$ označava B-splajn reda k sa čvorovima $t_i, \ldots, t_{i+k}$, normaliziran tako da vrijedi particija jedinice

$$\sum_{i=1}^{m} B_{i,k,\boldsymbol{t}}(x) \equiv 1 \quad \text{za } x \in (t_k, t_{m+1}).$$

Elementi od $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}}$ su funkcije koje su polinomi stupnja najviše $k-1$ na svakom intervalu (t_i, t_{i+1}), za $i = 1, \ldots, m+k-1$, i koje iščezavaju na $(-\infty, t_1)$ i (t_{m+k}, ∞). Štoviše, ako je $t_i < x = t_{i+1} = \cdots = t_{i+\mu} < t_{i+\mu+1}$, tada su sve derivacije reda $k-1-\mu$ i niže neprekidne u x, dok više derivacije mogu imati prekid. Napomenimo još da, ako je $\boldsymbol{\tau}$ podniz od $\boldsymbol{t}$, tada je $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}} \subset \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}}$.

U ovom poglavlju interesira nas samo restrikcija elemenata od $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}}$ na interval $[t_k, t_{m+1}]$, i niz čvorova sa svojstvom da je $t_{i+k} > t_i$ za sve i, te $t_k < t_{k+1}$ i $t_m < t_{m+1}$. Čvorovi $t_{k+1}, \ldots, t_m$ zovu se *unutrašnji čvorovi*, i u našoj shemi redukcije podataka pokušat ćemo izbaciti samo te čvorove.

2.2 Generalna strategija

Neka je $f \in \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}}$ i neka je ε dani nenegativni realni broj. Pretpostavimo također da je $\|\bullet\|$ odabrana norma na $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}}$. Naš problem je određivanje potprostora $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}$ od $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}}$ s najmanjom mogućom dimenzijom, i elementa g iz $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}$ takvog da je $\|f-g\| < \varepsilon$. U ovom kontekstu 'odrediti' znači 'dati konačan algoritam za računanje'. Općenito, ne očekujemo da ćemo biti u mogućnosti odrediti potprostor s najmanjom mogućom dimenzijom, već samo potprostor s malom dimenzijom.

Strategija određivanja g i $\boldsymbol{\tau}$ iz f i $\boldsymbol{t}$ sastoji se od tri glavna djela. Nazivat ćemo ih *rangiranje, izbacivanje,* i *aproksimiranje*, te ih ukratko ovdje opisati.

U *rangiranju* se odlučuje u kojem poretku bi se čvorovi trebali izbaciti iz $\boldsymbol{t}$, tj. određuje se podniz $\boldsymbol{\rho}^i$ od $\boldsymbol{t}$ takav da je $\boldsymbol{\rho}^0$ prazan, a svaki $\boldsymbol{\rho}^i$ ima po i elemenata $\rho_q^i, \ldots, \rho_i^i$. Ako želimo izbaciti q čvorova iz $\boldsymbol{t}$, tada će to biti elementi od $\boldsymbol{\rho}^q$.

U *izbacivanju* se određuje maksimalni broj čvorova q koji se mogu izbaciti iz $\boldsymbol{t}$ bez prekoračenja točnosti. Tada se definira da je $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{t} \setminus \boldsymbol{\rho}^q$.

U *aproksimiranju* se izračunava $g = \mathsf{G}(\boldsymbol{t}; \boldsymbol{\tau})f$. Ovdje je $\mathsf{G}(\boldsymbol{t}; \boldsymbol{\tau})$ operator koji predstavlja proces aproksimacije sa fiksnim čvorovima koji, za dane nizove čvorova $\boldsymbol{t}$ i $\boldsymbol{\tau}$, gdje je $\boldsymbol{\tau}$ podniz od $\boldsymbol{t}$, računa aproksimaciju $g \in \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}$ splajna $f \in \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}}$. Ovaj proces je neka vrsta aproksimacije tipa najmanjih kvadrata.

Pretpostavimo da smo odredili g i $\boldsymbol{\tau}$ takve da je $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$. Pitanje je da li se taj rezultat može još poboljšati. Ako je $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{t}$, nismo bili u mogućnosti izbaciti niti jedan čvor ili zbog toga što algoritam nije dovoljno dobar, ili zato što jednostavno ne postoji nikakav pravi podskup $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}$ od $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}}$ takav da je $\operatorname{dist}(f, \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}) \leqslant \varepsilon$. Kao drugi ekstremni slučaj, može se desiti da reducirani niz čvorova $\boldsymbol{\tau}$ ne sadrži niti jedan unutarnji čvor, a tada je algoritam vrlo uspješan pošto je izbacio sve čvorove.

Najčešće ipak imamo da je $\boldsymbol{\tau} \neq \boldsymbol{t}$ i preostaju neki unutrašnji čvorovi. Možemo pokušati poboljšati rezultat izbacivanjem čvorova za g. Neka je $g_1 = g$ i $\boldsymbol{\tau}^1 = \boldsymbol{\tau}$. Ako upotrijebimo *rangiranje* i *izbacivanje* na $\boldsymbol{\tau}^1$ i g_1 dobit ćemo novi niz čvorova $\boldsymbol{\tau}^2$, na kojem možemo izračunati novu aproksimaciju g_2 od f uz uvjet $\|f - g_2\| \leqslant \varepsilon$. Ako je $\boldsymbol{\tau}^2 = \boldsymbol{\tau}^1$, ili ako $\boldsymbol{\tau}^2$ nema unutrašnjih čvorova, postavljamo da je $g = g_2$ i algoritam tu završava. U suprotnom, nastavljamo dalje izbacivanjem čvorova za g_2, te dobivamo slijedeći neformalni algoritam ($|\boldsymbol{t}|$ označava broj elemenata u $\boldsymbol{t}$):

1. $\boldsymbol{\tau}^0 = \boldsymbol{t}; g_0 = f$; (Inicijalizacija)
2. za $j = 0, 1, \ldots$
   1. ako je $|\boldsymbol{\tau}^j| = 2k$ tada završi;
   2. odredi $\boldsymbol{\rho}^i(g_j)$ za $i = 0, 1 \ldots$; (Rangiranje)
   3. $\boldsymbol{\tau}^{j+1} = \boldsymbol{t}^q$, gdje je $\boldsymbol{t}^i = \boldsymbol{\tau}^j \setminus \boldsymbol{\rho}^i(g_j)$ za $i = 0, 1, \ldots$ (Izbacivanje i
      i $q = \max\{i : \|f - \mathsf{G}(\boldsymbol{t}; \boldsymbol{t}^i)f\| \leqslant \varepsilon\}$; Aproksimiranje)
   4. ako je $|\boldsymbol{\tau}^{j+1}| = |\boldsymbol{\tau}^j|$ tada završi;
   5. $g_{j+1} = \mathsf{G}(\boldsymbol{t}; \boldsymbol{t}^q)f$. (Aproksimiranje)

Algoritam generira konačni padajući niz $(\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}^j})$ potprostora od $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}}$, i odgovarajući niz aproksimacija (g_j) sa svojstvima

$$(i)\ \boldsymbol{\tau}^{j+1} \subset \boldsymbol{\tau}^j, \qquad (ii)\ \|f - g_j\| \leqslant \varepsilon.$$

Zadnja aproksimacija u tom nizu je, naravno, ona sa najmanje čvorova te će biti dana kao izlaz.

Korak 2.3 zahtjeva pretraživanje kroz moguće nizove čvorova da bi se pronašao onaj najkraći dozvoljeni, što će se u danoj implementaciji postići binarnim pretraživanjem. Međutim, postoji mala šansa da takav pristup neće pronaći najmanji mogući niz.

Napomenimo još da su u ovoj implementaciji koraci 2.3 i 2.5 spojeni u jedan, pošto se g_{j+1} tako i onako računa u koraku 2.3 da bi se provjerilo da li je greška manja od ε.

Iskustvo je pokazalo da se u najviše slučajeva većina čvorova izbaci u prvih nekoliko iteracija, ali bi zbog efikasnosti bilo dobro uključivanje testa koji bi kontrolirao da broj iteracija bude mali, primjerice manji od 5.

2.3 Rangiranje čvorova

Pretpostavimo ponovo da je $\boldsymbol{t}$ dani niz čvorova i da je $f \in \mathcal{S} = \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}}$ dani splajn. Naša strategija za određivanje čvorova koje treba izbaciti, tj. strategija za određivanje podniza $\boldsymbol{\rho}^j$ od $\boldsymbol{t}$, ovisi o proceduri dodjeljivanja težina w_j svakom unutrašnjem čvoru od $\boldsymbol{t}$. Nenegativan realan broj w_j biti će gruba mjera značaja čvora t_j u reprezentaciji splajna f.

Postoji puno načina na koji možemo mjeriti značaj čvora t_j. Ovdje će se to izvesti na slijedeći način: za svaki unutrašnji čvor t_j od $\boldsymbol{t}$ definiramo potprostor $\mathcal{S}_j$ od $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}}$ sa $\mathcal{S}_j = \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}^j}$, gdje je

$$\boldsymbol{t}^j = \boldsymbol{t} \setminus (t_{j-\mu+1}, \ldots, t_j),$$

i gdje je

$$\mu = \max\{i : t_{j-i+1} = t_j\}$$

lijevi multiplicitet od t_j. Primjetimo da vrijedi

$$\mathcal{S}_j \subset \mathcal{S}_{j-1} \subset \cdots \subset \mathcal{S}_{j-\mu+1} \subset \mathcal{S}.$$

Sada se mogu izreći dva razumna uvjeta na težine w_j:

(i) ako je $f \in \mathcal{S}_j$, tada je $w_j = 0$;

(*ii*) ako je $\mu > 1$, tada je $w_j \geqslant w_{j-1}$.

Osnovna ideja je da w_j bude aproksimacija od $\operatorname{dist}(f, \mathcal{S}_j)$ u nekoj normi. Koristit ćemo $\|\bullet\|_{\boldsymbol{t}} = \|\bullet\|_{l^\infty,\boldsymbol{t}}$, koja je zapravo samo max-norma B-splajn koeficijenata od $f-g$ kada se prikaže kao splajn iz $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}}$. Uz takve pretpostavke, za $\mu = 1$ definiramo

$$w_j = \min_{g \in \mathcal{S}_j} \|f - g\|_{\boldsymbol{t}} = \|f - f_j\|_{\boldsymbol{t}}.$$

Za $\mu > 1$, pretpostavimo da smo već izračunali w_{j-1} i $f_{j-1} \in \mathcal{S}_{j-1}$. Definiramo $f_j \in \mathcal{S}_j$ kao rješenje minimizacijskog problema

$$\|f_{j-1} - f_j\|_{\boldsymbol{t}^{j-1}} = \min_{g \in \mathcal{S}_j} \|f_{j-1} - g\|_{\boldsymbol{t}^{j-1}},$$

gdje je $\boldsymbol{t}^{j-1}$ niz čvorova koji određuje $\mathcal{S}_{j-1}$. Tada postavljamo da je

$$w_j = w_{j-1} + \|f_{j-1} - f_j\|_{\boldsymbol{t}^{j-1}}.$$

Nastavljamo dalje sa izvodom matrične formulacije ove jednadžbe.

Radi pojednostavljenja oznaka, stavimo da je $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{t}^j$ niz čvorova od $\mathcal{S}_j$. Tada $\mathcal{S}_{j-1}$ ima niz čvorova jednak $\boldsymbol{t}^{j-1} = \boldsymbol{\tau} \cup \{z\}$, gdje je $z = t_j$. Neka su ν i l cijeli brojevi takvi da je

$$\tau_{\nu-l} < \tau_{\nu-l+1} = \cdots = \tau_{\nu-1} \leqslant z < \tau_\nu,$$

pa je prema tome, l multiplicitet od z u $\boldsymbol{t}^{j-1}$. Pretpostavimo da je

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot B_{i,k,\boldsymbol{\tau}} \in \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}.$$

Pošto je $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}} \subset \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}\cup\{z\}}$, imamo

$$g = \sum_{i=1}^{n+1} \hat{c}_i \cdot B_{i,k,\boldsymbol{\tau}\cup\{z\}},$$

gdje je, uz pomoć Boehmovog teorema (1.11)

$$\hat{c}_i = \begin{cases} c_i & \text{za } i = 1, \ldots, \nu - k, \\ \mu_i c_i + \lambda_i c_{i-1} & \text{za } i = \nu - k + 1, \ldots, \nu - 1, \\ c_{i-1} & \text{za } i = \nu - l + 1, \ldots, n + 1, \end{cases}$$

uz

$$\lambda_i = \frac{\tau_{i+k-1} - z}{\tau_{i+k-1} - \tau_i}, \quad \mu_i = \frac{z - \tau_i}{\tau_{i+k-1} - \tau_i}. \tag{2.1}$$

Zanimljiviji dio transformacije $(c_i) \mapsto (\hat{c}_i)$ može se zapisati kao

$$\hat{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{c},$$

gdje je $\boldsymbol{c} = [c_{\nu-k}, \ldots, c_{\nu-l}]^T$, $\hat{\boldsymbol{c}} = [\hat{c}_{\nu-k}, \ldots, \hat{c}_{\nu-l+1}]^T$, i

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_{\nu-k+1} & \mu_{\nu-k+1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\nu-k+2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mu_{\nu-l-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{\nu-l} & \mu_{\nu-l} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

matrica sa $k-l+2$ redova i $k-l+1$ stupaca. Primjetimo da za svaki i imamo

$$\mu_i + \lambda_i = 1, \quad \mu_{i-1} + \lambda_i \geqslant 1. \tag{2.3}$$

Jednakost slijedi direktno iz (2.1). Nejednakost se jednostavno vidi iz

$$\mu_{i-1} + \lambda_i = \frac{z - \tau_{i-1}}{\tau_{i+k-2} - \tau_{i-1}} + \frac{\tau_{i+k-1} - z}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} \geqslant \frac{z - \tau_{i-1}}{\tau_{i+k-1} - \tau_{i-1}} + \frac{\tau_{i+k-1} - z}{\tau_{i+k-1} - \tau_{i-1}} = 1.$$

Relacije (2.3) povlače da je $\mu_{i-1} - \mu_i \geqslant 0$ za svaki i, što znači da μ_i opadaju kada i raste. Pošto je $\lambda_i = 1 - \mu_i$, λ_i rastu sa i.

Za dani

$$f_{j-1} = \sum_{i=1}^{n+1} d_i \cdot B_{i,k,\boldsymbol{\tau}\cup\{z\}} \in \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}\cup\{z\}},$$

predlažemo aproksimaciju

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot B_{i,k,\boldsymbol{\tau}} \in \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}$$

danu kao partikularno rješenje l^∞ minimizacijskog problema

$$\min_{\boldsymbol{c}} \phi(\boldsymbol{c}), \tag{2.4}$$

uz

$$\phi(\boldsymbol{c}) = \max\{\|\boldsymbol{d}^0 - \boldsymbol{c}^0\|, \|\boldsymbol{d}^1 - \boldsymbol{B}\boldsymbol{c}^1\|, \|\boldsymbol{d}^2 - \boldsymbol{c}^2\|\}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^0 \\ \boldsymbol{c}^1 \\ \boldsymbol{c}^2 \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

gdje je norma vektorska max-norma, i gdje su

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}^0 &= [d_1, \dots, d_{\nu-k-1}]^T, & \boldsymbol{c}^0 &= [c_1, \dots, c_{\nu-k-1}]^T, \\ \boldsymbol{d}^1 &= [d_{\nu-k}, \dots, d_{\nu-l+1}]^T, & \boldsymbol{c}^1 &= [c_{\nu-k}, \dots, c_{\nu-l}]^T, \\ \boldsymbol{d}^2 &= [d_{\nu-l+2}, \dots, d_{n+1}]^T, & \boldsymbol{c}^2 &= [c_{\nu-l+1}, \dots, c_n]^T, \end{aligned}$$

i uz matricu $\boldsymbol{B}$ danu sa (2.2). Motivacija za rješavanje problema (2.4) je ta da, ako je $\boldsymbol{c}$ vektor B-splajn koeficijenata od f_j, tada postoji pozitivan broj $D_{k,\infty}$, ovisan samo o k, takav da vrijedi (v. [3], [4])

$$D_{k,\infty}^{-1}\phi(\boldsymbol{c}) \leqslant \|f_j - f_{j-1}\|_{\mathtt{L}^\infty} \leqslant \phi(\boldsymbol{c}).$$

Štoviše, diskretan problem (2.4) jednostavniji je za rješavanje nego odgovarajući $\mathtt{L}^\infty$ problem. Općenito, problem (2.4) nema jedinstveno rješenje. Rezultat se dobiva stavljanjem $\boldsymbol{c}^0 = \boldsymbol{d}^0$ i $\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{d}^2$, i onda definiranjem $\boldsymbol{c}^1$ kao rješenje problema

$$\min_{\boldsymbol{c}} \|\boldsymbol{d}^1 - \boldsymbol{B}\boldsymbol{c}\|. \tag{2.6}$$

Tada postavljamo da je

$$w_j = \|\boldsymbol{d}^1 - \boldsymbol{B}\boldsymbol{c}^1\| + \begin{cases} 0 & \text{za } l = 1, \\ w_{j-1} & \text{za } l > 1. \end{cases} \tag{2.7}$$

Minimizacijski problem (2.6) je l^∞ problem s jednom jednadžbom više od nepoznanica.

Pretpostavimo sada da smo, na neki način, svakoj unutrašnjoj točki od $\boldsymbol{t}$ pridružili težinu w_j. Za svaki i trebamo odrediti niz čvorova $\boldsymbol{\rho}^i = (\rho_1^i, \dots \rho_i^i)$ koji će biti uklonjen u slučaju da želimo izbaciti i čvorova. Jedna mogućnost bi bila da uzmemo da je

$$\boldsymbol{\rho}^i = (t_{p_1}, \dots, t_{p_i}),$$

gdje je $(p_1, \dots, p_i)$ poredak unutrašnjih čvorova određen pomoću rastućih vrijednosti od w_i, drugim riječima vrijedi $w_{p_1} \leqslant \cdots \leqslant w_{p_i}$. Pokazalo se u praksi da ovaj odabir dobro funkcionira ako su w_i dobro separirani na realnom pravcu, što je obično točno ako f ima malo čvorova. Ako pak f ima puno čvorova, tada su w_i obično grupirani u jednu ili više velikih grupa sa malom razlikom u vrijednostima između težina iz iste grupe. U takvoj situaciji čini se pretjerano da se čvorovi urede po strogo numeričkom poretku. Pošto težine osiguravaju samo grubu ocjenu relativne važnosti nekog čvora, bolje bi bilo da se čvorovi podjele u grupe, i da se onda nekako iz svake grupe izbace čvorovi uniformno.

Jedan način da se to implementira je slijedeći: Neka je $b = \max_j w_j$, i neka je

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_q = b$$

particija intervala $[0, b]$ na q podintervala $I_j = [x_{j-1}, x_j)$ $(j = 1, \dots, q)$. Promotrimo prvi interval I_1, i neka su $u_1 \leqslant \ldots \leqslant u_r$ čvorovi iz $\boldsymbol{t}$ čije su težine u I_1. Tada izvodimo da je

$$\boldsymbol{\rho}^p = (u_{i_1}, \dots, u_{i_p}) \quad \text{za } p = 1, \dots, r,$$

gdje je

$$i_j = \left\lfloor \frac{(r+1)(j - \frac{1}{2})}{p} + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad \text{za } j = 1, \dots, p.$$

Drugim riječima, iz prve grupe čvorove izbacujemo manje-više uniformno po indeksima. Definiramo $\boldsymbol{\rho}^j$, za $j > r$, uzimajući sve čvorove iz prve grupe i onda odabirući čvorove uniformno iz druge grupe na isti način. Ako prve dvije grupe sadrže manje od j čvorova, moramo uključiti i čvorove iz treće grupe, i tako dalje.

Ništa još nismo rekli o određivanju particije $(x_i)_{i=1}^q$. Ako stavimo da svaki podinterval I_j bude dovoljno mali, dobit ćemo poredak čvorova prema rastućim vrijednostima težina, dok bi veći podintervali dali implementaciju gornje procedure. U danoj implementaciji strategije za izbacivanje čvorova koriste se $x_i = 2^{i-2}\varepsilon$ za $i = 1, \dots, q$.

2.4 Specijalni l^∞ problem

U ovom odjeljku promatrat ćemo problem

$$\min_{\boldsymbol{c}} \|\boldsymbol{B}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}\|, \tag{2.8}$$

gdje je $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ i $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n-1}$, a matrica $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ ima oblik

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mu_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & \mu_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

uz

$$1 = \mu_1 > \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n-1} > \mu_n = 0, \quad \lambda_i + \mu_i = 1 \text{ za } i = 1, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Norma u (2.8) je vektorska max-norma. Iz relacija (2.10) slijedi da je

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1} < \lambda_n = 1.$$

Ovo je, zapravo, minimizacijski problem koji se pojavio kod računanja težina w_i, i za implementaciju naše strategije reduciranja podataka važno je imati efikasan i stabilan algoritam za računanje (2.8).

Iako je poznato da problem oblika (2.8) ima rješenje za proizvoljnu matricu $\boldsymbol{B}$, za jedinstvenost su nam potrebni i dodatni uvijeti. Kažemo da $m\times n$ matrica $\boldsymbol{A}$, gdje je $m \geqslant n$, zadovoljava *Haar-ov uvjet* ako je svaka $n\times n$ podmatrica nesingularna. Ako pak $\boldsymbol{B}$ zadovoljava Haar-ov uvjet, rješenje je jedinstveno (v. [17]). Ako označimo da je $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{c}) = [r_1, \ldots, r_n]^T$, i da je $h = \min_{\boldsymbol{c}} \|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{c})\|$, u našem slučaju može se pokazati da vrijedi $|r_i| = h$ za sve $i = 1, \ldots, n$. Zbog toga trebamo promatrati sistem

$$b_i - \boldsymbol{\beta}_i^T \boldsymbol{c} = s_i h$$

za $i = 1, \ldots, n$, gdje je $\boldsymbol{b} = [b_1, \ldots, b_n]^T$ i $\boldsymbol{\beta}_i^T$ je i-ti redak matrice $\boldsymbol{B}$, dok su $s_i = \pm 1$ i $\boldsymbol{s} = [s_1, \ldots, s_n]^T$. Neka je sada $\boldsymbol{z} = [z_1, \ldots, z_n]^T \in \mathbb{R}^n$ takav da je $\boldsymbol{z} \neq 0$ uz

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \boldsymbol{\beta}_i = 0,$$

što vrijedi zbog linearne zavisnosti redaka matrice $\boldsymbol{B}$. Tada je

$$\boldsymbol{z}^T \boldsymbol{b} = h \boldsymbol{z}^T \boldsymbol{s},$$

i odatle

$$h = \frac{|\boldsymbol{z}^T \boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{z}^T \boldsymbol{s}|}.$$

Desna strana se minimizira ako $\boldsymbol{s}$ odaberemo takav da vrijedi $s_i = \operatorname{sign}(z_i)$, za $z_i \neq 0$. U našem slučaju može se izvesti da je, uz odabir $z_n = 1$, $z_j = (-1)^{n-j} \det(\boldsymbol{B}_j)$, gdje je $\boldsymbol{B}_j$ matrica reda $n-1$ dobivena od $\boldsymbol{B}$ izbacivanjem j-tog reda. Za matricu $\boldsymbol{B}$ danu sa (2.9), zbog (2.10) imamo

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{B}_j &= \mu_1 \cdots \mu_{j-1} \lambda_{j+1} \cdots \lambda_n \\ &= \mu_1 \cdots \mu_j \lambda_{j+1} \cdots \lambda_n + \mu_1 \cdots \mu_{j-1} \lambda_j \cdots \lambda_n \\ &> 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

za $j = 1, \ldots, n$, pa $\boldsymbol{B}$ zadovoljava Haar-ov uvjet. Dakle, rješenje našeg minimizacijskog problema možemo dobiti pomoću rješenja linearnog sustava od n jednadžbi i n nepoznanica:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},$$

gdje je

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{s}] \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$s_j = (-1)^{n-j} \operatorname{sign}(\det \boldsymbol{B}_j) = (-1)^{n-j}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

i matrica $\boldsymbol{A}$ ima oblik

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n-1} \\ \lambda_2 & \mu_2 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n-2} \\ 0 & \lambda_3 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mu_{n-2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & \mu_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Ako $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ rješava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, tada je rješenje $\boldsymbol{c} = [c_1, \ldots, c_{n-1}]^T$ od (2.8) dano sa $c_j = x_j$ za $j = 1, \ldots, n-1$. Također, imamo da je $|x_n| = h = \min_{\boldsymbol{c}} \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{Bc}\|$. Prvo pokažimo da je sisitem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ dobro uvjetovan.

Lema 2.1 *Pretpostavimo da je $\boldsymbol{A}$ dana sa (2.12), i da vrijedi (2.10). Tada je $\boldsymbol{A}$ nesingularna. Štoviše, $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = 1$ za $n = 2$, i $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \leqslant 4n - 6$ za $n \geqslant 3$.*

Dokaz: Slučaj $n = 2$ je trivijalan, pa pretpostavimo da je $n \geqslant 3$. Ako razvijemo $\det \boldsymbol{A}$ po zadnjem stupcu, uz upotrebu (2.11), dobivamo

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n} \det \boldsymbol{B}_j = 2 \sum_{j=1}^{n} \mu_1 \cdots \mu_j \lambda_{j+1} \cdots \lambda_n. \tag{2.13}$$

Slijedi da je $\boldsymbol{A}$ nesingularna.

Da bi ogradili inverz od $\boldsymbol{A}$, za dani $\boldsymbol{b} = [b_1 \ldots, b_n]^T \in \mathbb{R}^n$, neka je $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. Cramer-ovim pravilom dobivamo

$$x_n = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} b_j \det \boldsymbol{B}_j,$$

i odavde (2.13) daje da vrijedi $|x_n| \leqslant \|\boldsymbol{b}\|$. Neka je p najveći prirodni broj takav da je $\mu_p \geqslant \frac{1}{2}$. Pošto je $\mu_1 = 1$ i $\mu_n = 0$, očito je $1 \leqslant p < n$. U sustavu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, možemo riješiti i-tu jednadžbu s obzirom na x_i za $i = 1, \ldots, p$, i s obzirom na x_{i-1} za $i = n, n-1, \ldots, p+1$. Tada dobivamo

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 + (-1)^n x_n, \\ x_j &= \frac{1}{\mu_j}[b_j - \lambda_j x_{j-1} + (-1)^{n-j+1} x_n] \quad \text{za } j = 2, \ldots, p, \end{aligned} \tag{2.14}$$

i

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= b_n - x_n, \\ x_{j-1} &= \frac{1}{\lambda_j}[b_j - \mu_j x_j + (-1)^{n-j+1} x_n] \quad \text{za } j = n-1, n-2, \ldots, p+1. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Treba primijetiti da u (2.14) imamo da je $\mu_j \geqslant \frac{1}{2}$ i $\lambda_j / \mu_j \leqslant 1$. Koristeći tu činjenicu, zajedno s nejednakošću $|x_n| \leqslant \|\boldsymbol{b}\|$, dobivamo da je

$$|x_1| \leqslant 2\|\boldsymbol{b}\|, \qquad |x_j| \leqslant 4\|\boldsymbol{b}\| + |x_{j-1}| \quad \text{za } j = 2, \ldots, p.$$

Zbog toga je

$$|x_j| \leqslant (4j - 2)\|\boldsymbol{b}\| \quad \text{za } j = 1, \ldots, p. \tag{2.16}$$

Na isti način iz (2.15) postižemo da je $|x_{n-1}| \leqslant 2\|\boldsymbol{b}\|$ i $|x_{j-1}| \leqslant 4\|\boldsymbol{b}\| + |x_j|$, tako da je

$$|x_{n-j}| \leqslant (4j - 2)\|\boldsymbol{b}\| \quad \text{za } j = 1, \ldots, n-p. \tag{2.17}$$

Nejednakosti (2.16) i (2.17) sada povlače da je $|x_p| \leqslant (4n-6)\|\boldsymbol{b}\|$ za $p = 1, \ldots, n$. Označimo da je $\boldsymbol{A}^{-1} = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ i $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \max_i s_i =: \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{i,j}|$, i da je $\boldsymbol{b} = [\operatorname{sign}(\alpha_{i,1}), \ldots, \operatorname{sign}(\alpha_{i,n})]^T$. Onda je naravno $\|\boldsymbol{b}\|_\infty = 1$, a pošto je $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$, tada je $s_i = x_i \leqslant 4n-6$, i to možemo napraviti za svaki i. Dakle, dobili smo da je $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \leqslant 4n-6$. ∎

Iz ove leme i (2.10) dobivamo

$$\boldsymbol{\kappa}_\infty(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_\infty \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \leqslant 2(4n-6),$$

za $n \geqslant 3$, gdje je $\boldsymbol{\kappa}_\infty(\boldsymbol{A})$ uvjetovanost matrice $\boldsymbol{A}$ obzirom na max-normu. Za našu upotrebu n neće biti veći od stupnja polinoma kojeg ćemo koristiti, što će najčešće značiti da je n manji od 10. Linearni sistem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ je zbog toga dobro uvjetovan.

Dokaz Leme 2.1 također sugerira algoritam za rješavanje sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, gdje je $\boldsymbol{A}$ dan sa (2.12):

1. Odredi najveći p takav da je $\mu_p \geqslant \frac{1}{2}$.

2a. Izvedi Gauss-ove eliminacije na jednadžbama $2, \ldots, p$ eliminirajući x_{i-1} iz i-te jednadžbe za $i = 2, \ldots, p$.

2b. Izvedi Gauss-ove eliminacije unatrag na jednadžbama $n-1, n-2, \ldots, p+1$, eliminirajući x_i iz i-te jednadžbe za $i = n-1, n-2, \ldots, p+1$.

3. Iz reduciranih jednadžbi broj p i $p+1$ izračunaj x_p i x_n.

4a. Odredi x_i iz reducirane i-te jednadžbe za $i = p-1, p-2, \ldots, 1$.

4b. Odredi x_{i-1} iz reducirane i-te jednadžbe za $i = p+2, \ldots, n$.

Pošto uvijek dijelimo s brojem koji nije manji od $\frac{1}{2}$, algoritam se uvijek može u cijelosti izvršiti, a jedini porast elemenata u $\boldsymbol{A}$ tokom eliminacija događa se u zadnjem stupcu. Ipak, lagano se vidi da su svi elementi u zadnjem stupcu ograđeni s n u svakom koraku eliminacija, pa zaključujemo da je algoritam stabilan.

2.5 Koeficijentne norme za splajnove

Za strategiju izbacivanja čvorova vrlo su važne dobre metode za računanje aproksimacije splajna koja je iz nekog potprostora. Zapravo, svaka metoda aproksimacije sa fiksnim čvorovima može poslužiti. Kao što smo vidjeli, specijalni problem takvog tipa pojavio se pri dobivanju mjere važnosti unutrašnjeg čvora u reprezentaciji splajna.

Pretpostavimo da je dan $g \in \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}$, i da je, kao i prije, $\boldsymbol{\tau}$ podniz od $\boldsymbol{t}$. Neka su $\boldsymbol{c} = (c_j)_{j=1}^n$ i $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i=1}^m$ B-splajn koeficijenti od g u $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}$, odnosno u $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}}$, tako da je

$$g = \sum_{j=1}^n c_j B_{j,k,\boldsymbol{\tau}} = \sum_{i=1}^m d_i B_{i,k,\boldsymbol{t}}. \tag{2.18}$$

Matricu $\boldsymbol{B}$ tipa $m \times n$, gdje je $n \leqslant m$, takvu da je $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{c}$ zovemo *B-splajn matricom za ubacivanje čvorova (knot insertion ili KI-matrica) reda k s $\boldsymbol{\tau}$ u $\boldsymbol{t}$* (v. [2], [6]). Elementi $b_{i,j}$ matrice $\boldsymbol{B}$ su nenegativni i vrijedi da je

$$\sum_{j=1}^n b_{i,j} = 1 \quad \text{za } i = 1, \ldots, m, \tag{2.19}$$

što slijedi iz Leme 3.4.

Jednakost (2.19) kaže da je suma elemenata u danom retku od $\boldsymbol{B}$ jednaka 1. U 2.3 odjeljku pokazali smo da slično vrijedi i za sume u stupcima od $\boldsymbol{B}$ za specijalni slučaj kada je $m = n + 1$, a slijedeća lema to generalizira.

Lema 2.2 *Pretpostavimo da je $\boldsymbol{B} = [b_{i,j}]_{i,j=1}^{m,n}$ KI-matrica reda k s $\boldsymbol{\tau} = (\tau_j)_{j=1}^{n+k}$ u $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i=1}^{m+k}$. Tada vrijedi*

$$\sum_{i=1}^m b_{i,j}(t_{i+k} - t_i) = \tau_{j+k} - \tau_j \quad \text{za } j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.20}$$

Posebno, imamo još

$$\sum_{i=1}^m b_{i,j} \geqslant 1 \quad \text{za } j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.21}$$

Dokaz: Po definiciji od $b_{i,j}$ imamo da je $d_i = \sum_{j=1}^n b_{i,j} c_j$, pa ako u (2.18) stavimo da je $g = B_{l,k,\boldsymbol{\tau}}$, za kojeg vrijedi da je $c_j = \delta_{j,l}$, dobivamo

$$B_{l,k,\boldsymbol{\tau}} = \sum_{i=1}^m b_{i,l} B_{i,k,\boldsymbol{t}}. \tag{2.22}$$

Ako sad l zamijenimo sa j, i integriramo obje strane jednakosti, zbog $\int_{\mathbb{R}} B_{j,k,\boldsymbol{\tau}} = (\tau_{j+k} - \tau_j)/k$ dobit ćemo (2.20).

Radi linearne nezavisnosti i konačnog nosača B-splajna, iz (2.22) postižemo da je u (2.20) $b_{i,j} \neq 0$ samo ako je $[t_i, t_{i+k}] \subseteq [\tau_j, \tau_{j+k}]$. Zbog toga je

$$\sum_i b_{i,j}(t_{i+k} - t_i) \leqslant \max_i (t_{i+k} - t_i) \sum_i b_{i,j}, \tag{2.23}$$

gdje je $\max_i (t_{i+k} - t_i) \leqslant \tau_{j+k} - \tau_j$. Iz (2.23) i (2.20) slijedi (2.21). ■

Pretpostavimo da je $f \in \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}$, i neka je $\boldsymbol{t} = (t_j)_{j=1}^{m+k}$ bilo koji niz čvorova koji sadrži $\boldsymbol{\tau}$. Pošto je $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}} \subset \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}}$, f možemo zapisati kao $f = \sum_{j=1}^m d_j B_{j,k,\boldsymbol{t}}$ za neke $(d_j)_{j=1}^m$. Tada definiramo klasu normi na $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}$ sa

$$\|f\|_{l^p,\boldsymbol{t}} = \begin{cases} \left(\sum_j |d_j|^p \frac{t_{j+k} - t_j}{k}\right)^{1/p} & \text{za } 1 \leqslant p < \infty. \\ \max_j |d_j| & \text{za } p = \infty, \end{cases} \tag{2.24}$$

Označimo sa $\boldsymbol{d} = (d_j)_{j=1}^m$ vektor B-splajn koeficijenata od f u $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}}$, a sa $\boldsymbol{c} = (c_j)_{j=1}^n$ vektor B-splajn koeficijenata od f u $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}$. Tada je

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{c}, \tag{2.25}$$

gdje je $\boldsymbol{B}$ KI-matrica. Zbog toga je

$$\|f\|_{l^p,\boldsymbol{t}} = \|\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{t}}^{1/p} \boldsymbol{B}\boldsymbol{c}\|_p, \tag{2.26}$$

gdje je $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{t}}^{1/p}$ $m \times m$ diagonalna matrica sa elementima

$$e_{i,i} = \begin{cases} [(t_{i+k} - t_i)/k]^{1/p} & \text{za } 1 \leqslant p < \infty, \\ 1 & \text{za } p = \infty, \end{cases} \tag{2.27}$$

za $i = 1, \ldots, m$, i $\|v\|_p = (\sum_j |v_j|^p)^{1/p}$ je obična l^p vektorska norma. To su diskretne $(l^\infty, \boldsymbol{t})$ norme koje smo koristili u 2.3 odjeljku.

Dobro je poznata činjenica da kontrolni poligon splajn funkcije konvergira prema splajnu koga reprezentira kada se niz čvorova profinjujue. U našoj terminologiji to znači da $(l^\infty, \boldsymbol{t})$ norma konvergira prema $\mathtt{L}^\infty$ normi splajna (v. [4]).

Slijedeća propozicija pokazuje da postoji slična relacija za $(l^p, \boldsymbol{t})$ norme. Posebno ćemo pokazati da se $(l^2, \boldsymbol{t})$ norma i $\mathtt{L}^2$ norma razlikuju za veličinu koja je 'mala' ako je f 'glatka'.

Propozicija 2.3 *Za proizvoljni $f \in \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}$, niz čvorova $\boldsymbol{t}$ i $\boldsymbol{\tau}$ podniz od $\boldsymbol{t}$, te za p koji zadovoljava $1 \leqslant p \leqslant \infty$, vrijedi*

$$D_k^{-1}\|f\|_{l^p,\boldsymbol{\tau}} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \|f\|_{l^p,\boldsymbol{t}} \leqslant \|f\|_{l^p,\boldsymbol{\tau}}, \tag{2.28}$$

gdje konstanta D_k ovisi samo o k. Štoviše, ako je $\boldsymbol{\tau} = (\tau_j)_{j=1}^{n+k}$, tada je

$$\|f\|_{l^2,\boldsymbol{\tau}} - \|f\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant 2^{\frac{1}{2}}(\tau_{n+k} - \tau_1)^{\frac{1}{2}} D_{k,\infty}\omega(f), \tag{2.29}$$

gdje je $\omega(f) = \max_j\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [\tau_{j+1-k}, \tau_{j+k-1}]\}$ i $D_{k,\infty} \leqslant D_k$.

Dokaz: Za dokaz prve dvije nejednakosti u (2.28) vidi referencu u [9], dok ćemo zadnje dvije dokazati ovdje. Zapravo moramo pokazati da je

$$\|\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{t}}^{1/p}\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}\|_p \leqslant \|\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\tau}}^{1/p}\boldsymbol{c}\|_p, \tag{2.30}$$

gdje je $\boldsymbol{c}$ vektor B-splajn koeficijenata od f u $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}$. Za $p = \infty$ ova nejednakost slijedi direktno iz (2.19) i iz činjenice da su $b_{i,j}$-ovi nenegativni:

$$|\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}|_i = |\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}c_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}|c_j| \leqslant \|\boldsymbol{c}\|_\infty.$$

Pretpostavimo da je $p < \infty$. Tada je

$$\|\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{t}}^{1/p}\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}\|_p^p = \sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}c_j\right|^p \frac{t_{i+k} - t_i}{k}.$$

Koristeći nejednakost trokuta, Hölderovu nejednakost i (2.19) dolazimo do

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}c_j\right|^p &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}(|c_j||b_{i,j}|^{1/p})(|b_{i,j}|)^{1-1/p}\right)^p \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n}|c_j|^p|b_{i,j}|.\end{aligned}$$

Odavde, uz (2.20),

$$\|\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{t}}^{1/p}\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}\|_p^p \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|c_j|^p|b_{i,j}|\frac{t_{i+k} - t_i}{k} = \|\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\tau}}^{1/p}\boldsymbol{c}\|_p^p.$$

Ovo dokazuje (2.30), i dokaz za (2.28) je potpun.

Za dokaz nejednakosti (2.29), neka je $B_j = B_{j,k,\boldsymbol{\tau}}$. Prisjetimo se da je $\int B_j = (\tau_{j+k} - \tau_j)/k$. Po definiciji $(l^p, \boldsymbol{\tau})$ norme (2.24), i (2.28) slijedi

$$
\begin{aligned}
(\|f\|_{l^2,\boldsymbol{\tau}} - \|f\|_{\mathrm{L}^2})^2 &\leqslant \|f\|^2_{l^2,\boldsymbol{\tau}} - \|f\|^2_{\mathrm{L}^2} \\
&= \int \sum_{j=1}^{n} c_j^2 B_j(x)\,\mathrm{d}x - \int \left(\sum_{j=1}^{n} c_j B_j(x) \right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (c_i - c_j)^2 B_i(x) B_j(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{2} \max_{|i-j|<k} |c_i - c_j|^2 (\tau_{n+k} - \tau_1).
\end{aligned}
$$

Koristili smo činjenicu da je $\int B_i B_j = 0$ za $|i-j| \geqslant k$, i da je $\sum_{i=1}^n B_i = 1$. Slijedi, ako je $f = \sum_{j=1}^n c_j B_{j,k,\boldsymbol{\tau}}$, da je

$$
0 \leqslant \|f\|_{l^2,\boldsymbol{\tau}} - \|f\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant 2^{-\frac{1}{2}} \max_{|i-j|<k} |c_i - c_j| (\tau_{n+k} - \tau_1)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.31}
$$

Da bi dokazali da iz (2.31) slijedi (2.29), prisjetimo se da vrijedi (v. [3], [4])

$$
|c_j| \leqslant D_{k,\infty} \max_{\tau_{j+1} \leqslant y \leqslant \tau_{j+k-1}} |f(y)|,
$$

gdje je $D_{k,\infty} \leqslant D_k$. A odavde izvodimo, uz činjenicu da je za fiksno x $f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^n (c_i - f(x)) B_{j,k,\boldsymbol{\tau}}(y)$,

$$
|c_j - f(x)| \leqslant D_{k,\infty} \sup_{u,v \in [\tau_j, \tau_{j+k}]} |f(u) - f(v)|
$$

za $x \in [\tau_j, \tau_{j+k}]$. Uz pretpostavku da je $|i-j| < k$, i odabirući $x \in [\tau_i, \tau_{i+k}] \cap [\tau_j, \tau_{j+k}]$, dobivamo

$$
|c_j - c_i| \leqslant |c_j - f(x)| + |c_i - f(x)| \leqslant 2 D_{k,\infty} \omega(f).
$$

Kombinacija ovoga s (2.31) dovršava dokaz od (2.29). ■

Najednakost (2.28) povlači da za $1 \leqslant p \leqslant \infty$ vrijedi $\|f\|_{l^p,\boldsymbol{\tau}} \leqslant D_k \|f\|_{l^p,\boldsymbol{t}}$. Drugim riječima, B-splajn koeficijenti od f na $\boldsymbol{\tau}$ mogu se ograditi, na određen način, sa B-splajn koeficijentima od f na $\boldsymbol{t}$ neovisno od $\boldsymbol{\tau}$ i $\boldsymbol{t}$. Primijetimo da taj rezultat također slijedi iz Leme 2.1 za specijalni slučaj kada je $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\tau} \cup \{z\}$, gdje je konstanta $D_{k,\infty}$ zamjenjena sa $4k-6$.

U ovoj implementaciji aproksimacije, u procesu kojeg smo u 2.2 odjeljku nazvali *aproksimiranje*, tj. za operator G, koristi se aproksimacija u $(l^2, \boldsymbol{t})$ normi. Zbog toga je važno imati ogradu za uvjetovanost ovog minimizacijskog problema.

Za dani $f \in \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}}$ i $\boldsymbol{\tau}$ podniz od $\boldsymbol{t}$ definiramo $g^* = \mathsf{G}f \in \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}$ kao najbolju aproksimaciju od f u $(l^2, \boldsymbol{t})$ normi, tj.

$$\|f - \mathsf{G}f\|_{l^2,\boldsymbol{t}} = \min_{g \in \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}} \|f - g\|_{l^2,\boldsymbol{t}}.$$

Koristeći (2.30) vidimo da je vektor $\boldsymbol{c} = (c_j)_{j=1}^n$ B-splajn koeficijenata od $\mathsf{G}f = \sum_{j=1}^n c_j B_{j,k,\boldsymbol{\tau}}$ rješenje problema najmanjih kvadrata

$$\min_{\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{t}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d})\|_2. \tag{2.32}$$

Kao i prije, $\boldsymbol{B}$ je KI-matrica sa $\boldsymbol{\tau}$ u $\boldsymbol{t}$. Pokažimo da $\boldsymbol{B}$ ima puni rang, tako što ćemo pokazati da su njegovi stupci linearno nezavisni. Pretpostavimo da je $\sum_{j=1}^n c_j b_{i,j} = 0$ za svaki $i = 1, \ldots, m$. Tada iz (2.18) i (2.25) dobivamo da je $d_i = 0$ za $i = 1, \ldots, m$, iz čega slijedi, ponovno iz (2.18), da je $g \equiv 0$. Zbog jedinstvenosti rastava, mora biti $c_j = 0$ za svaki $j = 1, \ldots, n$. Dakle, zbog toga što $\boldsymbol{B}$ ima puni rang i jer je $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{t}}^{\frac{1}{2}}$ nesingularna, rješenje od (2.32) je jedinstveno. Slijedeći rezultat pokazuje da, ako uvedemo pogodno skaliranje u (2.32), dobivamo problem čija je uvjetovanost ograđena izrazom koji ne ovisi o $\boldsymbol{t}$ i $\boldsymbol{\tau}$.

Propozicija 2.4 *Pretpostavimo da je $\boldsymbol{\tau} \subset \boldsymbol{t}$, i neka je*

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{t}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{B} \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\tau}}^{-\frac{1}{2}},$$

gdje je $\boldsymbol{B}$ KI-matrica reda k sa $\boldsymbol{\tau}$ u $\boldsymbol{t}$, a $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{t}}$ i $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\tau}}$ su dijagonalne matrice dane sa (2.27). Tada vrijedi

$$\|\boldsymbol{F}\|_2 \|\boldsymbol{F}^\dagger\|_2 \leqslant D_k, \tag{2.33}$$

gdje je D_k konstanta iz (2.28) i $\boldsymbol{F}^\dagger = (\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^T$.

Dokaz: Imamo da je $\|\boldsymbol{F}\|_2 = \sigma_{\max}$ i $\|\boldsymbol{F}^\dagger\|_2 = 1/\sigma_{\min}$, gdje su $\sigma_{\max}$ i $\sigma_{\min}$ najveća i najmanja singularna vrijednost od $\boldsymbol{F}$. Dakle,

$$\sigma_{\max} = \max_{\boldsymbol{c} \neq 0} \|\boldsymbol{F}\boldsymbol{c}\|_2 / \|\boldsymbol{c}\|_2, \quad \sigma_{\min} = \min_{\boldsymbol{c} \neq 0} \|\boldsymbol{F}\boldsymbol{c}\|_2 / \|\boldsymbol{c}\|_2.$$

Ali, tada iz (2.26) i (2.28), ako se stavi da je vektor B-splajn koeficijenata od f jednak $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\tau}}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{c}$, dobivamo

$$D_k^{-1}\|\boldsymbol{c}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{F}\boldsymbol{c}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{c}\|_2.$$

Odavde slijedi (2.33). ■

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D_k	1.00	2.41	5.20	10.03	21.32	40.90	86.37	166.41	348.56	674.29	1402.95

Slika 2.1: Izračunate vrijednosti od D_k

Iz ovog rezultata slijedi da bi moglo biti bolje da se uvede skaliranje u (2.32) i riješi

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{t}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\tau}}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d})\|_2, \tag{2.34}$$

pošto je uvjetovanost ovog problema neovisna o nizovima čvorova $\boldsymbol{\tau}$ i $\boldsymbol{t}$. Rješenje od (2.32) je tada dano sa $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\tau}}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}$.

Kao što smo već prije spomenuli, koristili smo najbolju aproksimaciju u $(l^2, \boldsymbol{t})$ normi u danoj implementaciji *aproksimiranja* (odjeljak 2.2). Koristili smo diskretnu normu, jer je jednostavnija i brže se s njom radi, i $(l^2, \boldsymbol{t})$ normu zbog toga što dovodi do linearnog sistema jednadžbi–normalnih jednadžbi, i aproksimira L^2 normu vrlo dobro (Propozicija 2.3), bez da se ikada izgubi puni rang. Nedostatak $(l^2, \boldsymbol{t})$ norme je da greška mjerena tom normom ne daje nikakve informacije o razlici između splajna f i njegove aproksimacije g u određenoj točki x. Iz tog razloga, izabrali smo da ćemo mjeriti grešku u $(l^\infty, \boldsymbol{t})$ normi. Po propoziciji 2.3 tada imamo $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$ za svaku točku x, što je bitno u mnogim aplikacijama.

Općenito, problem najmanih kvadrata kao što je (2.34) trebao bi se riješiti koristeći ortogonalne transformacije. Ipak, u ovom posebnom slučaju, pokazali smo da je uvjetovanost problema najmanjih kvadrata ograničena s D_k. Tablica 2.1 pokazuje izračunate vrijednosti od $D_1, \ldots, D_{11}$ (za referencu vidi [9]). Kao što je de Boor primijetio, za ove brojeve vrijedi da je $D_k = O(2^k)$. Na kraju zaključujemo da je, za male vrijednosti k, sigurnije riješiti (2.34) pomoću rješavanja normalne jednadžbe, pošto je njihova uvjetovanost ograđena sa D_k^2.

2.6 Izbacivanje čvorova kod parametarskih B-splajn krivulja

U ovom odjeljku proširit ćemo tehnike koje smo koristili za izbacivanje čvorova kod splajnova na parametarske splajn krivulje.

Parametarska B-splajn krivulja $\vec{f}$ u $\mathbb{R}^d$ reda k, sa čvorovima $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i=1}^{m+k}$, je krivulja u $\mathbb{R}^d$ kod koje je svaka komponenta B-splajn funkcija s istim nizom čvorova $\boldsymbol{t}$, tj. ako definiramo vektor funkciju $\boldsymbol{b_t} = (B_{1,k,\boldsymbol{t}}, \dots, B_{m,k,\boldsymbol{t}})^T$, tada je

$$\vec{f} = \left(f^1, \dots, f^d\right)^T = \sum_{i=1}^{m} \left(c_i^1, \dots, c_i^d\right)^T B_{i,k,\boldsymbol{t}} = \sum_{i=1}^{m} \vec{c}_i B_{i,k,\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{b_t}^T \vec{\boldsymbol{c}},$$

za odgovarajuće vektore $(\vec{c}_i)_{i=1}^m$ u $\mathbb{R}^d$.

Prisjetimo se nejednakosti (2.28) i napomenimo da se za parametarske krivulje ona primjenjuje za svaku komponentu posebno. U ovom odjeljku koristit ćemo samo $(l^p, \boldsymbol{t})$ norme za $p = 2$ i $p = \infty$.

Ako želimo aproksimirati parametarsku B-splajn krivulju sa čvorovima $\boldsymbol{t}$ minimiziranjem $(l^2, \boldsymbol{t})$ normi greške svake komponente, moramo riješiti probleme tipa (2.32) za B-splajn koeficijente svake komponente, ali sa $\boldsymbol{E_t}$ i $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{k,\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{t}}$ fiksiranim, gdje je $\boldsymbol{B}_{k,\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{t}}$ B-splajn KI-matrica reda k sa $\boldsymbol{\tau}$ u $\boldsymbol{t}$. Pa, neka su dane točnosti $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$ i norma $\|\bullet\|$ na $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}}$. Problem koji želimo razmotriti je pronalaženje najkraćeg mogućeg niza čvorova $\boldsymbol{\tau}$, uz $\boldsymbol{\tau} \subset \boldsymbol{t}$, i splajn krivulju $\vec{\phi} = (\phi^1, \dots, \phi^d)^T$ gdje je svaki ϕ^i iz $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}$ takav da je

$$\|f^i - \phi^i\| \leqslant \varepsilon_i, \quad \text{za } i = 1, \dots, d. \tag{2.35}$$

Ponovno, ne tvrdimo da ćemo stvarno naći najkraći mogući niz čvorova $\boldsymbol{\tau}$ takvih svojstava, već samo splajn sa koliko je to moguće malo čvorova.

Prvi korak rješavanja bit će pridruživanje težina w_j^i svakoj komponenti f^i u svakoj unutrašnjoj točki t_j od $\boldsymbol{t}$. Ove težine bi, kao i prije, trabale biti mjera značaja čvora t_j u reprezentaciji splajna $\vec{f}$. Prirodan pristup bio bi da definiramo da w_j^i bude udaljenost između f^i i potprostora $\mathcal{S}_j = \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{t}\setminus\{t_j\}}$ dobivenog izbacivanjem t_j iz $\boldsymbol{t}$. Preciznije, ako je t_j jednostuki čvor od $\boldsymbol{t}$ postavljamo da je

$$w_j^i = \operatorname{dist}\left(f^i, \mathcal{S}_j\right) = \min_{g \in \mathcal{S}_j} \|f^i - g\|_{l^\infty, \boldsymbol{t}}. \tag{2.36}$$

Minimizacijski problem (2.36) ima lokalno rješenje koje se može naći s $O(5k)$ operacija za splajn reda k, što se vidi iz odjeljka 2.4. Analogno se pronalaze i težine za višestruke čvorove.

Težine nam trebaju da bi odredili u kojem poretku bi se čvorovi trebali ukloniti iz $\boldsymbol{t}$. Jedna mogućnost je da definiramo da je $w_j = \max_i w_j^i$ i izbacujemo čvorove prema rastućim w_j-ovima. Ovo dobro funkcionira u nekim slučajevima u kojima su sve komponente vektora točnosti jednake, ali ima i neke očite nedostatke. Na primjer, ne radi za kružnicu gdje su sve težine približno jednake. Osim toga, smatra se da je važno dozvoliti različite točnosti za komponente krivulje. Umjesto toga koristit ćemo slijedeći pristup. Svakom čvoru t_j pridružiti ćemo *rangirajući broj*

$$\nu_j = \max_i \nu_j^i,$$

gdje je ν_j^i takav da je $w_j^i \in I_{\nu_j^i}^i$. Definirajmo $I_0^i = [0, \varepsilon_i/2)$, $I_1^i = [\varepsilon_i/2, \varepsilon_i)$, a općenito $I_j^i = [2^{j-2}\varepsilon_i, 2^{j-1}\varepsilon_i)$ za $j = 1, 2, 3, \ldots$. Neka je $\nu_{j_1} \leqslant \nu_{j_2} \leqslant \cdots \leqslant \nu_{j_l}$ poredak rangirajućih brojeva l unutrašnjih čvorova od $\boldsymbol{t}$ u nepadajućem poretku. Ako želimo ukloniti i čvorova iz $\boldsymbol{t}$, tada će se izbaciti svi čvorovi s rangirajućim brojem manjim od ν_{j_i}. Preostalih, recimo, p čvorova izabrat ćemo među svim čvorovima s rangirajućim brojem ν_{j_i} na 'uniformni' način što se tiče indeksa, kao u odjeljku 2.3.

Na taj način smo modificirali korak *rangiranje* u algoritmu danom u odjeljku 2.2. U koraku *aproksimiranje*, ako je niz čvorova $\boldsymbol{\tau}$ dan, uz $\boldsymbol{\tau} \subset \boldsymbol{t}$, aproksimacija ϕ_i od f_i iz $\mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}$ dana je kao jedinstveno rješenje problema najmanjih kvadrata

$$\min_{g \in \mathcal{S}_{k,\boldsymbol{\tau}}} \|f^i - g\|_{l^2,\boldsymbol{t}}.$$

U *izbacivanju* se koristi *aproksimiranje* na svakoj komponenti od $\vec{f}$ da bi se odredio najveći broj čvorova koji se mogu izbaciti tako da odgovarajuća splajn aproksimacija postiže grešku manju od zadane točnosti. Razumna je pretpostavka da se greška aproksimacije od $\vec{f}$ povečava s brojem čvorova koji se izbacuju. Broj koji se konačno izbacuje, može se zbog toga odrediti binarnim pretraživanjem. Drugim riječima, prvo se pokušava ukloniti polovica unutrašnjih čvorova i izračuna se pripadajuća aproksimacija i njena greška. Ako je greška manja od točnosti, tada ćemo pokušati izbaciti 3/4 čvorova, a ako je greška veća od točnosti, pokušavamo sa 1/4 čvorova, i tako dalje.

Rangiranje, izbacivanje, i *aproksimiranje* može se upotrijebiti na gore navedeni način kako bi odredili niz čvorova $\boldsymbol{\tau}_1$ uz $\boldsymbol{\tau}_1 \subset \boldsymbol{t}$, i aproksimaciju $\vec{\phi}_1$ od $\vec{f}$ sa čvorovima $\boldsymbol{\tau}_1$, takvu da je greška manja od $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Ako $\boldsymbol{\tau}_1$ nema više niti jednog unutrašnjeg čvora, možemo biti vrlo zadovoljni jer smo izbacili sve moguće čvorove. U drugoj krajnosti imamo da je $\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{t}$, što znači da niti jedan čvor nije bio izbačen. Općenito, rezultat će biti između ove dvije krajnosti. Tada možemo pokušati izbaciti još čvorova na slijedeći način. Rangiraju se čvorovi $\boldsymbol{\tau}_1$ od $\vec{\phi}_1$, i iskoristi se korak *izbacivanje* da bi se dobio niz čvorova $\boldsymbol{\tau}_2$ uz $\boldsymbol{\tau}_2 \subset \boldsymbol{\tau}_1 \subset \boldsymbol{t}$, ali se u *aproksimiranju* uvijek računa aproksimacija od originalnog splajna $\vec{f}$. Na taj način dobivamo aproksimaciju $\vec{\phi}_2$ od $\vec{f}$ na čvorovima $\boldsymbol{\tau}_2$. Taj postupak može se nastaviti sve dok se više ne može ukloniti niti jedan čvor.

Što se tiče normi, s ciljem kontrole greške po točkama, preporuča se korištenje $(l^\infty, \boldsymbol{t})$ norme da bi se mjerila greška u (2.35). Napomenimo još da reducirana krivulja $\vec{\phi}$ nasljeđuje parametrizaciju od $\vec{f}$.

U prethodnim odjeljcima naznačili smo opću metodu za modeliranje splajnom funkcije jedne varijable ili podataka, baziranu na redukciji podataka. Pokazat ćemo kako se ta tehnika može proširiti na parametarske krivulje.

Pretpostavimo da je dano m točaka $(\vec{p}_j)_{j=1}^m$ u $\mathbb{R}^d$. Najčešće imamo da je $d = 2$ ili $d = 3$. Da bi modelirali kubičnu splajn krivulju po tim točkama, nastavljamo na slijedeći način. Neka je $\vec{f}_1(t)$ po dijelovima linearan interpolant podataka, koristeći recimo, parametrizaciju akumulirane duljine luka danu sa $\vec{f}_1(t_i) = \vec{p}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, m$, gdje je

$$t_i = \begin{cases} 0, & \text{za } i = 1; \\ t_{i-1} + \|\vec{p}_i - \vec{p}_{i-1}\|_{l^2}, & \text{za } i = 2, 3, \ldots, m. \end{cases}$$

Eksplicitno, imamo da je

$$\vec{f}_1(t) = \frac{(t_i - t)\vec{p}_{i-1} + (t - t_{i-1})\vec{p}_i}{t_i - t_{i-1}}$$

na intervalu $[t_{i-1}, t_i]$. Uvodeći po jedan čvor na svakom kraju, recimo $t_0 = t_1$ i $t_{m+1} = t_m$, $\vec{f}_1$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju linearnih B-splajnova. Za dani vektor točnosti $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathbb{R}^d$ možemo tada izračunati parametarsku kubičnu splajn aproksimaciju od $\vec{f}_1$ s greškom manjom od $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ u svakoj točki podataka, u dva koraka:

1. Primijeniti redukciju podataka na $\vec{f}_1$ za red $k = 2$ i točnost $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 < \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ da bi dobili novu poligonalnu krivulju $\vec{f}_2$.

2. Primijeniti redukciju podataka na $\vec{f}_2$ prikazanu kao kubični splajn čiji je niz čvorova $(x_i)_{i=1}^{3m+2}$ jednak: $x_1 = \cdots = x_4 = t_1$, $x_{3i-1} = x_{3i} = x_{3i+1} = t_i$ za $i = 2, \ldots, m-1$, i $x_{3m-1} = \cdots = x_{3m+2} = t_m$, koristeći točnost $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = \vec{\boldsymbol{\varepsilon}} - \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$. Tako dobivamo kubičnu splajn aproksimaciju $\vec{f}_3$ sa nizom čvorova $\boldsymbol{\tau}$.

Treba primijetiti da se ova metoda može upotrijebiti za dobivanje splajn aproksimacije bilo kojeg reda $k \geqslant 2$, prikazujući $\vec{f_2}$ kao splajn reda k umjesto kubični splajn u drugom koraku.

Periodične i zatvorene krivulje predstavljaju problem za proces izbacivanja čvorova, jer takve krivulje, općenito, mogu postati otvorene. Jedan način da se to riješi je da se uvedu ograničenja na metodu aproksimacije najmanjim kvadratima tako da krajevi ostanu fiksirani. Takav pristup ipak nije sasvim zadovoljavajući pošto bi razlikovao jednu točku (početnu i krajnju) držeći ju fiksiranom, dok bi ostalim točkama bilo dozvoljeno da variraju unutar točnosti. Bolje rješenje postiže se ako se vratimo unatrag i malo promijenimo strategiju izbacivanja čvorova za eksplicitne splajn funkcije.

Poglavlje 3

Q-splajnovi

3.1 Uvod

U ovom poglavlju zanimat će nas koliko se lijepih svojstva polinomnih splajnova može prenjeti na q-splajnove (v. [7]). Prvo ćemo q-B-splajn prikazati kao linearnu kombinaciju odgovarajućih polinomnih B-splajnova, zatim ćemo izvesti njegovu matricu za ubacivanje čvorova (*knot insertion* ili KI-matrica), gdje ćemo ubacivati samo po jedan čvor, te na kraju dati prilično jednostavne i stabilne algoritme za računanje q-splajna bazirane na ubacivanju čvorova i de Boor-ovom algoritmu.

Pojam q-splajna vuče porijeklo iz teorije štapova. Pretpostavimo jednostavan štap učvršćen u čvorovima $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{k+1}$; tada je progib štapa između dva uzastopna čvora rješenje $s(x)$ diferencijalne jednadžbe $D^2[E \cdot I \cdot D^2]s = 0$. Ovdje E označava Young-ov modul elastičnosti, a I je moment inercije poprečnog presjeka. Pretpostavka je da je $E \cdot I = 1/q$, $q > 0$, gdje je q po dijelovima linearna neprekidna funkcija, sa eventualnim prekidima derivacije u čvorovima. Na taj način dobivamo rubni problem na $[x_i, x_{i+1}]$, za $i = 0, \ldots, k$:

$$D^2 \frac{1}{q} D^2 s = 0, \quad s(x_i) = f_i, \; s(x_{i+1}) = f_{i+1}, \; s''(x_i) = s''_i, \; s(x_{i+1}) = s''_{i+1},$$

gdje su s''_i i s''_{i+1} odabrani tako da osiguravaju da je $s \in C^2[x_0, x_{k+1}]$. Funkcija koja zadovoljava ovakav rubni problem zove se *q-splajn*.

Prva dva prikaza q-splajna, koja ujedno daju i stabilne algoritme za njegovo računanje, baziraju se na poznatoj jednadžbi za derivaciju Čebiševljevih splajnova i algoritma tipa Oslo. Nadalje, koristit ćemo poseban *kanonski* *potpuni Čebiševljev* (CCT)-sistem, i neke opće tehnike iz *teorije Chebyshevljevih splajnova*. Umjesto direktnog računanja q splajna, prikazat ćemo takav splajn kao linearnu kombinaciju splajnova sa malim nosačem (B-splajnova), koji se pak mogu prikazati kao linearna kombinacija običnih polinomnih B-splajnova. Prvi način, koji je nešto jednostavniji za izvesti, daje takav B-splajn kao linearnu kombinaciju polinomnih B-splajnova 5. reda ali klase C^1. Pošto je q-splajn ipak po dijelovima polinom 4. stupnja sa drugom neprekidnom derivacijom poželjno ga je, dakle, prikazati preko polinomnog B-splajna 4. stupnja klase C^2, što ćemo i učiniti u drugom prikazu. KI-matricu izračunat ćemo koristeći ovaj drugi prikaz, a iz nje, i iz činjenice da se jednostavnije računa vrijedost B-splajna u čvorovima koji se nalaze u njegovom nosaču, na vrlo jednostavan način dobit ćemo predzadnji algoritam koji u sebi sadrži samo konveksne kombinacije što osigurava njegovu stabilnost. Zadnji algoritam direktna je generalizacija de Boor-ovog algoritma.

3.2 Osnove Čebiševljeve teorije

Neka je dana particija $\Delta = \{x_i\}_{i=1}^{n-4}$ uz $a < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-4} < b$ intervala $[a, b]$, kojoj je pridružena proširena particija $T = \{t_i\}_{i=1}^{n+4}$, gdje je $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant a = t_4$, $t_i = x_{i-4}$ za $i = 5, \ldots, n$ i $t_{n+1} = b \leqslant t_{n+2} \leqslant t_{n+3} \leqslant t_{n+4}$. Zatim, neka je q neprekidna, po dijelovima linearna funkcija definirana sa

$$q(x)|_{[t_i,t_{i+1}]} = \frac{q_{i+1} - q_i}{h_i}(x - t_i) + q_i, \tag{3.1}$$

gdje je $h_i = t_{i+1} - t_i$, i $q_i > 0$ za svaki i. Promotrimo CCT-sistem $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ definiran sa:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1, & u_2(x) &= \int_a^x ds_2, \\ u_3(x) &= \int_a^x ds_2 \int_a^{s_2} q(s_3)\, ds_3, & u_4(x) &= \int_a^x ds_2 \int_a^{s_2} q(s_3)\, ds_3 \int_a^{s_3} ds_4. \end{aligned}$$

Želimo konstruirati lokalnu bazu za splajnove koje su po dijelovima linerane kombinacije ovih funkcija, tj. naći B-splajnove $T_i^4 \in \mathcal{S}(4, \mathbf{m}, d\boldsymbol{\sigma}, \Delta)$ pridružene proširenoj particiji T, gdje je $\mathbf{m}$ *vektor multipliciteta* čvorova iz Δ, $\mathbf{m} = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^{n-4}$, i $d\boldsymbol{\sigma} := (ds_2, q(s_3)\, ds_3, ds_4)^T$ (vidi [15] za detalje o oznakama). Važnu ulogu imaju i pridružene generalizirane derivacije:

$$L_{1,d\boldsymbol{\sigma}} = D, \quad L_{2,d\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{q}D^2, \quad L_{3,d\boldsymbol{\sigma}} = D\frac{1}{q}D^2, \quad L_{4,d\boldsymbol{\sigma}} = D^2\frac{1}{q}D^2.$$

Prvo ćemo obratiti pažnju na *reducirani sistem* $\{u_{1,1}, u_{1,2}, u_{1,3}\}$, koji razapinje prostor $\mathcal{S}(3, \mathbf{m}, d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \Delta)$, $d\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = (q(s_3)\, ds_3, ds_4)^T$, na svakom intervalu. Tada je odgovarajući CCT-sistem:

$$u_{1,1}(x) = 1, \quad u_{1,2}(x) = \int_a^x q(s_3)\, ds_3, \quad u_{1,3}(x) = \int_a^x q(s_3)\, ds_3 \int_a^{s_3} ds_4. \tag{3.2}$$

Sada promotrimo manje glatke B-splajnove $\widetilde{T}_j^3$ iz prostora $\mathcal{S}(3, \widetilde{\mathbf{m}}, d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \Delta)$, gdje je vektor multipliciteta $\widetilde{\mathbf{m}} = (2, \ldots, 2)^T$ na istoj particiji. Za fiksirani indeks i, označit ćemo čvorove u novoj proširenoj particiji sa $t_i = \tilde{t}_{r-1} = \tilde{t}_r < \tilde{t}_{r+1}$:

$$\begin{array}{cccccc} \cdots & t_{i-1} & t_i & t_{i+1} & t_{i+2} & \cdots \\ \hline \cdots & \tilde{t}_{r-3} & \tilde{t}_{r-1} & \tilde{t}_{r+1} & \tilde{t}_{r+3} & \cdots \\ \cdots & \tilde{t}_{r-2} & \tilde{t}_{r} & \tilde{t}_{r+2} & \tilde{t}_{r+4} & \cdots \end{array} \tag{3.3}$$

a polinomne splajnove na toj particiji sa $\widetilde{B}_j^n$. Jednostavno se vidi iz definicije CCT-sistema (3.2) i osnovnih svojstva q-splajna da se $\widetilde{T}_j^3$ može zapisati kao

$$\widetilde{T}_{r-1}^3(x) = \sum_{j=s-2}^{s-1} a_{r-1,j} \widehat{B}_j^4(x) \tag{3.4}$$

$$\widetilde{T}_{r}^3(x) = \sum_{j=s-1}^{s+1} a_{r,j} \widehat{B}_j^4(x). \tag{3.5}$$

uz $\widehat{B}_j^4 \in \mathcal{S}(4, \widehat{\mathbf{m}}, d\boldsymbol{\lambda}, \Delta)$, gdje je $\widehat{\mathbf{m}} = (3, \ldots, 3)^T$ na istoj particiji Δ i $d\boldsymbol{\lambda}$ je vektor mjera određen samo sa Lebesgue-ovim mjerama. Točke u ovoj proširenoj particiji označavat ćemo sa $t_i = \hat{t}_{s-2} = \hat{t}_{s-1} = \hat{t}_s < \hat{t}_{s+1}$:

$$\begin{array}{cccccc} \cdots & t_{i-1} & t_i & t_{i+1} & t_{i+2} & \cdots \\ \hline \cdots & \hat{t}_{s-5} & \hat{t}_{s-2} & \hat{t}_{s+1} & \hat{t}_{s+4} & \cdots \\ \cdots & \hat{t}_{s-4} & \hat{t}_{s-1} & \hat{t}_{s+2} & \hat{t}_{s+5} & \cdots \\ \cdots & \hat{t}_{s-3} & \hat{t}_{s} & \hat{t}_{s+3} & \hat{t}_{s+6} & \cdots \end{array}$$

Upotrijebiti ćemo opći teorem koji je generalizacija derivacijske jednadžbe za polinomne B-splajnove, na Čebiševljeve splajnove (v. [12], [11], [13]):

Teorem 3.1 *Neka je $L_{1,d\boldsymbol{\sigma}}$ prva generalizirana derivacija s obzirom na CCT-sistem $\mathcal{S}(k, d\boldsymbol{\sigma})$, i neka vektor multipliciteta $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_{n-4})^T$ zadovoljava $m_i < k-1$ za $i = 1, \ldots, n-4$. Tada za $x \in [a,b]$ i $i = 1, \ldots, k+\sum_{i=1}^{n-4} m_i$ vrijedi slijedeća derivacijska jednakost:*

$$L_{1,d\boldsymbol{\sigma}} T^k_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x) = \frac{T^{k-1}_{i,R_d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}(x)}{C_{k-1}(i)} - \frac{T^{k-1}_{i+1,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}(x)}{C_{k-1}(i+1)} \tag{3.6}$$

gdje je

$$C_{k-1}(i) := \int_{t_i}^{t_{i+k-1}} T^{k-1}_{i,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}\, d\sigma_2, \tag{3.7}$$

sa vektorima mjera

$$d\boldsymbol{\sigma} = (d\sigma_2(\delta), \ldots, d\sigma_k(\delta))^T \in \mathbb{R}^{k-1}, \quad d\boldsymbol{\sigma}^{(1)} := (d\sigma_3(\delta), \ldots, d\sigma_k(\delta))^T \in \mathbb{R}^{k-2},$$

za sve izmjerljive δ.

3.3 1. konstrukcija lokalne baze za prostore q-splajnova

Jasno se vidi da je reducirani sistem reduciranog CCT-sistema (3.2) zapravo prostor polinoma reda 2, pa Teorem 3.1 daje

$$\bar{L}_1 \widetilde{T}^3_{r-1}(x) = \frac{\widetilde{B}^2_{r-1}(x)}{\widetilde{C}_2(r-1)} - \frac{\widetilde{B}^2_r(x)}{\widetilde{C}_2(r)}, \tag{3.8}$$

gdje je $\bar{L}_1 := L_{1,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}} = \frac{1}{q} D$ generalizirana derivacija za reducirani CCT-sistem, i

$$\widetilde{C}_2(j) = \int_{\tilde{t}_j}^{\tilde{t}_{j+2}} \widetilde{B}^2_j(t)\, q(t)\, dt.$$

Posebno,

$$\widetilde{C}_2(r-1) = \frac{(2q_i + q_{i+1})h_i}{6}, \quad \widetilde{C}_2(r) = \frac{(q_i + 2q_{i+1})h_i}{6}.$$

Koristeći (3.8) i jednostavna svojstva B-splajnova dobiva se da je

$$\bar{L}_1\widetilde{T}^3_{r-1}(t_i^+) = \frac{1}{\widetilde{C}_2(r-1)}, \qquad \bar{L}_1\widetilde{T}^3_{r-1}(t_{i+1}^-) = -\frac{1}{\widetilde{C}_2(r)},$$

iz čega direktno slijede koeficijenti u (3.4):

$$a_{r-1,s-2} = \frac{2q_i}{2q_i + q_{i+1}}, \qquad a_{r-1,s-1} = \frac{2q_{i+1}}{q_i + 2q_{i+1}},$$

dakle,

$$\widetilde{T}^3_{r-1}(x) = \frac{2q_i}{2q_i + q_{i+1}}\widehat{B}^4_{s-2}(x) + \frac{2q_{i+1}}{q_i + 2q_{i+1}}\widehat{B}^4_{s-1}(x). \tag{3.9}$$

Za računanje $\widetilde{T}^3_r$ upotrijebit ćemo jednakosti

$$\widetilde{T}^3_r(t_{i+1}) = 1, \quad \bar{L}_1\widetilde{T}^3_r(t_{i+1}^-) = \frac{1}{\widetilde{C}_2(r)}, \quad \bar{L}_1\widetilde{T}^3_r(t_{i+1}^+) = -\frac{1}{\widetilde{C}_2(r+1)},$$

da bi dobili koeficijente u (3.5):

$$a_{r,s-1} = \frac{q_i}{2q_{i+1} + q_i}, \quad a_{r,s} = 1, \quad a_{r,s+1} = \frac{q_{i+2}}{2q_{i+1} + q_{i+2}},$$

i konačno

$$\widetilde{T}^3_r(x) = \frac{q_i}{q_i + 2q_{i+1}}\widehat{B}^4_{s-1}(x) + \widehat{B}^4_s(x) + \frac{q_{i+2}}{2q_{i+1} + q_{i+2}}\widehat{B}^4_{s+1}(x). \tag{3.10}$$

Integrirajući (3.6) u Teoremu 3.1 možemo izračunati splajnove višeg reda. Počet ćemo sa jednakošću

$$\widetilde{T}^4_{r-1}(x) = \frac{1}{\widetilde{C}_3(r-1)}\int_{\tilde{t}_{r-1}}^x \widetilde{T}^3_{r-1}(t)\,dt - \frac{1}{\widetilde{C}_3(r)}\int_{\tilde{t}_r}^x \widetilde{T}^3_r(t)\,dt, \tag{3.11}$$

Lagano se vidi iz (3.9) i (3.10) da je

$$\begin{aligned}\widetilde{C}_3(r-1) &= \frac{h_i}{4}\left(\frac{2q_i}{2q_i + q_{i+1}} + \frac{2q_{i+1}}{q_i + 2q_{i+1}}\right)\\ \widetilde{C}_3(r) &= \frac{1}{4}\left(\frac{q_i h_i}{q_i + 2q_{i+1}} + h_i + h_{i+1} + \frac{q_{i+2}h_{i+1}}{2q_{i+1} + q_{i+2}}\right).\end{aligned}$$

Iz (3.11), uz upotrebu (3.9), (3.10), i dobro poznate jednakosti za integrale polinomnih B-splajnova

$$\int_{-\infty}^{x} B_i^k(t)\,dt = \frac{t_{i+k}-t_i}{k}\sum_{j=i}^{i+k-1} B_j^{k+1}(x),$$

gdje je sada $\{t_i\}$ bilokakav nepadajući niz čvorova, dobivamo (gledajući posebno za x iz svakog od intervala $[t_i, t_{i+1}]$ i $[t_{i+1}, t_{i+2}]$) da je

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_{r-1}^4(x) = & \frac{1}{\widetilde{C}_3(r-1)}\frac{2q_i}{2q_i+q_{i+1}}\frac{h_i}{4}\widehat{B}_{s-2}^5(x)\\ & +\frac{1}{\widetilde{C}_3(r)}\left(\frac{h_i+h_{i+1}}{4}+\frac{q_{i+2}}{2q_{i+1}+q_{i+2}}\frac{h_{i+1}}{4}\right)\widehat{B}_{s-1}^5(x)\\ & +\frac{1}{\widetilde{C}_3(r)}\frac{q_{i+2}}{2q_{i+1}+q_{i+2}}\frac{h_{i+1}}{4}\widehat{B}_s^5(x).\end{aligned}$$

Na isti način je,

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_r^4(x) = & \frac{1}{\widetilde{C}_3(r)}\frac{q_i}{q_i+2q_{i+1}}\frac{h_i}{4}\widehat{B}_{s-1}^5(x)+\frac{1}{\widetilde{C}_3(r)}\left(\frac{q_i}{q_i+2q_{i+1}}\frac{h_i}{4}\right.\\ & \left.+\frac{h_i+h_{i+1}}{4}\right)\widehat{B}_s^5(x)+\frac{1}{\widetilde{C}_3(r+1)}\frac{2q_{i+2}}{q_{i+1}+2q_{i+2}}\frac{h_{i+1}}{4}\widehat{B}_{s+1}^5(x).\end{aligned}$$

Slijedeća lema i teorem povezuju opće T-splajnove reda 3 i 4 sa analognim manje glatkim T-splajnovima, koji su lakši za izračunati, i za koje su, u našem slučaju, već poznate eksplicitne formule. Dokazi se mogu naći u [13] i [14].

Lema 3.2 *Neka je* $T_{i,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}^3 \in \mathcal{S}(3, \mathbf{m}, d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \Delta)$ *Čebiševljev B-splajn reda 3 uz vektor multipliciteta* $\mathbf{m} = (1, \dots, 1)^T$*, i neka je* $\widetilde{T}_{i,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}^3 \in \mathcal{S}(3, \widetilde{\mathbf{m}}, d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \Delta)$ *B-splajn uz vektor multipliciteta* $\widetilde{\mathbf{m}} = (2, \dots, 2)^T$ *na istom nizu čvorova. Ako su* $\{t_2, \dots, t_{n+3}\}$ *i* $\{\tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_{2n-1}\}$ *pridružene proširene particije, i* r *indeks takav da je* $t_i = \tilde{t}_r < \tilde{t}_{r+1}$*, tada je za* $i = 2, \dots, n$*:*

$$T_{i,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}^3 = T_{i,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}^3(t_{i+1})\widetilde{T}_{r,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}^3 + \widetilde{T}_{r+1,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}^3 + T_{i,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}^3(t_{i+2})\widetilde{T}_{r+2,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}^3.$$

Teorem 3.3 *Neka je* $T^4_{i,d\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{S}(4, \mathbf{m}, d\boldsymbol{\sigma}, \Delta)$, $\widetilde{T}^4_{i,d\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{S}(4, \widetilde{\mathbf{m}}, d\boldsymbol{\sigma}, \Delta)$, *gdje su vektori multipliciteta* $\mathbf{m}$, $\widetilde{\mathbf{m}}$ *kao u Lemi 3.2. Tada postoje pozitivni* $\delta^4_i(j)$ *takvi da vrijedi*

$$T^4_{i,d\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{j=r}^{r+3} \delta^4_i(j) \widetilde{T}^4_{j,d\boldsymbol{\sigma}},$$

gdje $r = r_i$ *zadovoljava* $t_i = \tilde{t}_{r_i} < \tilde{t}_{r_i+1}$. *Neka su* $\{t_1, \ldots, t_{n+4}\}$ *i* $\{\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_{2n}\}$ *proširene particije. Tada su* $\delta^4_i(j), j = r, \ldots, r+3$ *određeni sa*

$$\begin{aligned}
\delta^4_i(r) &= \frac{T^3_{i,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}(t_{i+1})\widetilde{C}(r)}{T^3_{i,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}(t_{i+1})\widetilde{C}(r) + \widetilde{C}(r+1) + T^3_{i,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}(t_{i+2})\widetilde{C}(r+2)} \\
\delta^4_i(r+1) &= \frac{T^3_{i,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}(t_{i+1})\widetilde{C}(r) + \widetilde{C}(r+1)}{T^3_{i,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}(t_{i+1})\widetilde{C}(r) + \widetilde{C}(r+1) + T^3_{i,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}(t_{i+2})\widetilde{C}(r+2)} \\
\delta^4_i(r+2) &= \frac{T^3_{i+1,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}(t_{i+3})\widetilde{C}(r+4) + \widetilde{C}(r+3)}{T^3_{i+1,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}(t_{i+2})\widetilde{C}(r+2) + \widetilde{C}(r+3) + T^3_{i+1,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}(t_{i+3})\widetilde{C}(r+4)} \\
\delta^4_i(r+3) &= \frac{T^3_{i+1,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}(t_{i+3})\widetilde{C}(r+4)}{T^3_{i+1,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}(t_{i+2})\widetilde{C}(r+2) + \widetilde{C}(r+3) + T^3_{i+1,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}(t_{i+3})\widetilde{C}(r+4)}
\end{aligned}$$

gdje je, kao i u (3.7)

$$\widetilde{C}(i) = \int_{support} \widetilde{T}^3_{i,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}} \, d\sigma_2.$$

Da bi mogli upotrijebiti Lemu 3.2 i Teorem 3.3, preostaje nam još izračunati $T^3_i(t_{i+1})$ i $T^3_i(t_{i+2})$. Derivacijska jednakost (3.6) u Teoremu 3.1 povlači da je

$$T^3_i(x) = \frac{1}{C_2(i)} \int_{t_i}^{x} B^2_i(t)q(t)\,dt - \frac{1}{C_2(i+1)} \int_{t_{i+1}}^{x} B^2_{i+1}(t)q(t)\,dt,$$

uz

$$C_2(i) = \int_{t_i}^{t_{i+2}} B^2_i(t)q(t)\,dt = \frac{1}{6}\Big((q_i + 2q_{i+1})h_i + (2q_{i+1} + q_{i+2})h_{i+1}\Big). \quad (3.12)$$

Sada se lako vidi da je

$$T^3_i(t_{i+1}) = \frac{h_i(q_i + 2q_{i+1})}{6\,C_2(i)}, \qquad T^3_i(t_{i+2}) = \frac{h_{i+2}(2q_{i+2} + q_{i+3})}{6\,C_2(i+1)}. \quad (3.13)$$

3.4 2. konstrukcija lokalne baze za prostore q-splajnova

Iako je algoritam iz prethodnog odjeljka stabilan za računanje, i pogotovo ako znamo da je q-splajn reda 4 po dijelovima polinom 5. reda sa drugom neprekidnom derivacijom, za očekivati je da bi prikaz B-splajna preko polinomnih B-splajnova reda 5 u čijem nizu čvorova su svi unutrašnji čvorovi multipliciteta 2, dao još jednostavniji algoritam. Analogno ćemo postupiti i sa q-splajnovima reda 3.

Slično kao i u prethodnom odjeljku pretpostaviti ćemo da je

$$T_i^3(x) = \sum_{j=r-1}^{r+2} a_{i,j}^3 \widetilde{B}_j^4(x), \tag{3.14}$$

uz istu pretpostavku da je $t_i = \tilde{t}_{r-1} = \tilde{t}_r < \tilde{t}_{r+1}$. Ako sad na gornju jednakost djelujemo sa $\bar{L}_1 := L_{1,d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}} = \frac{1}{q}D$, iz Teorema 3.1 slijedi da je

$$\begin{aligned}
\frac{B_i^2(x)}{C_2(i)} - \frac{B_{i+1}^2(x)}{C_2(i+1)} &= \sum_{j=r-1}^{r+2} \frac{a_{i,j}^3}{q(x)} \left(\frac{3\widetilde{B}_j^3(x)}{\tilde{t}_{j+3} - \tilde{t}_j} - \frac{3\widetilde{B}_{j+1}^3(x)}{\tilde{t}_{j+4} - \tilde{t}_{j+1}} \right) \\
&= \frac{3}{q(x)} \left(\frac{a_{i,r-1}^3}{h_i} \widetilde{B}_{r-1}^3(x) + \frac{a_{i,r}^3 - a_{i,r-1}^3}{h_i + h_{i+1}} \widetilde{B}_r^3(x) \right. \\
&\quad + \frac{a_{i,r+1}^3 - a_{i,r}^3}{h_{i+1}} \widetilde{B}_{r+1}^3(x) + \frac{a_{i,r+2}^3 - a_{i,r+1}^3}{h_{i+1} + h_{i+2}} \widetilde{B}_{r+2}^3(x) \\
&\quad \left. - \frac{a_{i,r+2}^3}{h_{i+2}} \widetilde{B}_{r+3}^3(x) \right).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Iz vrijednosti T_i^3 i njegove generalizirane derivacije u t_{i+1} pomoću (3.14) i (3.15), te iz (3.13) i (3.12), dobivamo dvije jednadžbe

$$\begin{aligned}
T_i^3(t_{i+1}) = \frac{h_i(q_i + 2q_{i+1})}{6\, C_2(i)} &= \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} a_{i,r-1}^3 + \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} a_{i,r}^3, \\
\bar{L}_1 T_i^3(t_{i+1}) = \frac{1}{C_2(i)} &= \frac{3}{q_{i+1}} \frac{a_{i,r}^3 - a_{i,r-1}^3}{h_i + h_{i+1}}
\end{aligned}$$

iz kojih možemo izračunati da je

$$a_{i,r-1}^3 = \frac{q_i h_i}{6\, C_2(i)}, \qquad a_{i,r}^3 = \frac{q_i h_i + 2q_{i+1}(h_i + h_{i+1})}{6\, C_2(i)}. \tag{3.16}$$

Na analogan način iz

$$T_i^3(t_{i+2}) = \frac{h_{i+2}(2q_{i+2}+q_{i+3})}{6\,C_2(i+1)} = \frac{h_{i+2}}{h_{i+1}+h_{i+2}}a_{i,r+1}^3 + \frac{h_{i+1}}{h_{i+1}+h_{i+2}}a_{i,r+2}^3,$$

$$\bar{L}_1 T_i^3(t_{i+2}) = -\frac{1}{C_2(i+1)} = \frac{3}{q_{i+2}}\frac{a_{i,r+2}^3 - a_{i,r+1}^3}{h_{i+1}+h_{i+2}}$$

dobiva se

$$a_{i,r+1}^3 = \frac{2q_{i+2}(h_{i+1}+h_{i+2}) + q_{i+3}h_{i+2}}{6\,C_2(i+1)}, \qquad a_{i,r+2}^3 = \frac{q_{i+3}h_{i+2}}{6\,C_2(i+1)}. \tag{3.17}$$

Nadalje, neka je

$$T_i^4(x) = \sum_{j=r-1}^{r+3} a_{i,j}^4 \widetilde{B}_j^5. \tag{3.18}$$

Djelujući na gornju jednakost generaliziranom derivacijom $L_1 := L_{1,d\boldsymbol{\sigma}} = D$, koja je u ovom slučaju jednaka običnoj derivaciji, dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{T_i^3(x)}{C_3(i)} - \frac{T_{i+1}^3(x)}{C_3(i+1)} = 4\Bigg(& a_{i,r-1}^4 \frac{\widetilde{B}_{r-1}^4(x)}{\tilde{t}_{r+3}-\tilde{t}_{r-1}} + \sum_{j=r}^{r+3}(a_{i,j}^4 - a_{i,j-1}^4)\frac{\widetilde{B}_j^4(x)}{\tilde{t}_{j+4}-\tilde{t}_j} \\ & -a_{i,r+3}^4 \frac{\widetilde{B}_{r+4}^4(x)}{\tilde{t}_{r+8}-\tilde{t}_{r+4}}\Bigg),\end{aligned} \tag{3.19}$$

gdje se iz prethodnog lako može izračunati da je

$$\begin{aligned}C_3(i) = \frac{1}{12}\Bigg(& \frac{1}{C_2(i)}\Big(q_i h_i + q_{i+1}(h_i+h_{i+1})\Big)(h_i+h_{i+1}) \\ & + \frac{1}{C_2(i+1)}\Big(q_{i+2}(h_{i+1}+h_{i+2}) + q_{i+3}h_{i+2}\Big)(h_{i+1}+h_{i+2})\Bigg)\end{aligned} \tag{3.20}$$

Iz

$$T_i^4(x) = \frac{1}{C_3(i)}\int_{t_i}^x T_i^3(t)\,dt - \frac{1}{C_3(i+1)}\int_{t_{i+1}}^x T_{i+1}^3(t)\,dt$$

mogu se izračunati vrijednosti $T_i^4(t_{i+1})$ i $T_i^4(t_{i+3})$, pa uz (3.19) dobivamo jednadžbe

$$T_i^4(t_{i+1}) = \frac{h_i^2(q_i+q_{i+1})}{12\,C_2(i)\,C_3(i)} = a_{i,r-1}^4 \frac{2h_i h_{i+1}}{(h_i+h_{i+1})^2}$$

$$+a_{i,r}^4 \frac{h_i^2}{(h_i + h_{i+1})^2}, \tag{3.21}$$

$$DT_i^4(t_{i+1}) = \frac{h_i(q_i + 2q_{i+1})}{6\,C_2(i)\,C_3(i)} = \frac{4}{(h_i + h_{i+1})^2}\left(a_{i,r-1}^4(h_{i+1} - h_i) + a_{i,r}^4 h_i\right),$$

$$T_i^4(t_{i+3}) = \frac{h_{i+3}^2(q_{i+3} + q_{i+4})}{12\,C_2(i+2)\,C_3(i+1)} = a_{i,r+2}^4 \frac{h_{i+3}^2}{(h_{i+2} + h_{i+3})^2} + a_{i,r+3}^4 \frac{2h_{i+2}h_{i+3}}{(h_{i+2} + h_{i+3})^2}, \tag{3.22}$$

$$DT_i^4(t_{i+3}) = -\frac{h_{i+3}(2q_{i+3} + q_{i+4})}{6\,C_2(i+2)\,C_3(i+1)} = \frac{4}{(h_{i+2} + h_{i+3})^2}\left(-a_{i,r+2}^4 h_{i+3} + a_{i,r+3}^4(h_{i+3} - h_{i+2})\right),$$

iz kojih slijedi

$$\begin{aligned}
a_{i,r-1}^4 &= \frac{q_i h_i(h_i + h_{i+1})}{24\,C_2(i)\,C_3(i)},\\
a_{i,r}^4 &= \frac{\Big(g_i h_i + q_{i+1}(h_i + h_{i+1})\Big)(h_i + h_{i+1})}{12\,C_2(i)\,C_3(i)},\\
a_{i,r+2}^4 &= \frac{\Big(q_{i+3}(h_{i+2} + h_{i+3}) + q_{i+4}h_{i+3}\Big)(h_{i+2} + h_{i+3})}{12\,C_2(i+2)\,C_3(i+1)},\\
a_{i,r+3}^4 &= \frac{q_{i+4}h_{i+3}(h_{i+2} + h_{i+3})}{24\,C_2(i+2)\,C_3(i+1)}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Preostaje nam još jedino izračunati $a_{i,r+1}^4$. Da bi to učinili prvo ćemo izreći slijedeću lemu:

Lema 3.4 *Neka su $\mathcal{S}(n)$ i $\widetilde{\mathcal{S}}(m)$ prostori splajnova na $[a, b]$ koji su po djelovima razapeti CCT-sistemima $\{1, u_2, \ldots, u_n\}$ i $\{1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_m\}$ respektivno, takvi da je $\mathcal{S}(n) \subseteq \mathcal{S}(m)$. Neka je B-splajn $T_j^n \in \mathcal{S}(n)$ jednak*

$$T_j^n(x) = \sum_i b_{i,j} \widetilde{T}_i^m(x) \tag{3.24}$$

za neke $b_{i,j}$, gdje su $\widetilde{T}_i^m$ B-splajnovi u $\mathcal{S}(m)$. Tada vrijedi

$$\sum_j b_{i,j} = 1. \tag{3.25}$$

Dokaz: Iz teorije Čebiševljevih splajnova je

$$1 = \sum_j T_j^n(x) = \sum_i \widetilde{T}_i^m(x)$$

za svaki $x \in [a,b]$. Odavde se, uz upotrebu (3.24), lako vidi da je

$$\sum_i \left(\sum_j b_{i,j} \right) \widetilde{T}_i^m(x) = \sum_i \widetilde{T}_i^m(x),$$

pa zbog linearne nezavisnosti od $\widetilde{T}_i^m$ slijedi (3.25). ∎

Ako u Lemu 3.4 stavimo da je $\mathcal{S}(n) = \mathcal{S}(4, \mathbf{m}, d\boldsymbol{\sigma}, \Delta)$ prostor q-splajnova a $\widetilde{\mathcal{S}}(m) = \mathcal{S}(5, \widetilde{\mathbf{m}}, d\boldsymbol{\lambda}, \Delta)$ prostor polinomnih splajnova, tada ona daje slijedeću jednakost

$$1 = a_{i-1,r+1}^4 + a_{i,r+1}^4 + a_{i+1,r+1}^4,$$

odakle, uz (3.23), slijedi

$$\begin{aligned} a_{i,r+1}^4 &= 1 - a_{i-1,r+1}^4 - a_{i+1,r+1}^4 \\ &= \frac{h_{i+1} + h_{i+2}}{24\, C_2(i+1)} \Bigg(\underbrace{\frac{24\, C_2(i+1)}{h_{i+1} + h_{i+2}}}_{A} - \underbrace{\frac{q_{i+3} h_{i+2}}{C_3(i)}}_{B} - \underbrace{\frac{q_{i+1} h_{i+1}}{C_3(i+1)}}_{C} \Bigg). \end{aligned}$$

Izraz u zagradi možemo raspisati kao $(\frac{1}{2}A - B) + (\frac{1}{2}A - C)$, te uz upotrebu (3.20) jednostavno se izvodi da je

$$\begin{aligned} a_{i,r+1}^4 = \frac{1}{24} \Bigg[& \frac{1}{C_3(i)} \left(\frac{1}{C_2(i)} (h_i + h_{i+1}) \Big(q_i h_i + q_{i+1}(h_i + h_{i+1}) \Big) \right. \\ & \left. + \frac{q_{i+2}(h_{i+1} + h_{i+2})^2}{C_2(i+1)} \right) + \frac{1}{C_3(i+1)} \left(\frac{q_{i+2}(h_{i+1} + h_{i+2})^2}{C_2(i+1)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{C_2(i+2)} (h_{i+2} + h_{i+3}) \Big(q_{i+3}(h_{i+2} + h_{i+3}) + q_{i+4} h_{i+3} \Big) \right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.26}$$

3.5 Matrice za ubacivanje čvorova

Neka su Δ i $\widetilde{\Delta}$ proizvoljne praticije intervala $[a,b]$, $\mathbf{m}$ i $\widetilde{\mathbf{m}}$ njihovi vektori multipliciteta, i $\mathcal{S}(k, d\boldsymbol{\sigma})$ i $\widetilde{\mathcal{S}}(l, d\widetilde{\boldsymbol{\sigma}})$ CCT-sistemi takvi da za prostore splajnova vrijedi $\mathcal{S}(k, \mathbf{m}, d\boldsymbol{\sigma}, \Delta) \subseteq \widetilde{\mathcal{S}}(l, \widetilde{\mathbf{m}}, d\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\Delta})$. Neka su $T = \{t_j\}_{j=1}^{n+k}$

i $\widetilde{T} = \{\tilde{t}\}_{i=1}^{m+l}$, uz $n \leqslant m$, proširene particije pridružene $\mathcal{S}(k, \mathbf{m}, d\boldsymbol{\sigma}, \Delta)$ i $\widetilde{\mathcal{S}}(l, \widetilde{\mathbf{m}}, d\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\Delta})$ respektivno, te neka su T_j^k (odnosno $\widetilde{T}_i^l$) B-splajnovi iz $\mathcal{S}(k, \mathbf{m}, d\boldsymbol{\sigma}, \Delta)$ (odnosno $\widetilde{\mathcal{S}}(l, \widetilde{\mathbf{m}}, d\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\Delta})$). Neka je $f \in \mathcal{S}(k, \mathbf{m}, d\boldsymbol{\sigma}, \Delta)$ dan sa

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j T_j^k(x) = \sum_{i=1}^{m} d_i \widetilde{T}_i^l(x).$$

Označimo sa $\boldsymbol{c} := (c_1, \dots, c_n)^T$ i $\boldsymbol{d} := (d_1, \dots, d_m)^T$, tada $m \times n$ matricu $\boldsymbol{B} = (b_{i,j})_{i=1,j=1}^{m,n}$ takvu da je $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{c}$ zovemo *matrica za ubacivanje čvorova (KI-matrica) sa T u $\widetilde{T}$*. Iz ove definicije odmah slijedi da je

$$T_j^k(x) = \sum_i b_{i,j} \widetilde{T}_i^l(x),$$

za svaki $j = 1, \dots, n$.

U ovom odjeljku izvodit ćemo KI-matrice za u bacivanje jednog čvora kod q-splajnova reda 3 i 4. Neka je $T = \{t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant a = t_4 < t_5 < \cdots < t_n < t_{n+1} = b \leqslant t_{n+2} \leqslant t_{n+3} \leqslant t_{n+4}\}$ proširena particija particije Δ kao u odjeljku 3.2, i ubacivati ćemo čvor $\bar{t} \in [a, b]$. Označimo sa $\bar{T} = \{\bar{t}_i\}_{i=1}^{n+5} = T \cup \{\bar{t}\}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & t_{i-1} & t_i & \bar{t} & t_{i+1} & t_{i+2} & \cdots \\ \hline \cdots & \bar{t}_{i-1} & \bar{t}_i & \bar{t}_{i+1} & \bar{t}_{i+2} & \bar{t}_{i+3} & \cdots \end{array} \tag{3.27}$$

i ostaje još pitanje kakva može biti vrijednost $\bar{q}$ funkcije q u $\bar{t}$. Neka je $\bar{\Delta} = \Delta \cup \{\bar{t}\}$, za slučaj kada je $\bar{t} = t_i$ za neki $i = 4, \dots, n+1$, onda je $\bar{\Delta} = \Delta$, i neka je $\bar{\mathbf{m}}$ vektor multipliciteta definiran na slijedeći način: ako je $\bar{t} \neq t_i$ za $i = 4, \dots, n+1$ tada je $\bar{\mathbf{m}} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{n-3}$, dok je za $\bar{t} = t_i$ $\bar{\mathbf{m}} = (1, \dots, 1, 2, 1, \dots 1)^T \in \mathbb{R}^{n-4}$, gdje se 2 nalazi na $i-4$-tom mjestu. Proširena particija particije $\bar{\Delta}$ s obzirom na ovako definiran vektor multipliciteta $\bar{\mathbf{m}}$ je upravo $\bar{T}$. Da bi vrijedilo $\mathcal{S}(k, \mathbf{m}, d\boldsymbol{\sigma}, \Delta) \subseteq \mathcal{S}(k, \bar{\mathbf{m}}, d\boldsymbol{\sigma}, \bar{\Delta})$ za $k = 3, 4$ trivijalno se vidi da mora biti $\bar{q} = q(\bar{t}) = \frac{q_{i+1} - q_i}{h_i}(\bar{t} - t_i) + q_i$, uz pretpostavku da je $\bar{t} \in [t_i, t_{i+1})$ za $i \neq n$ ili $\bar{t} \in [t_n, t_{n+1}]$. Za početak uzimat ćemo da je $\bar{t} \neq t_i$ za $i = 4, \dots, n+1$.

Prvo konstruirajmo Γ^3, KI-matricu za q-splajnove reda 3. Neka je

$$f(x) = \sum_{j=2}^{n} c_j T_j^3(x) = \sum_{l=2}^{n+1} d_l \bar{T}_l^3(x), \tag{3.28}$$

gdje su $\bar{T}_l^3$ B-splajnovi u $\mathcal{S}(3, \bar{\mathbf{m}}, d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \bar{\Delta})$. Nas zanima kako izraziti koeficijente d_l preko c_j. Pošto je i $T_j^3 \in \mathcal{S}(3, \bar{\mathbf{m}}, d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \bar{\Delta})$ za svaki j, trivijalno se vidi da je $T_j^3 \equiv \bar{T}_j^3$ za $j = 2, \ldots, i-3$, $T_j^3 \equiv \bar{T}_{j+1}^3$ za $j = i+1, \ldots, n$, i

$$\begin{aligned} T_{i-2}^3(x) &= \bar{\gamma}_{i-2,i-2}\bar{T}_{i-2}^3(x) + \bar{\gamma}_{i-1,i-2}\bar{T}_{i-1}^3(x), \\ T_{i-1}^3(x) &= \bar{\gamma}_{i-1,i-1}\bar{T}_{i-1}^3(x) + \bar{\gamma}_{i,i-1}\bar{T}_{i}^3(x), \\ T_{i}^3(x) &= \bar{\gamma}_{i,i}\bar{T}_{i}^3(x) + \bar{\gamma}_{i+1,i}\bar{T}_{i+1}^3(x), \end{aligned} \tag{3.29}$$

za neke $\bar{\gamma}_{i-2,i-2}, \ldots, \bar{\gamma}_{i+1,i}$. Iz (3.28) i (3.29), zbog linearne nezavisnosti B-splajn baze, odmah slijedi

$$\begin{aligned} d_l &= c_l \qquad \text{za } l = 2, \ldots, i-3, \\ d_l &= c_{l-1} \quad \text{za } l = i+2, \ldots, n+1. \end{aligned}$$

Deriviranjem (3.28) generaliziranom derivacijom $\bar{L}_1 = \frac{1}{q}D$ postižemo

$$\sum_{j=3}^{n} \underbrace{\frac{c_j - c_{j-1}}{C_2(j)}}_{e_j} B_j^2(x) = \sum_{l=3}^{n+1} \underbrace{\frac{d_l - d_{l-1}}{\bar{C}_2(l)}}_{f_l} \bar{B}_l^2(x),$$

za $x \in [a, b]$, gdje je $\bar{B}_l^2$ polinomni B-splajn reda 2 na particiji $\bar{T}$, a $\bar{C}_2(l) := \int_{\bar{t}_l}^{\bar{t}_{l+2}} \bar{B}_l^2(t)\, q(t)\, dt$. Upotrebom KI-matrice za polinomne splajnove drugog reda (Korolar 1.11) dobija se

$$f_l = \begin{cases} e_l & \text{za } l = 3, \ldots, i-1, \\ \frac{t_{i+1}-\bar{t}}{h_i} e_{l-1} + \frac{\bar{t}-t_i}{h_i} e_l & \text{za } l = i \\ e_{l-1} & \text{za } l = i+1, \ldots, n+1, \end{cases}$$

što, uz gore navedeno, daje jednakosti

$$\begin{aligned} d_{i-2} &= c_{i-2}, \\ d_{i-1} &= \left(1 - \frac{\bar{C}_2(i-1)}{C_2(i-1)}\right) c_{i-2} + \frac{\bar{C}_2(i-1)}{C_2(i-1)} c_{i-1}, \\ d_i &= \frac{\bar{C}_2(i+1)}{C_2(i)} c_{i-1} + \left(1 - \frac{\bar{C}_2(i+1)}{C_2(i)}\right) c_i, \\ d_{i+1} &= c_i, \end{aligned}$$

iz kojih se, konačno, dobiva Γ^3

$$\Gamma^3(i-2:i+1,i-2:i) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \scriptstyle i-2 & \scriptstyle i-1 & \scriptstyle i \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & & \\ \frac{(t_{i+1}-\bar{t})\bar{C}_2(i)}{h_i C_2(i-1)} & \frac{\bar{C}_2(i-1)}{C_2(i-1)} & \\ & \frac{\bar{C}_2(i+1)}{C_2(i)} & \frac{(\bar{t}-t_i)\bar{C}_2(i)}{h_i C_2(i)} \\ & & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \scriptstyle i-2 \\ \scriptstyle i-1 \\ \scriptstyle i \\ \scriptstyle i+1 \end{array}. \tag{3.30}$$

Općenito podmatrica $A(i_1:i_2,j_1:j_2)$ matrice $A=(a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$ definira se sa $A(i_1:i_2,j_1:j_2) := (a_{i,j})_{i=i_1,j=j_1}^{i_2,j_2}$. Ako označimo da je $\Gamma^3 = (\gamma_{l,j}^3)_{l,j=2}^{n+1,n}$, onda je jasno da je $\bar{\gamma}_{l,j}$ iz (3.29) zapravo jednak elementu $\gamma_{l,j}^3$.

Nadalje, označimo sa $\bar{T}_l^4$ B-splajn u $\mathcal{S}(4,\bar{\mathbf{m}},d\boldsymbol{\sigma},\bar{\Delta})$, dok su oznake T_j^4 i $\widetilde{B}_r^5$ iste kao i u odjeljku 3.2. Određivanje elemenata KI-matrice reda 4 $\Gamma^4 = (\gamma_{l,j}^4)_{l,j=1}^{n+1,n}$ pomoću deriviranja jednakosti

$$\sum_{j=1}^{n} c_j T_j^4(x) = \sum_{l=1}^{n+1} d_l \bar{T}_l^4(x),$$

dati će jednadžbe iz kojih se ne bi moglo jednostavno izvesti stabilni algoritmi za računanje d_l preko c_j, pa ćemo ovdje krenuti drukčijim pristupom. Tražit ćemo elemente KI-matrice kao koeficijente pri rastavu T_j^4 po $\bar{T}_l^4$. Koristit ćemo (3.18), (3.23), (3.26), te analogne oznake za $\mathcal{S}(4,\bar{\mathbf{m}},d\boldsymbol{\sigma},\bar{\Delta})$: $\bar{a}_{l,j}^4$, $\bar{C}_3(j)$ i $\bar{B}_j^5$ kao B-splajn u $\mathcal{S}(5,\bar{\widetilde{\mathbf{m}}},d\boldsymbol{\lambda},\bar{\Delta})$, gdje je $\bar{\widetilde{\mathbf{m}}} = (2,\ldots,2)^T \in \mathbb{R}^{n-3}$ za slučaj kada je $\bar{t} \neq t_i$, $i=4,\ldots,n+1$. Koeficijente ćemo morati računati za svaki B-splajn iz $\mathcal{S}(4,\mathbf{m},d\boldsymbol{\sigma},\Delta)$ posebno.

Kao i u slučaju reda 3, odmah se vidi da je $T_j^4 \equiv \bar{T}_j^4$ za $j=1,\ldots,i-4$ i $T_j^4 \equiv \bar{T}_{j+1}^4$ za $j=i+1,\ldots,n$. Gledano iz perspektive $\mathcal{S}(5,\widetilde{\mathbf{m}},d\boldsymbol{\lambda},\bar{\Delta})$ čvor $\bar{t}$ ubaciti će se s dvostrukom točnosću:

$\cdots$	t_{i-1}	t_i	$\bar{t}$	t_{i+1}	t_{i+2}	$\cdots$
$\cdots$	$\tilde{t}_{r-3}$	$\tilde{t}_{r-1}$		$\tilde{t}_{r+1}$	$\tilde{t}_{r+3}$	$\cdots$
$\cdots$	$\tilde{t}_{r-2}$	$\tilde{t}_{r}$		$\tilde{t}_{r+2}$	$\tilde{t}_{r+4}$	$\cdots$
$\cdots$	$\bar{\tilde{t}}_{r-3}$	$\bar{\tilde{t}}_{r-1}$	$\bar{\tilde{t}}_{r+1}$	$\bar{\tilde{t}}_{r+3}$	$\bar{\tilde{t}}_{r+5}$	$\cdots$
$\cdots$	$\bar{\tilde{t}}_{r-2}$	$\bar{\tilde{t}}_{r}$	$\bar{\tilde{t}}_{r+2}$	$\bar{\tilde{t}}_{r+4}$	$\bar{\tilde{t}}_{r+6}$	$\cdots$

Iskoristit ćemo KI-matricu sa prostora $\mathcal{S}(5, \widetilde{\mathbf{m}}, d\boldsymbol{\lambda}, \Delta)$ u $\mathcal{S}(5, \bar{\tilde{\mathbf{m}}}, d\boldsymbol{\lambda}, \bar{\Delta})$ koju ćemo označiti sa $\Theta = (\theta_{i,j})$. Krećemo sa T^4_{i-3}:

$$T^4_{i-3}(x) = \gamma^4_{i-3,i-3}\bar{T}^4_{i-3}(x) + \gamma^4_{i-2,i-3}\bar{T}^4_{i-2}(x),$$

što je, kada se raspiše prema (3.18) i ponovo uz $t_i = \tilde{t}_{r-1} = \tilde{t}_r < \tilde{t}_{r+1}$ i $t_i = \bar{\tilde{t}}_{r-1} = \bar{\tilde{t}}_r < \bar{\tilde{t}}_{r+1} = \bar{t}$ jednako

$$\sum_{j=r-7}^{r-3} a^4_{i-3,j}\widetilde{B}^5_j(x) = \gamma^4_{i-3,i-3}\sum_{j=r-7}^{r-3}\bar{a}^4_{i-3,j}\bar{B}^5_j(x) + \gamma^4_{i-2,i-3}\sum_{j=r-5}^{r-1}\bar{a}^4_{i-2,j}\bar{B}^5_j(x).$$

Lijeva strana se, uz pomoć Θ raspisuje kao

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=r-7}^{r-5} a^4_{i-3,j}\bar{B}^5_j(x) + a^4_{i-3,r-4}(\bar{B}^5_{r-4}(x) + \theta_{r-3,r-4}\bar{B}^5_{r-3}(x) + \theta_{r-2,r-4}\bar{B}^5_{r-2}(x)) \\
&\qquad + a^4_{i-3,r-3}(\theta_{r-3,r-3}\bar{B}^5_{r-3}(x) + \theta_{r-2,r-3}\bar{B}^5_{r-2}(x) + \theta_{r-1,r-3}\bar{B}^5_{r-1}(x)) \\
&\qquad = \gamma^4_{i-3,i-3}\sum_{j=r-7}^{r-3}\bar{a}^4_{i-3,j}\bar{B}^5_j(x) + \gamma^4_{i-2,i-3}\sum_{j=r-5}^{r-1}\bar{a}^4_{i-2,j}\bar{B}^5_j(x).
\end{aligned}$$

Zbog jedinstvenosti rastava po bazi B-splajnova, uspoređujući koeficijente uz $\bar{B}^5_{r-7}$ i $\bar{B}^5_{r-1}$ na lijevoj i desnoj strani prethodne jednakosti, dobivamo da je

$$\gamma^4_{i-3,i-3} = 1, \qquad \gamma^4_{i-2,i-3} = \theta_{r-1,r-3}\frac{a^4_{i-3,r-3}}{\bar{a}^4_{i-2,r-1}}. \tag{3.31}$$

Na isti se način iz

$$T^4_{i-2}(x) = \gamma^4_{i-2,i-2}\bar{T}^4_{i-2}(x) + \gamma^4_{i-1,i-2}\bar{T}^4_{i-1}(x)$$

dobiva

$$\gamma^4_{i-2,i-2} = \frac{a^4_{i-2,r-5}}{\bar{a}^4_{i-2,r-5}}, \qquad \gamma^4_{i-1,i-2} = \theta_{r+1,r-1}\frac{a^4_{i-2,r-1}}{\bar{a}^4_{i-1,r+1}}, \tag{3.32}$$

iz

$$T^4_{i-1}(x) = \gamma^4_{i-1,i-1}\bar{T}^4_{i-1}(x) + \gamma^4_{i,i-1}\bar{T}^4_i(x)$$

$$\gamma^4_{i-1,i-1} = \theta_{r-3,r-3}\frac{a^4_{i-1,r-3}}{\bar{a}^4_{i-1,r-3}}, \qquad \gamma^4_{i,i-1} = \frac{a^4_{i-1,r+1}}{\bar{a}^4_{i,r+3}}, \tag{3.33}$$

i konačno iz

$$T_i^4(x) = \gamma_{i,i}^4 \bar{T}_i^4(x) + \gamma_{i+1,i}^4 \bar{T}_{i+1}^4(x)$$

izlazi

$$\gamma_{i,i}^4 = \theta_{r-1,r-1} \frac{a_{i,r-1}^4}{\bar{a}_{i,r-1}^4}, \qquad \gamma_{i+1,i}^4 = 1. \tag{3.34}$$

Sada, pošto znamo da je

$$\theta_{r-1,r-3} = \frac{(t_{i+1} - \bar{t})^2}{h_i(h_{i-1} + h_i)}, \quad \theta_{r+1,r-1} = \frac{t_{i+2} - \bar{t}}{h_i + h_{i+1}},$$

$$\theta_{r-3,r-3} = \frac{\bar{t} - t_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \quad \theta_{r-1,r-1} = \frac{(\bar{t} - t_i)^2}{h_i(h_i + h_{i+1})},$$

lako se u potpunosti mogu izračunati dani elementi, što daje $\bar{\Gamma}^4 := \Gamma^4(i-3 : i+1, i-3 : i)$:

$$\bar{\Gamma}^4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \scriptstyle i-3 & \scriptstyle i-2 & \scriptstyle i-1 & \scriptstyle i \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ \frac{t_{i+1}-\bar{t}}{h_i} \frac{\bar{C}_2(i)\,\bar{C}_3(i-1)}{C_2(i-1)\,C_3(i-2)} & \frac{\bar{C}_3(i-2)}{C_3(i-2)} & & \\ & \frac{\bar{C}_2(i+1)\,\bar{C}_3(i)}{C_2(i)\,C_3(i-1)} & \frac{\bar{C}_2(i-1)\,\bar{C}_3(i-1)}{C_2(i-1)\,C_3(i-1)} & \\ & & \frac{\bar{C}_3(i+1)}{C_3(i)} & \frac{\bar{t}-t_i}{h_i} \frac{\bar{C}_2(i)\,\bar{C}_3(i)}{C_2(i)\,C_3(i)} \\ & & & 1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} \scriptstyle i-3 \\ \scriptstyle i-2 \\ \scriptstyle i-1 \\ \scriptstyle i \\ \scriptstyle i+1 \end{array} . \tag{3.35}$$

Ovakvi oblici KI-matrica, (3.30) i (3.35), potiču ideju da bi oni mogli vrijediti i općenitije za splajnove pridružene široj klasi CCT-sistema, što i pokazuje slijedeći teorem:

Teorem 3.5 *Neka je na* $[a, b]$ *dana proširena particija* $T = (t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant a = t_4 < t_5 < \cdots < t_n < t_{n+1} = b \leqslant t_{n+2} \leqslant t_{n+3} \leqslant t_{n+4})$, *i neka su dane po dijelovima neprekidne funkcije* w_2, w_3 *i* w_4 *na* $[a, b]$ *sa prekidima u* $(t_i)_{i=5}^n$. *Neka je* $\{1, u_2, u_3, u_4\}$ *CCT-sistem obzirom na vektor mjera* $d\boldsymbol{\sigma} := (w_2(s_2)\, ds_2, w_3(s_3)\, ds_3, w_4(s_4)\, ds_4)$. *Tada za* $\bar{t} \in (a, b)$, $\bar{t} \neq t_j$ $(j = 5, \ldots, n)$, *te i takav da je* $\bar{t} \in (t_i, t_{i+1})$, *netrivijalni elementi KI-matrica* $\Gamma^2 = (\gamma_{i,j}^2)$, $\Gamma^3 = (\gamma_{i,j}^3)$ *i* $\Gamma^4 = (\gamma_{i,j}^4)$ *reda 2, 3 i 4 imaju sljedeći oblik:*

$$\begin{array}{llll} \gamma_{j,j}^2 = 1 & \text{za } j = 1, \ldots, i-2, & \gamma_{j,j-1}^2 = 1 & \text{za } j = i+2, \ldots, n+1, \\ \gamma_{j,j}^3 = 1 & \text{za } j = 1, \ldots, i-3, & \gamma_{j,j-1}^3 = 1 & \text{za } j = i+2, \ldots, n+1, \\ \gamma_{j,j}^4 = 1 & \text{za } j = 1, \ldots, i-4, & \gamma_{j,j-1}^4 = 1 & \text{za } j = i+2, \ldots, n+1, \end{array} \tag{3.36}$$

$$\Gamma^2(i-1:i+1,i-1:i) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} {\scriptstyle i-1} & {\scriptstyle i} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & \\ \frac{\bar{C}_1(i+1)}{C_1(i)} & \frac{\bar{C}_1(i)}{C_1(i)} \\ & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} {\scriptstyle i-1} \\ {\scriptstyle i} \\ {\scriptstyle i+1} \end{array} \end{array}, \tag{3.37}$$

$$\Gamma^3(i-2:i+1,i-2:i) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} {\scriptstyle i-2} & {\scriptstyle i-1} & {\scriptstyle i} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & \\ \gamma^2_{i,i-1}\frac{\bar{C}_2(i)}{C_2(i-1)} & \frac{\bar{C}_2(i-1)}{C_2(i-1)} & \\ & \frac{\bar{C}_2(i+1)}{C_2(i)} & \gamma^2_{i,i}\frac{\bar{C}_2(i)}{C_2(i)} \\ & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} {\scriptstyle i-2} \\ {\scriptstyle i-1} \\ {\scriptstyle i} \\ {\scriptstyle i+1} \end{array} \end{array}, \tag{3.38}$$

$$\bar{\Gamma}^4 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} {\scriptstyle i-3} & {\scriptstyle i-2} & {\scriptstyle i-1} & {\scriptstyle i} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \gamma^3_{i-1,i-2}\frac{\bar{C}_3(i-1)}{C_3(i-2)} & \frac{\bar{C}_3(i-2)}{C_3(i-2)} & & \\ & \gamma^3_{i,i-1}\frac{\bar{C}_3(i)}{C_3(i-1)} & \gamma^3_{i-1,i-1}\frac{\bar{C}_3(i-1)}{C_3(i-1)} & \\ & & \frac{\bar{C}_3(i+1)}{C_3(i)} & \gamma^3_{i,i}\frac{\bar{C}_3(i)}{C_3(i)} \\ & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} {\scriptstyle i-3} \\ {\scriptstyle i-2} \\ {\scriptstyle i-1} \\ {\scriptstyle i} \\ {\scriptstyle i+1} \end{array} \end{array}, \tag{3.39}$$

gdje je $\bar{\Gamma}^4 := \Gamma^4(i-3:i+1,i-3:i)$, *i gdje se za* T_j^k *B-splajn reda* $k=1,2,3$ *u* $\mathcal{S}(k,\mathbf{m},d\boldsymbol{\sigma},T)$ *definira*

$$C_k(j) := \int_{t_j}^{t_{j+k}} T_j^k(s_{5-k})\, w_{5-k}(s_{5-k})\, ds_{5-k} \quad \text{za } k=1,2,3, \tag{3.40}$$

te za $\bar{T} = T \cup \{\bar{t}\}$ *i* $\bar{T}_j^k$ *B-splajn reda* $k=1,2,3$ *u* $\mathcal{S}(k,\mathbf{m},d\boldsymbol{\sigma},\bar{T})$

$$\bar{C}_k(j) := \int_{\bar{t}_j}^{\bar{t}_{j+k}} \bar{T}_j^k(s_{5-k})\, w_{5-k}(s_{5-k})\, ds_{5-k} \quad \text{za } k=1,2,3. \tag{3.41}$$

Dokaz: Jednakosti u (3.36) se trivijalno vide, kao i u slučaju q-splajna, iz

$$\bar{T}_j^k \equiv T_j^k \quad \text{za } j=1,\ldots i-k \qquad \bar{T}_j^k \equiv T_{j-1}^k \quad \text{za } j=i+2,\ldots,n+1$$

kod $k=2,3,4$.

Uz ovako definiran vektor mjera, vidi se da su splajnovi iz danih prostora splajnova barem neprekidne funkcije, pa ćemo koristiti činjenicu da za $f,g \in$

$\mathcal{S}(k, \mathbf{m}, d\boldsymbol{\sigma}, T)$ uz $k = 2, 3, 4$ vrijedi da je $f \equiv g$ ako i samo ako su im jednake generalizirane derivacije ($L_1^k f \equiv L_1^k g$) i $f(t) = g(t)$ za neki $t \in [a, b]$. Vrijednosti elemenata KI-matrice potvrdit ćemo induktivno, tako što ćemo ponovo gledati rastav T_j^k po B-splajn bazi iz $\mathcal{S}(k, \mathbf{m}, d\boldsymbol{\sigma}, \bar{T})$ za $k = 2, 3, 4$, i to svaki posebno.

k=2: Prvo dokažimo:

$$T_{i-1}^2(x) = \bar{T}_{i-1}^2(x) + \frac{\bar{C}_1(i+1)}{C_1(i)}\bar{T}_i^2(x). \tag{3.42}$$

Ako definiramo da je

$$f(x) = T_{i-1}^2(x), \quad g(x) = \bar{T}_{i-1}^2(x) + \frac{\bar{C}_1(i+1)}{C_1(i)}\bar{T}_i^2(x)$$

tada je očito da je $f(t_{i-1}) = g(t_{i-1}) = 0$. Sada na obje funkcije primijenimo generaliziranu derivaciju L_1^2 da bi dobili

$$\begin{aligned} L_1^2 f(x) &= \frac{T_{i-1}^1(x)}{C_1(i-1)} - \frac{T_i^1(x)}{C_1(i)}, \\ L_1^2 g(x) &= \frac{\bar{T}_{i-1}^1(x)}{\bar{C}_1(i-1)} - \frac{\bar{T}_i^1(x)}{\bar{C}_1(i)} + \frac{\bar{C}_1(i+1)}{C_1(i)}\left(\frac{\bar{T}_i^1(x)}{\bar{C}_1(i)} - \frac{\bar{T}_{i+1}^1(x)}{\bar{C}_1(i+1)}\right), \end{aligned}$$

iz čega, zbog $T_i^1(x) = \bar{T}_i^1(x) + \bar{T}_{i+1}^1(x)$ i linearne nezavisnosti B-splajnova, slijedi $L_1^2 f(x) = L_1^2 g(x)$ za svaki $x \in [a, b]$, što potvrđuje jednakost u (3.42). Isto tako bi pokazali da vrijedi

$$T_i^2(x) = \frac{\bar{C}_1(i)}{C_1(i)}\bar{T}_i^2(x) + \bar{T}_{i+1}^2(x).$$

k=3: Da bi dokazali

$$T_{i-2}^3(x) = \bar{T}_{i-3}^3(x) + \gamma_{i,i-1}^2 \frac{\bar{C}_2(i)}{C_2(i-1)}\bar{T}_{i-1}^3(x) \tag{3.43}$$

definirajmo funkcije

$$f(x) = T_{i-2}^3(x), \quad g(x) = \bar{T}_{i-3}^3(x) + \gamma_{i,i-1}^2 \frac{\bar{C}_2(i)}{C_2(i-1)}\bar{T}_{i-1}^3(x),$$

za koje ponovo očito vrijedi da je $f(t_{i-2}) = g(t_{i-2})$, a kada se na njih djeluje sa L_1^3 dobije se

$$\begin{aligned} L_1^3 f(x) &= \frac{T_{i-2}^2(x)}{C_2(i-2)} - \frac{T_{i-1}^2(x)}{C_2(i-1)} \\ L_1^3 g(x) &= \frac{\bar{T}_{i-2}^2(x)}{\bar{C}_2(i-2)} - \frac{\bar{T}_{i-1}^2(x)}{\bar{C}_2(i-1)} \\ &+ \gamma_{i,i-1}^2 \frac{\bar{C}_2(i)}{C_2(i-1)} \left(\frac{\bar{T}_{i-1}^2(x)}{\bar{C}_2(i-1)} - \frac{\bar{T}_i^2(x)}{\bar{C}_2(i)} \right) \end{aligned}$$

Nadalje, iskoristi se matrica Γ^1 (3.37), tj. da je $T_{i-2}^2(x) = \bar{T}_{i-2}^2(x)$ i $T_{i-1}^2(x) = \bar{T}_{i-1}^2(x) + \gamma_{i,i-1}^2 \bar{T}_i^2(x)$ da bi se pokazala jednakost generaliziranih derivacija od f i g, a time i (3.43). Analogno se dokazuju

$$T_{i-1}^3(x) = \frac{\bar{C}_2(i-1)}{C_2(i-1)} \bar{T}_{i-1}^3(x) + \frac{\bar{C}_2(i+1)}{C_2(i)} \bar{T}_i^3(x)$$

i

$$T_i^3(x) = \gamma_{i,i}^2 \frac{\bar{C}_2(i)}{C_2(i)} \bar{T}_i^3(x) + \bar{T}_{i+1}^3(x),$$

sa čime smo dobili (3.38).

k=4: Matricu Γ^4 (3.39) isto bi tako induktivno dokazivali koristeći prethodnu matricu, tj. Γ^3.

■

3.6 Stabilni algoritam za računanje q-splajnova

Činjenica da se B-splajn iz prostora q-splajnova reda 3 i reda 4 može jednostavno i stabilno izračunati u čvorovima koji se nalaze u nosaču tog B-splajna, motivira nas na slijedeći algoritam. Glavna je ideja da se točka u kojoj računamo vrijednost splajna ubaci u dani niz čvorova, te da se taj splajn onda prikaže u rastavu po B-splajnovima obzirom na novi profinjeni niz čvorova. Preciznije:

Neka je $f \in \mathcal{S}(3, \mathbf{m}, d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \Delta)$ dan sa

$$f(x) = \sum_{j=2}^{n} c_j T_j^3(x),$$

i želimo izračunati vrijednost $f(\bar{t})$ za $\bar{t} \in (t_i, t_i + 1)$. Neka je sada opet $\bar{T} = T \cup \{\bar{t}\}$, pa pošto je i $f \in \mathcal{S}(3, \bar{\mathbf{m}}, d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \bar{\Delta})$ vrijedi da je, za odgovarajuće d_j,

$$\begin{aligned} f(\bar{t}) &= \sum_{j=2}^{n+1} d_j \bar{T}_j^3(\bar{t}) = d_{i-1}\bar{T}_{i-1}^3(\bar{t}) + d_i \bar{T}_i^3(\bar{t}) \\ &= (\gamma_{i-1,i-2}^3 c_{i-2} + \gamma_{i-1,i-1}^3 c_{i-1})\bar{T}_{i-1}^3(\bar{t}) + (\gamma_{i,i-1}^3 c_{i-1} + \gamma_{i,i}^3 c_i)\bar{T}_i^3(\bar{t}), \end{aligned} \tag{3.44}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz (3.30). $\bar{T}_{i-1}^3(\bar{t})$ i $\bar{T}_i^3(\bar{t})$ računaju se iz (3.13) ako znamo da je $\bar{t}_j = t_j$ za $j = 1, \ldots i$, $\bar{t}_{i+1} = \bar{t}$ i $\bar{t}_j = t_{j-1}$ za $j = i+2, \ldots, n+5$:

$$\bar{T}_{i-1}^3(\bar{t}) = \frac{(t_{i+1} - \bar{t})(2\bar{q} + q_{i+1})}{6\,\bar{C}_2(i)}, \quad \bar{T}_i^3(\bar{t}) = \frac{(\bar{t} - t_i)(q_i + 2\bar{q})}{6\,\bar{C}_2(i)}. \tag{3.45}$$

Analogno za q-splajnove reda 4:

$$\begin{aligned} f(\bar{t}) &= \sum_{j=1}^{n} c_j T_j^4(\bar{t}) = \sum_{j=1}^{n+1} d_j \bar{T}_j^4(\bar{t}) \\ &= d_{i-2}\bar{T}_{i-2}^4(\bar{t}) + d_{i-1}\bar{T}_{i-1}^4(\bar{t}) + d_i \bar{T}_i^4(\bar{t}) \\ &= (\gamma_{i-2,i-3}^4 c_{i-3} + \gamma_{i-2,i-2}^4 c_{i-2})\bar{T}_{i-2}^4(\bar{t}) + (\gamma_{i-1,i-2}^4 c_{i-2} + \gamma_{i-1,i-1}^4 c_{i-1})\bar{T}_{i-1}^4(\bar{t}) \\ &\quad + (\gamma_{i,i-1}^4 c_{i-1} + \gamma_{i,i}^4 c_i)\bar{T}_i^4(\bar{t}), \end{aligned} \tag{3.46}$$

uz korištenje (3.35). Vrijednosti $\bar{T}_{i-2}^4(\bar{t})$ i $\bar{T}_i^4(\bar{t})$ mogu se dobiti iz (3.21) i (3.22):

$$\bar{T}_{i-2}^4(\bar{t}) = \frac{(t_{i+1} - \bar{t})^2(\bar{q} + q_{i+1})}{12\,\bar{C}_2(i)\,\bar{C}_3(i-1)}, \quad \bar{T}_i^4(\bar{t}) = \frac{(\bar{t} - t_i)^2(q_i + \bar{q})}{12\,\bar{C}_2(i)\,\bar{C}_3(i)}, \tag{3.47}$$

dok se iz (3.18), (3.23) i (3.26) izvodi

$$T_i^4(t_{i+2}) = \frac{1}{12}\left(\frac{(h_i + h_{i+1})h_{i+2}\Big(q_i h_i + q_{i+1}(h_i + h_{i+1})\Big)}{(h_{i+1} + h_{i+2})\,C_2(i)\,C_3(i)}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{q_{i+2}h_{i+1}h_{i+2}}{C_2(i+1)}\left(\frac{1}{C_3(i)}+\frac{1}{C_3(i+1)}\right)\\
&\left.+\frac{h_{i+1}(h_{i+2}+h_{i+3})\Big(q_{i+3}(h_{i+2}+h_{i+3})+q_{i+4}h_{i+3}\Big)}{(h_{i+1}+h_{i+2})\,C_2(i+2)\,C_3(i+1)}\right),
\end{aligned}
$$

odakle slijedi

$$
\begin{aligned}
\bar{T}^4_{i-1}(\bar{t}) = \frac{1}{12}&\left(\frac{(h_{i-1}+(\bar{t}-t_i))(t_{i+1}-\bar{t})\Big(q_{i-1}h_{i-1}+q_i(h_{i-1}+(\bar{t}-t_i))\Big)}{h_i\,\bar{C}_2(i-1)\,\bar{C}_3(i-1)}\right.\\
&+\frac{\bar{q}(\bar{t}-t_i)(t_{i+1}-\bar{t})}{\bar{C}_2(i)}\left(\frac{1}{\bar{C}_3(i-1)}+\frac{1}{\bar{C}_3(i)}\right)\\
&\left.+\frac{(\bar{t}-t_i)((t_{i+1}-\bar{t})+h_{i+1})\Big(q_{i+1}((t_{i+1}-\bar{t})+h_{i+1})+q_{i+2}h_{i+1}\Big)}{h_i\,\bar{C}_2(i+1)\,\bar{C}_3(i)}\right).
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

Da bi imali korektan algoritam, moramo još vidjeti da se metoda koju smo ograničili uvjetom $\bar{t} \neq t_j$ $(j = 4, \ldots, n+1)$, može proširiti i na čvorove t_j. Prvo ćemo izvesti KI-matrice za slučaj kada je $\bar{t} = t_i$ i zatim pokazati da im konvergiraju KI-matrice za $\bar{t} \in (t_i, t_{i+1})$ kada $\bar{t} \to t_i$.

Neka je sada $\bar{t} = \bar{t}_i = \bar{t}_{i+1}$, i definirajmo proširene particije na slijedeći način:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \bar{t}_i & & & \\
\cdots & \bar{t}_{i-2} & \bar{t}_{i-1} & \bar{t}_{i+1} & \bar{t}_{i+2} & \bar{t}_{i+3} & \cdots \\
\hline
\cdots & \bar{\bar{t}}_{r-5} & \bar{\bar{t}}_{r-3} & \bar{\bar{t}}_{r-1} & \bar{\bar{t}}_{r+2} & \bar{\bar{t}}_{r+4} & \cdots \\
\cdots & \bar{\bar{t}}_{r-4} & \bar{\bar{t}}_{r-2} & \bar{\bar{t}}_{r} & \bar{\bar{t}}_{r+3} & \bar{\bar{t}}_{r+5} & \cdots \\
 & & & \bar{\bar{t}}_{r+1} & & &
\end{array}
$$

Istim postupkom kao u odjeljku 3.4 izvode se B-splajnovi trećeg reda $\bar{T}^3_j$ nad nizom čvorova $(\bar{t}_j)$:

$$
\bar{T}^3_i(x) = \sum_{j=r-1}^{r+1} a^3_{i,j}\bar{B}^4_j(x),
$$

gdje su $\bar{B}^4_j$ polinomni B-splajnovi reda 4 nad nizom čvorova $(\bar{\bar{t}}_j)$, i

$$
a^3_{i,r-1} = \frac{2\bar{q}_{i+1}\bar{h}_{i+1}}{6\,\bar{C}_2(i)} = \frac{2\bar{q}_{i+1}}{2\bar{q}_{i+1}+\bar{q}_{i+2}},
$$

$$
\begin{aligned}
a^3_{i,r} &= \frac{2\bar{q}_{i+2}(\bar{h}_{i+1}+\bar{h}_{i+2})+\bar{q}_{i+3}\bar{h}_{i+2}}{6\,\bar{C}_2(i+1)},\\
a^3_{i,r+1} &= \frac{\bar{q}_{i+3}\bar{h}_{i+2}}{6\,\bar{C}_2(i+1)},
\end{aligned}
$$

uz $\bar{q}_j$ koji odgovara vrijednosti funkcije q u točki $\bar{t}_j$ i $\bar{h}_j = \bar{t}_{j+1} - \bar{t}_j$. Nadalje je

$$
\bar{T}^3_{i-1}(x) = \sum_{j=r-3}^{r-1} a^3_{i-1,j}\bar{B}^4_j(x),
$$

gdje su koeficijenti dani sa

$$
\begin{aligned}
a^3_{i-1,r-3} &= \frac{\bar{q}_{i-1}\bar{h}_{i-1}}{6\,\bar{C}_2(i-1)} = \frac{\bar{q}_{i-1}}{\bar{q}_{i-1}+2\bar{q}_i},\\
a^3_{i-1,r-2} &= 1,\\
a^3_{i-1,r-1} &= \frac{\bar{q}_{i+2}\bar{h}_{i+1}}{6\,\bar{C}_2(i)} = \frac{\bar{q}_{i+2}}{2\bar{q}_{i+1}+\bar{q}_{i+2}},
\end{aligned}
$$

te

$$
\bar{T}^3_{i-2}(x) = \sum_{j=r-5}^{r-3} a^3_{i-2,j}\bar{B}^4_j(x),
$$

uz

$$
\begin{aligned}
a^3_{i-2,r-5} &= \frac{\bar{q}_{i-2}\bar{h}_{i-2}}{6\,\bar{C}_2(i-2)},\\
a^3_{i-2,r-4} &= \frac{\bar{q}_{i-2}\bar{h}_{i-2}+2\bar{q}_{i-1}(\bar{h}_{i-2}+\bar{h}_{i-1})}{6\,\bar{C}_2(i-2)},\\
a^3_{i-2,r-3} &= \frac{2\bar{q}_i\bar{h}_{i-1}}{6\,\bar{C}_2(i-1)} = \frac{2\bar{q}_i}{\bar{q}_{i-1}+2\bar{q}_i}.
\end{aligned}
$$

Ako sada označimo čvorove sa:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\cdots & t_{i-2} & t_{i-1} & t_i & t_{i+1} & t_{i+2} & \cdots \\
\hline
\cdots & \bar{t}_{i-2} & \bar{t}_{i-1} & \bar{t}_i & \bar{t}_{i+2} & \bar{t}_{i+3} & \cdots \\
 & & & \bar{t}_{i+1} & & &
\end{array}
$$

i po istom principu kao u odjeljku 3.5 izvedemo KI-matricu Γ^3 koja ima slijedeći oblik:

$$\Gamma^3(i-2:i+1, i-2:i) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \scriptstyle i-2 & \scriptstyle i-1 & \scriptstyle i \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{\bar{C}_2(i)}{C_2(i-1)} & \frac{\bar{C}_2(i-1)}{C_2(i-1)} & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \scriptstyle i-2 \\ \scriptstyle i-1 \\ \scriptstyle i \\ \scriptstyle i+1 \end{array} . \tag{3.49}$$

Označimo li sada $\bar{C}_2(j)$, definiran nad proširenom particijom $\bar{T} = T \cup \{\bar{t}\}$ za $\bar{t} \in [t_i, t_{i+1})$, sa $\bar{C}_{2,\bar{t}}(j)$, i analogno $\Gamma^3_{\bar{t}}$ i $\bar{T}^3_{j,\bar{t}}$, trivijalno se vidi da vrijedi

$$\lim_{\bar{t}\to t_i} \bar{C}_{2,\bar{t}}(j) = \bar{C}_{2,t_i}(j)$$

za $j = i-1, i, i+1$. Ovdje se koristi činjenica da $\bar{q}$ neprekidno ovisi o $\bar{t}$, što smo komentirali na početku odjeljka 3.5. Iz ovog direktno slijedi da je

$$\lim_{\bar{t}\to t_i} \Gamma^3_{\bar{t}} = \Gamma^3_{t_i}$$

Odmah se vidi da je $\bar{T}^3_{i-1,t_i}(t_i) = 1$ i $\bar{T}^3_{i,t_i}(t_i) = 0$, i da vrijedi

$$\lim_{\bar{t}\to t_i} \bar{T}^3_{j,\bar{t}}(\bar{t}) = \bar{T}^3_{j,t_i}(t_i)$$

za $j = i-1, i$, pa onda konačno da je

$$\lim_{\bar{t}\to t_i} f(\bar{t}) = f(t_i).$$

Što se tiče B-splajnova 4. reda, ponovo kao u odjeljku 3.4 izvodimo da je

$$\bar{T}^4_i(x) = \sum_{j=r-1}^{r+2} a^4_{i,j} \bar{B}^5_j(x),$$

gdje su koeficijenti jednaki

$$a^4_{i,r-1} = \frac{\bar{q}_{i+1}\bar{h}^2_{i+1}}{12\,\bar{C}_2(i)\,\bar{C}_3(i)},$$

$$
\begin{aligned}
a^4_{i,r} &= \frac{1}{24}\left[\frac{1}{\bar{C}_3(i)}\left(\frac{\bar{q}_{i+1}\bar{h}^2_{i+1}}{\bar{C}_2(i)} + \frac{\bar{q}_{i+2}(\bar{h}_{i+1}+\bar{h}_{i+2})^2}{\bar{C}_2(i+1)}\right)\right.\\
&\quad + \frac{1}{\bar{C}_3(i+1)}\left(\frac{\bar{q}_{i+2}(\bar{h}_{i+1}+\bar{h}_{i+2})^2}{\bar{C}_2(i+1)}\right.\\
&\quad \left.\left. + \frac{1}{\bar{C}_2(i+2)}(\bar{h}_{i+2}+\bar{h}_{i+3})\Big(\bar{q}_{i+3}(\bar{h}_{i+2}+\bar{h}_{i+3}) + \bar{q}_{i+4}\bar{h}_{i+3}\Big)\right)\right],\\
a^4_{i,r+1} &= \frac{\Big(\bar{q}_{i+3}(\bar{h}_{i+2}+\bar{h}_{i+3}) + \bar{q}_{i+4}\bar{h}_{i+3}\Big)(\bar{h}_{i+2}+\bar{h}_{i+3})}{12\,\bar{C}_2(i+2)\,\bar{C}_3(i+1)},\\
a^4_{i,r+2} &= \frac{\bar{q}_{i+4}\bar{h}_{i+3}(\bar{h}_{i+2}+\bar{h}_{i+3})}{24\,\bar{C}_2(i+2)\,\bar{C}_3(i+1)},
\end{aligned}
$$

zatim

$$
\bar{T}^4_{i-1}(x) = \sum_{j=r-3}^{r} a^4_{i-1,j}\bar{B}^5_j(x),
$$

uz

$$
\begin{aligned}
a^4_{i-1,r-3} &= \frac{\bar{q}_{i-1}\bar{h}^2_{i-1}}{24\,\bar{C}_2(i-1)\,\bar{C}_3(i-1)},\\
a^4_{i-1,r-2} &= \frac{\Big(\bar{q}_{i-1}(2\bar{h}_{i-1}+\bar{h}_{i+1}) + 2\bar{q}_i(\bar{h}_{i-1}+\bar{h}_{i+1})\Big)\bar{h}_{i-1}}{24\,\bar{C}_2(i-1)\,\bar{C}_3(i-1)},\\
a^4_{i-1,r-1} &= \frac{\Big(\bar{q}_{i+2}(\bar{h}_{i+1}+\bar{h}_{i+2}) + \bar{q}_{i+3}\bar{h}_{i+2}\Big)(\bar{h}_{i+1}+\bar{h}_{i+2})}{12\,\bar{C}_2(i+1)\,\bar{C}_3(i)},\\
a^4_{i-1,r} &= \frac{\bar{q}_{i+3}\bar{h}_{i+2}(\bar{h}_{i+1}+\bar{h}_{i+2})}{24\,\bar{C}_2(i+1)\,\bar{C}_3(i)},
\end{aligned}
$$

pa

$$
\bar{T}^4_{i-2}(x) = \sum_{j=r-5}^{r-2} a^4_{i-2,j}\bar{B}^5_j(x),
$$

uz

$$
\begin{aligned}
a^4_{i-2,r-5} &= \frac{\bar{q}_{i-2}\bar{h}_{i-2}(\bar{h}_{i-2}+\bar{h}_{i-1})}{24\,\bar{C}_2(i-2)\,\bar{C}_3(i-2)},\\
a^4_{i-2,r-4} &= \frac{\Big(\bar{q}_{i-2}\bar{h}_{i-2} + \bar{q}_{i-1}(\bar{h}_{i-2}+\bar{h}_{i-1})\Big)(\bar{h}_{i-2}+\bar{h}_{i-1})}{12\,\bar{C}_2(i-2)\,\bar{C}_3(i-2)},
\end{aligned}
$$

$$a^4_{i-2,r-3} = \frac{\Big(2\bar{q}_{i+1}(\bar{h}_{i-1} + \bar{h}_{i+1}) + \bar{q}_{i+2}(\bar{h}_{i-1} + 2\bar{h}_{i+1})\Big)\bar{h}_{i+1}}{24\,\bar{C}_2(i)\,\bar{C}_3(i-1)},$$

$$a^4_{i-2,r-2} = \frac{\bar{q}_{i+2}\bar{h}^2_{i+1}}{24\,\bar{C}_2(i)\,\bar{C}_3(i-1)},$$

i na kraju

$$\bar{T}^4_{i-3}(x) = \sum_{j=r-7}^{r-4} a^4_{i-3,j}\bar{B}^5_j(x),$$

čiji su koeficijenti jednaki

$$a^4_{i-3,r-7} = \frac{\bar{q}_{i-3}\bar{h}_{i-3}(\bar{h}_{i-3} + \bar{h}_{i-2})}{24\,\bar{C}_2(i-3)\,\bar{C}_3(i-3)},$$

$$a^4_{i-3,r-6} = \frac{\Big(\bar{q}_{i-3}\bar{h}_{i-3} + \bar{q}_{i-2}(\bar{h}_{i-3} + \bar{h}_{i-2})\Big)(\bar{h}_{i-3} + \bar{h}_{i-2})}{12\,\bar{C}_2(i-3)\,\bar{C}_3(i-3)},$$

$$\begin{aligned} a^4_{i-3,r-5} = \frac{1}{24}\Bigg[&\frac{1}{\bar{C}_3(i-3)}\Bigg(\frac{1}{\bar{C}_2(i-3)}(\bar{h}_{i-3} + \bar{h}_{i-2})\Big(\bar{q}_{i-3}\bar{h}_{i-3} \\ &+\bar{q}_{i-2}(\bar{h}_{i-3} + \bar{h}_{i-2})\Big) + \frac{\bar{q}_{i-1}(\bar{h}_{i-2} + \bar{h}_{i-1})^2}{\bar{C}_2(i-2)}\Bigg) \\ &+\frac{1}{\bar{C}_3(i-2)}\left(\frac{\bar{q}_{i-1}(\bar{h}_{i-2} + \bar{h}_{i-1})^2}{\bar{C}_2(i-2)} + \frac{\bar{q}_i\bar{h}^2_{i-2}}{\bar{C}_2(i-1)}\right)\Bigg], \end{aligned}$$

$$a^4_{i-3,r-4} = \frac{\bar{q}_i\bar{h}^2_{i-1}}{12\,\bar{C}_2(i-1)\,\bar{C}_3(i-2)}.$$

Sada ćemo ponovo promatrati ubacivanje čvora $\bar{t} = t_i$ u T i definirati analogne oznake kao i prije za proširenu particiju $\bar{T}$: $\bar{C}_{3,\bar{t}}(j)$, $\bar{T}^4_{j,\bar{t}}$ i $\Gamma^4_{\bar{t}}$. Opet se relativno lako dokazuje da je

$$\lim_{\bar{t}\to t_i} \bar{C}_{3,\bar{t}}(j) = \bar{C}_{3,t_i}(j)$$

za $j = i-2, i-1, i, i+1$, na primjer,

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{t}\to t_i} \bar{C}_{3,\bar{t}}(i-1) &= \lim_{\bar{h}_i\to 0} \bar{C}_{3,\bar{t}}(i-1) \\ &= \frac{1}{12}\left(\frac{(\bar{q}_{i-1} + \bar{q}_i)\bar{h}^2_{i-1}}{\bar{C}_{2,t_i}(i-1)} + \frac{(\bar{q}_{i+1} + \bar{q}_{i+2})\bar{h}^2_{i+1}}{\bar{C}_{2,t_i}(i)}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\bar{q}_{i-1}\bar{h}_{i-1}}{\bar{q}_{i-1} + 2\bar{q}_i} + \bar{h}_{i-1} + \bar{h}_{i+1} + \frac{\bar{q}_{i+2}\bar{h}_{i+1}}{2\bar{q}_{i+1} + \bar{q}_{i+2}}\right) \\ &= \bar{C}_{3,t_i}(i-1). \end{aligned}$$

Ako sad izvedemo KI-matricu Γ^4 za $\bar{t} = t_i$:

$$\Gamma^4(i-3:i+1, i-3:i) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \scriptstyle i-3 & \scriptstyle i-2 & \scriptstyle i-1 & \scriptstyle i \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \gamma^3_{i-1,i-2}\frac{\bar{C}_3(i-1)}{C_3(i-2)} & \frac{\bar{C}_3(i-2)}{C_3(i-2)} & & \\ & \frac{\bar{C}_3(i)}{C_3(i-1)} & \gamma^3_{i-1,i-1}\frac{\bar{C}_3(i-1)}{C_3(i-1)} & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \scriptstyle i-3 \\ \scriptstyle i-2 \\ \scriptstyle i-1 \\ \scriptstyle i \\ \scriptstyle i+1 \end{matrix} \end{array}, \tag{3.50}$$

ponovo se iz prethodnog može dobiti da je

$$\lim_{\bar{t}\to t_i} \Gamma^4_{\bar{t}} = \Gamma^4_{t_i}.$$

Isto se tako lagano vidi da je

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{t}\to t_i} \bar{T}^4_{i-2,\bar{t}}(\bar{t}) &= \bar{T}^4_{i-2,t_i}(t_i) \\ &= \frac{\bar{h}^2_{i+1}(\bar{q}_{i+1} + \bar{q}_{i+2})}{12\,\bar{C}_{2,t_i}(i)\,\bar{C}_{3,t_i}(i-1)}, \\ \lim_{\bar{t}\to t_i} \bar{T}^4_{i-1,\bar{t}}(\bar{t}) &= \bar{T}^4_{i-1,t_i}(t_i) \\ &= \frac{\bar{h}^2_{i-1}(\bar{q}_{i-1} + \bar{q}_{i})}{12\,\bar{C}_{2,t_i}(i-1)\,\bar{C}_{3,t_i}(i-1)}, \\ \lim_{\bar{t}\to t_i} \bar{T}^4_{i,\bar{t}}(\bar{t}) &= \bar{T}^4_{i,t_i}(t_i) = 0, \end{aligned}$$

iz čega se konačno dobiva da vrijedi

$$\lim_{\bar{t}\to t_i} f(\bar{t}) = f(t_i)$$

i u algoritmu za računanje q-splajnova reda 4.

Dakle, pokazali smo da u danom algoritmu ne moramo posebno ispitivati da li je točka u kojoj računamo vrijednost splajna čvor ili ne. Osim toga, istu KI-matricu možemo koristiti i za ubacivanje jednog čvora koji je različit ili jednak nekom čvoru iz particije T.

3.7 Generalizirani de Boor-ov algoritam za računanje q-splajnova

Za razliku od prethodnog algoritma koji računa vrijednost q-splajna reda 3 i 4 tako što danu točku ubacuje samo jednom, u ovom algoritmu ćemo je ubaciti maksimalni broj puta, tj. $k-1$ puta za $k=3,4$ i na taj način dobiti generalizaciju de Boor-ovog algoritma na q-splajnove. Prvi od $k-1$ koraka rekurzije smo već napravili u prethodnom odjeljku, pa nam preostaje još da, uz iste oznake kao iz prethodnog odjeljka, ubacimo $\bar{t}$ do kratnosti $k-1$.

Prvo, uvedimo proširene particije $(t_j)_{j=1}^{n+4}$, $(\bar{t}_j)_{j=1}^{n+5}$, $(\tilde{t}_j)_{j=1}^{n+6}$ i $(\hat{t}_j)_{j=1}^{n+7}$ na slijedeći način:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \bar{t}_{i-1} & \bar{t}_i & \bar{t}_{i+1} & \bar{t}_{i+2} & \bar{t}_{i+3} & \cdots \\
\cdots & t_{i-1} & t_i & \bar{t} & t_{i+1} & t_{i+2} & \cdots \\
\hline
\cdots & \tilde{t}_{i-1} & \tilde{t}_i & \tilde{t}_{i+1} & \tilde{t}_{i+3} & \tilde{t}_{i+4} & \cdots \\
 & & & \tilde{t}_{i+2} & & & \\
\cdots & \hat{t}_{i-1} & \hat{t}_i & \hat{t}_{i+1} & \hat{t}_{i+4} & \hat{t}_{i+5} & \cdots \\
 & & & \hat{t}_{i+2} & & & \\
 & & & \hat{t}_{i+3} & & &
\end{array}
\tag{3.51}
$$

iz kojih slijede analogne oznake kao što su: $\widetilde{T}_j^k$, $\widehat{T}_j^k$, $\widetilde{C}_{k-1}(j)$, $\widehat{C}_{k-1}(j)$ za $k=3,4$. Nadalje, uvest ćemo još i matricu $\bar{\Gamma}^3 = (\bar{\gamma}_{l,j}^3)_{l,j=2}^{n+2,n+1}$ koja je jednaka KI-matrici kod ubacivanja čvora $\bar{t}$ u particiju $(\bar{t}_j)$:

$$
\bar{\Gamma}^3(i-1:i+1, i-1:i) = \begin{array}{cc}
\begin{array}{cc} {\scriptstyle i-1} & {\scriptstyle i} \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 1 & \\ \frac{\widetilde{C}_2(i+1)}{\bar{C}_2(i)} & \frac{\widetilde{C}_2(i)}{\bar{C}_2(i)} \\ & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} {\scriptstyle i-1} \\ {\scriptstyle i} \\ {\scriptstyle i+1} \end{array}
\end{array},
\tag{3.52}
$$

što direktno slijedi iz (3.49). Ako ponovo za $\bar{t} \in [t_i, t_{i+1})$ označimo $\bar{\Gamma}_{\bar{t}}^3$, onda se na isti način kao u prethodnom odjeljku može pokazati da vrijedi

$$
\lim_{\bar{t} \to t_i} \bar{\Gamma}_{\bar{t}}^3 = \bar{\Gamma}_{t_i}^3,
$$

gdje je

$$\bar{\Gamma}^3_{t_i}(i-1:i+1, i-1:i) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} {\scriptstyle i-1} & {\scriptstyle i} \end{array} \\ \begin{array}{c} {\scriptstyle i-1} \\ {\scriptstyle i} \\ {\scriptstyle i+1} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Sada, neka je $\bar{t} \in [t_i, t_{i+1})$ i $f \in \mathcal{S}(3, \mathbf{m}, d\boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \Delta)$ dan sa

$$f(\bar{t}) = \sum_{j=2}^{n} c_j T_j^3(\bar{t}),$$

tada je

$$f(\bar{t}) = \sum_{j=2}^{n} c_j T_j^3(\bar{t}) = \sum_{j=2}^{n+1} \bar{c}_j \bar{T}_j^3(\bar{t}) = \sum_{j=2}^{n+2} \tilde{c}_j \widetilde{T}_j^3(\bar{t}) = \tilde{c}_i, \tag{3.53}$$

gdje su, zbog (3.30) i (3.52), koeficijenti uz netrivijalne B-splajnove u $\bar{t}$ dani sa

$$\begin{aligned} \bar{c}_{i-1} &= \gamma^3_{i-1,i-2} c_{i-2} + \gamma^3_{i-1,i-1} c_{i-1}, \\ \bar{c}_i &= \gamma^3_{i,i-1} c_{i-1} + \gamma^3_{i,i} c_i, \\ \\ \tilde{c}_i &= \bar{\gamma}^3_{i,i-1} \bar{c}_{i-1} + \bar{\gamma}^3_{i,i} \bar{c}_i. \end{aligned}$$

Na ovaj način dobili smo metodu za računanje q-splajnova reda 3. Nadalje, nastavimo sa izvođenjem metode za splajnove reda 4. Iz (3.50) odmah slijedi

$$\bar{\Gamma}^4(i-2:i+1, i-2:i) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} {\scriptstyle i-2} & {\scriptstyle i-1} & {\scriptstyle i} \end{array} \\ \begin{array}{c} {\scriptstyle i-2} \\ {\scriptstyle i-1} \\ {\scriptstyle i} \\ {\scriptstyle i+1} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ \bar{\gamma}^3_{i,i-1} \frac{\widetilde{C}_3(i)}{\bar{C}_3(i-1)} & \frac{\widetilde{C}_3(i-1)}{\bar{C}_3(i-1)} & \\ & \frac{\widetilde{C}_3(i+1)}{\bar{C}_3(i)} & \bar{\gamma}^3_{i,i} \frac{\widetilde{C}_3(i)}{\bar{C}_3(i)} \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \tag{3.54}$$

gdje je $\bar{\Gamma}^4 = (\bar{\gamma}^4_{l,j})_{l,j=1}^{n+2,n+1}$ KI-matrica s particije $(\bar{t}_j)$ u $(\tilde{t}_j)$. Dok se, isto kao u odjeljku 3.5, može pokazati da KI-matrica $\widetilde{\Gamma}^4 = (\tilde{\gamma}^4_{l,j})_{l,j=1}^{n+3,n+2}$ s particije $(\tilde{t}_j)$

u particiju $(\hat{t}_j)$ ima oblik:

$$\widetilde{\Gamma}^4(i-1:i+1,i-1,i) = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} i-1 & i \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & \\ \frac{\widehat{C}_3(i+1)}{\widetilde{C}_3(i)} & \frac{\widehat{C}_3(i)}{\widetilde{C}_3(i)} \\ & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} i-1 \\ i \\ i+1 \end{array} \end{array}. \tag{3.55}$$

Opet, za $\bar{t} \in [t_i, t_{i+1})$ i KI-matricu za umetanje $\bar{t}$ u $(\bar{t}_j)$ vrijedi

$$\lim_{\bar{t}\to t_i} \bar{\Gamma}^4_{\bar{t}} = \bar{\Gamma}^4_{t_i},$$

uz

$$\bar{\Gamma}^4_{t_i}(i-2:i+1,i-2:i) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} i-2 & i-1 & i \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{\widetilde{C}_3(i)}{\bar{C}_3(i-1)} & \frac{\widetilde{C}_3(i-1)}{\bar{C}_3(i-1)} & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} i-2 \\ i-1 \\ i \\ i+1 \end{array} \end{array},$$

i isto tako se lako dokazuje da je

$$\lim_{\bar{t}\to t_i} \widetilde{\Gamma}^4_{\bar{t}} = \widetilde{\Gamma}^4_{t_i},$$

gdje je

$$\widetilde{\Gamma}^4_{t_i}(i-1:i+1,i-1,i) = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} i-1 & i \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} i-1 \\ i \\ i+1 \end{array} \end{array}.$$

Trebalo bi samo posebno pokazati da je $\lim_{\bar{t}\to t_i} \tilde{\gamma}^4_{i,i} = 0$. Lako se izvede, kao u odjeljku 3.4, da je

$$\widehat{T}^3_i(x) = \frac{\hat{q}_i \hat{h}_i}{6\,\widehat{C}_2(i)} \widehat{\widetilde{B}}^4_{r-1}(x) + \widehat{\widetilde{B}}^4_r(x),$$

gdje su $\widehat{\widetilde{B}}^4_j$ polinomni B-splajnovi reda 4 nad particijom $(\hat{\tilde{t}}_j)$:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & \hat{t}_{i+1} & & & \\
 & & \hat{t}_{i+2} & & & \\
\cdots & \hat{t}_i & \hat{t}_{i+3} & \hat{t}_{i+4} & & \cdots \\
\hline
\cdots & \hat{\tilde{t}}_{r-1} & \hat{\tilde{t}}_{r+1} & \hat{\tilde{t}}_{r+5} & & \cdots \\
\cdots & \hat{\tilde{t}}_{r} & \hat{\tilde{t}}_{r+2} & \hat{\tilde{t}}_{r+6} & & \cdots \\
 & & \hat{\tilde{t}}_{r+3} & & & \\
 & & \hat{\tilde{t}}_{r+4} & & &
\end{array}
$$

Onda je

$$\lim_{\bar{t}\to t_i} \widehat{C}_{3,\bar{t}}(i) = \lim_{\bar{t}\to t_i} \frac{(\hat{q}_i + \hat{q}_{i+1})\hat{h}_i}{2(\hat{q}_i + 2\hat{q}_{i+1})} = 0,$$

dok je $\lim_{\bar{t}\to t_i} \widetilde{C}_{3,\bar{t}}(i) \neq 0$, što daje danu tvrdnju. Dakle, algoritam će biti jednako izvodiv i za čvorove kao i za točke različite od čvora. Neka je, ponovo, $\bar{t} \in [t_i, t_{i+1})$ i $f \in \mathcal{S}(4, \mathbf{m}, d\boldsymbol{\sigma}, \Delta)$, dan sa

$$f(\bar{t}) = \sum_{j=1}^{n} c_j T_j^4(\bar{t})$$

tada je za neke koeficijente $(\bar{c}_j)_{j=1}^{n+1}$, $(\tilde{c}_j)_{j=1}^{n+2}$ i $(\hat{c}_j)_{j=1}^{n+3}$ jednako:

$$f(\bar{t}) = \sum_{j=1}^{n} c_j T_j^4(\bar{t}) = \sum_{j=1}^{n+1} \bar{c}_j \bar{T}_j^4(\bar{t}) = \sum_{j=1}^{n+2} \tilde{c}_j \widetilde{T}_j^4(\bar{t}) = \sum_{j=1}^{n+3} \hat{c}_j \widehat{T}_j^4(\bar{t}) = \hat{c}_i, \quad (3.56)$$

gdje su, uz korištenje (3.35), (3.54) i (3.55), koeficijenti uz netrivijalne B-splajnove u $\bar{t}$ dani sa

$$
\begin{aligned}
\bar{c}_{i-2} &= \gamma^4_{i-2,i-3} c_{i-3} + \gamma^4_{i-2,i-2} c_{i-2}, \\
\bar{c}_{i-1} &= \gamma^4_{i-1,i-2} c_{i-2} + \gamma^4_{i-1,i-1} c_{i-1}, \\
\bar{c}_{i} &= \gamma^4_{i,i-1} c_{i-1} + \gamma^4_{i,i} c_{i}, \\
\\
\tilde{c}_{i-1} &= \bar{\gamma}^4_{i-1,i-2} \bar{c}_{i-2} + \bar{\gamma}^4_{i-1,i-1} \bar{c}_{i-1}, \\
\tilde{c}_{i} &= \bar{\gamma}^4_{i,i-1} \bar{c}_{i-1} + \bar{\gamma}^4_{i,i} \bar{c}_{i}, \\
\\
\hat{c}_{i} &= \tilde{\gamma}^4_{i,i-1} \tilde{c}_{i-1} + \tilde{\gamma}^4_{i,i} \tilde{c}_{i}.
\end{aligned}
$$

Napomenimo još da za $q \equiv$ const, prostor q-splajnova reda k prelazi u prostor polinomnih splajnova reda k za $k = 3, 4$, i lako se vidi da ovaj algoritam postaje klasični de Boor-ov algoritam, što opravdava naziv "generalizirani de Boor-ov algoritam".

Poglavlje 4

Programski kodovi algoritama za računanje q-splajnova

4.1 Uvod

U prošlom poglavlju dali smo nekoliko stabilnih algoritama za računanje q-splajnova, pa ćemo ovdje navesti kodove triju od njih, pisanih u Fortranu 90, i to algoritme opisane u odjeljcima 3.4, 3.6 i 3.7. Koristit ćemo, također, i oznake iz prethodnog poglavlja. Prvo ćemo uvesti neke osnovne varijable:

`k` ... red q-splajna; u našem slučaju može biti samo 3 ili 4;
`n` ... dimenzija prostora q-splajnova;
`t` ... polje duljine `n+k` u kom se nalazi niz čvorova nad kojim je definiran prostor q-splajnova;
`q` ... polje duljine `n+k` u kom su spremljene vrijednosti funkcije q u čvorovima;
`h` ... polje maksimalne duljine `n+k-1` u kom su smješteni $h_j = t_{j+1} - t_j$; obično će sadržavati samo onoliko h_j potrebnih za račun;
`x` ... točka u kojoj se računa vrijednost q-splajna, za koju vrijedi `t(k)<=x<=t(n+1)`;
`c` ... polje duljine `n` u kom se nalaze B-splajn koeficijenti;

i modul koji sadrži nekoliko važnih funkcija:

```
!**********************************************************************
!
!  MODUL: q_spl_mod
!
!  NAMJENA: sadrzi definicije funkcija div_0, qq, C2_6 i C3_2
!
!**********************************************************************

module q_spl_mod

contains

!**********************************************************************

function div_0(x,y)

implicit none

double precision :: div_0
double precision, intent(in) :: x,y

div_0=0.0d0
if (y/=0) div_0=x/y

end function div_0

!**********************************************************************

function qq(t,q,i,x)

implicit none

double precision :: qq
double precision, intent(in) :: t(1),q(1),x
integer, intent(in) :: i

qq=(q(i+1)*(x-t(i))+q(i)*(t(i+1)-x))/(t(i+1)-t(i))
```

```
end function qq

!***********************************************************

function C2_6(q,h,i,j)

implicit none

double precision :: C2_6
double precision, intent(in) :: q(1),h(1)
integer, intent(in) :: i,j

C2_6=(q(j)+2*q(j+1))*h(i)+(2*q(j+1)+q(j+2))*h(i+1)

end function C2_6

!***********************************************************

function C3_2(q,h,i,j,C26_1,C26_2)

implicit none

double precision :: C3_2
double precision, intent(in) :: q(1),h(1),C26_1,C26_2
integer, intent(in) :: i,j

C3_2=div_0((q(j)*h(i)+q(j+1)*(h(i)+h(i+1)))*(h(i)+h(i+1)), &
     C26_1) + div_0((q(j+2)*(h(i+1)+h(i+2))+q(j+3)*h(i+2))* &
     (h(i+1)+h(i+2)),C26_2)

end function C3_2

!***********************************************************

end module q_spl_mod

!***********************************************************
```

Funkcija `qq` računa vrijednost funkcije q u danoj točki `x` (3.1), `C2_6(q,h,i,j)` računa vrijednost $6 \cdot C_2(j)$ iz (3.12), dok je `C3_2(q,h,i,j,C26_1,C26_2)` jednaka $2 \cdot C_3(j)$ (3.20). O potrebi funkcije `div_0` reći ćemo nešto kasnije.

4.2 Računanje B-splajnova

Ovdje će biti implementiran algoritam razrađen u odjeljku 3.4. Procedura vraća vrijednosti svih netrivijalnih B-splajnova reda 3 ili 4 za neki $x \in [t_k, t_{n+1}]$ gdje je $k = 3, 4$. Uz već prethodno spomenute varijable, još ćemo izdvojiti:

- `ileft` ... indeks polja `t` takav da je `t(ileft)<=x<t(ileft+1)`;
- `qiatx` ... izlazno polje duljine 4 u kom su spremljene vrijednosti B-splajnova netrivijalnih na segmentu `[t(ileft),t(ileft+1))`, u točki `x`;
- `tt` ... polje u kom su spremljeni čvorovi iz $(\tilde{t}_r)$ (3.3), potrebni za daljnji račun;
- `biatx` ... polje duljine 5 u kom se spremaju vrijednosti netrivijalnih polinomnih B-splajnova reda `k+1` na nizu čvorova `tt`, u točki `x`;
- `koef` ... polje u kom se spremaju koeficijenti $a_{i,r}^k$ iz (3.16) i (3.17) ili (3.23) i (3.26).

Zbog toga što će se ova procedura najčešće koristiti za crtanje krivulja, imati ćemo puno uzastopnih točaka x koji se nalaze u istom podintervalu $[t_i, t_{i+1})$, pa neće biti potrebno svaki puta računati većinu toga, kao na pr. polje `koef`, već samo kada "započnemo" novi podinterval. Zato se varijabla `ileft` sprema u `il`, a `k` u `kk`. Osim toga, procedura poziva `bsplvb` (procedura iz de Boor-ovog paketa za računanje sa splajnovima) koja računa vrijednosti netrivijalnih polinomnih splajnova u danoj točki.

```
!**************************************************************
!
!  PROCEDURA: qsplvb
!
!  NAMJENA:  racuna vrijednosti svih netrivijalnih
!            q-B-splajnova reda 3 ili 4 u danoj tocki uz
!            pretpostavku da je t(i)<t(i+1) za svaki i
!
```

```
!**********************************************************************

subroutine qsplvb(t,q,k,x,ileft,qiatx)
!
! t...niz cvorova (t(1),...,t(n+4))
! q...vrijednost q-a u cvorovima
! k...stupanj splajna: k=3 ili k=4
! x...tocka u kojoj se racunaju vrijednosti B-splajnova
! ileft...indeks takav da je t(ileft)<=x<t(ileft+1)
! qiatx...polje u kom se spremaju vrijednosti B-splajnova
!
use q_spl_mod

implicit none

! Varijable

double precision, intent(in) :: t(1),q(1),x
integer, intent(in) :: k,ileft
double precision, intent(out) :: qiatx(4)
integer :: i,j,ileft2
double precision :: h(7),C26(6),C32(5),biatx(5)
integer, save :: il=-1,kk=-1
double precision, save :: tt(10),koef(12)

! Tijelo qsplvb-a

qiatx=0.0d0
select case (k)

case (3)   ! racunanje B-splajnova reda 3

! racunanje polja h, C26, i tt

    if (ileft/=il.or.kk/=k) then
        h(1)=t(ileft-1)-t(ileft-2)
        do i=1,4
            j=ileft-3+i
```

```
            h(i+1)=t(j+2)-t(j+1)
            C26(i)=C2_6(q,h,i,j)

            j=j+1
            tt(2*i-1)=t(j)
            tt(2*i)=t(j)
        enddo
    endif

! poziv procedure bsplvb koja racuna polinomne B-splajnove
! reda 4 na nizu cvorova tt

    ileft2=4
    call bsplvb(tt,4,1,x,ileft2,biatx)

! racunanje B-splajn koeficijenata q-B-splajnova u bazi
! polinomnih B-splajnova

    if (ileft/=il.or.kk/=k) then
        do i=1,2
            j=ileft-3+i
            koef(2*i-1)=(2*q(j+2)*(h(i+1)+h(i+2))+ &
                        q(j+3)*h(i+2))/C26(i+1)
            koef(2*i)=q(j+3)*h(i+2)/C26(i+1)
        enddo
        do i=2,3
            j=ileft-3+i
            koef(2*i+1)=q(j)*h(i)/C26(i)
            koef(2*(i+1))=(q(j)*h(i)+2*q(j+1)*(h(i)+h(i+1)))/ &
                          C26(i)
        enddo
    endif

! racunanje vrijednosti svih netrivijalnih B-splajnova
! reda 3

    qiatx(1)=koef(1)*biatx(1)+koef(2)*biatx(2)
    do i=3,6
```

```
        qiatx(2)=qiatx(2)+koef(i)*biatx(mod(i-1,4)+1)
    enddo
    qiatx(3)=koef(7)*biatx(3)+koef(8)*biatx(4)

case (4)   ! racunanje B-splajnova reda 4

! racunanje polja h, C26, C32 i tt

    if (ileft/=il.or.kk/=k) then
        j=ileft-3
        h(1)=t(j+1)-t(j)
        h(2)=t(j+2)-t(j+1)
        C26(1)=C2_6(q,h,1,j)
        do i=1,5
            j=ileft-4+i
            h(i+2)=t(j+3)-t(j+2)
            C26(i+1)=C2_6(q,h,i+1,j+1)
            C32(i)=C3_2(q,h,i,j,C26(i),C26(i+1))

            j=j+1
            tt(2*i-1)=t(j)
            tt(2*i)=t(j+1)
        enddo
    endif

! poziv procedure bsplvb koja racuna polinomne B-splajnove
! reda 5 na nizu cvorova tt

    ileft2=5
    call bsplvb(tt,5,1,x,ileft2,biatx)

! racunanje B-splajn koeficijenata q-B-splajnova u bazi
! polinomnih B-splajnova

    if (ileft/=il.or.kk/=k) then
        do i=1,2
            j=ileft-4+i
            koef(i)=q(j+4)*h(i+3)*(h(i+2)+h(i+3))/ &
```

```
                  (2*C26(i+2)*C32(i+1))
        enddo
        do i=1,3
            j=ileft-4+i
            koef(i+2)=(q(j+3)*(h(i+2)+h(i+3))+q(j+4)*h(i+3))* &
                      (h(i+2)+h(i+3))/(C26(i+2)*C32(i+1))
        enddo
        do i=2,3
            j=ileft-4+i
            koef(i+4)=(((h(i)+h(i+1))*(q(j)*h(i)+q(j+1)* &
                      (h(i)+h(i+1)))/C26(i)+q(j+2)*(h(i+1)+ &
                      h(i+2))*(h(i+1)+h(i+2))/C26(i+1))/ &
                      C32(i)+(q(j+2)*(h(i+1)+h(i+2))*(h(i+1)+ &
                      h(i+2))/C26(i+1)+(h(i+2)+h(i+3))* &
                      (q(j+3)*(h(i+2)+h(i+3))+q(j+4)*h(i+3))/ &
                      C26(i+2))/C32(i+1))/2
        enddo
        do i=2,4
            j=ileft-4+i
            koef(i+6)=(q(j)*h(i)+q(j+1)*(h(i)+h(i+1)))* &
                      (h(i)+h(i+1))/(C26(i)*C32(i))
        enddo
        do i=3,4
            j=ileft-4+i
            koef(i+8)=q(j)*h(i)*(h(i)+h(i+1))/(2*C26(i)*C32(i))
        enddo
    endif

! racunanje vrijednosti svih netrivijalnih B-splajnova
! reda 4

    qiatx(1)=koef(1)*biatx(2)+koef(3)*biatx(1)
    do i=1,4
        qiatx(2)=qiatx(2)+koef(2*(5-i))*biatx(i)
        qiatx(3)=qiatx(3)+koef(2*(6-i)+1)*biatx(i+1)
    enddo
    qiatx(4)=koef(10)*biatx(5)+koef(12)*biatx(4)
```

```
case default
    print *, "Red splajna mora biti 3 ili 4!!!"
end select
il=ileft
kk=k

end subroutine qsplvb

!***************************************************************
```

4.3 Računanje vrijednosti i derivacija q-splajna u točki

U odjeljku 3.6 dali smo jedan način na koji se može izračunati vrijednost q-splajna u danoj točki, pa ćemo ovdje napraviti njegov kod. Zapravo, dati ćemo dvije procedure, od kojih `qvalue` računa vrijednost splajna u točki `x`, tako što ubacuje tu točku u niz čvorova `t`, dok `qdvalue` može računati vrijednost splajna, te generalizirane i obične derivacije splajna u danoj točki. `qdvalue` poziva `qvalue` kao i `dbvalue` koja je malo izmjenjena de Boor-ova funkcija za računanje vrijednosti polonomnog splajna u točki. Razlika od originalne funkcije `bvalue` je ta što `bvalue` poziva proceduru `interv` koja računa `ileft` takav da za danu točku `x` vrijedi `t(ileft)<=x<t(ileft+1)`, dok `qdvalue` ima `ileft` kao ulazni argument.

Prvo, navedimo varijable koje se, osim već spomenutih, koriste u `qvalue`:

- `qv` ... izlazna vrijednost q-splajna u danoj točki `x`;
- `tt` ... podniz niza čvorova $(\bar{t}_j)$ (3.27);
- `qt` ... vrijednosti funkcije q u čvorovima polja `tt`;
- `ht` ... polje u kom se nalaze vrijednosti $\bar{h}_j = \bar{t}_{j+1} - \bar{t}_j$;
- `Ct26` ... polje u kom se spremaju vrijednosti $6 \cdot \bar{C}_2(j)$, definirane u odjeljku 3.5;
- `Ct32` ... polje u kom se spremaju vrijednosti $2 \cdot \bar{C}_3(j)$, definirane u odjeljku 3.5;
- `b23,...,b00` ... sadrže netrivijalne elemente KI-matrica Γ^3 ili Γ^4;
- `d` ... polje duljine 3 u kom se spremaju izračunati koeficijenti d_j iz (3.44) ili (3.46);

`TtB` ... polje duljine 3 u kom se spremaju vrijednosti $\bar{T}_j^k(\bar{t})$ za $k = 3, 4$ (3.45) ili (3.47) i (3.48), potrebne za račun.

```
!***********************************************************
!
!  PROCEDURA: qvalue
!
!  NAMJENA:  racuna vrijednost q-splajna zadanog danim
!            koeficijentima
!
!***********************************************************

subroutine qvalue(t,q,c,n,k,x,qv,ileft,mflag)
!
! t...niz cvorova (t(1),...,t(n+k))
! q...vrijednost q-a u cvorovima
! c...B-splajn koeficijenti q-splajna
! n...broj koeficijenata (dimenzija prostora q-splajnova)
! k...stupanj splajna: k=3 ili k=4
! x...tocka u kojoj se racuna vrijednost q-splajna
! qv...vrijednost q-splajna (izlaz)
! ileft...indeks takav da je t(ileft)<=x<t(ileft+1)
! mflag...kontrolna varijabla, izlaz iz procedure interv
!
use q_spl_mod

implicit none

! Varijable

double precision, intent(out) :: qv
double precision, intent(in) :: t(1),q(1),c(1),x
integer, intent(in) :: n,k,ileft,mflag
double precision :: tt(7),qt(7),C26(4),Ct26(5),C32(3), &
                    Ct32(4),h(5),ht(6), &
                    b23,b22,b12,b11,b01,b00,d(3),TtB(3)
integer :: i,j
```

```
! Tijelo qvalue-a

if (k/=3 .and. k/=4) then
    print *, "Red (k) mora biti 3 ili 4!!!"
    return
endif

qv=0.0d0

if (mflag/=0) return
if ((ileft<k).or.(ileft>n)) then
    if (x/=t(n+1)) then
        print *, x, " je izvan intervala [",t(k),",", &
                    t(n+1),"]!!!"
        return
    endif
endif

! racunanje polja tt i qt

do i=1,k-1
    j=ileft-k+1+i
    tt(i)=t(j)
    qt(i)=q(j)
enddo
tt(k)=x
qt(k)=qq(t,q,ileft,x)
do i=k+1,2*k-1
    j=ileft-k+i
    tt(i)=t(j)
    qt(i)=q(j)
enddo

! racunanje polja h, ht, C26 i Ct26

j=ileft-k+2
h(1)=t(j+1)-t(j)
ht(1)=tt(2)-tt(1)
```

```
do i=1,2*(k-2)
    j=ileft-k+1+i
    h(i+1)=t(j+2)-t(j+1)
    ht(i+1)=tt(i+2)-tt(i+1)
    C26(i)=C2_6(q,h,i,j)
    Ct26(i)=C2_6(qt,ht,i,i)
enddo
i=2*(k-1)-1
ht(i+1)=tt(i+2)-tt(i+1)
Ct26(i)=C2_6(qt,ht,i,i)

! racunanje netrivijalnih elemenata knot insertion matrice
! reda 3

b12=ht(k)*Ct26(k-1)/(h(k-1)*C26(k-2))
b11=Ct26(k-2)/C26(k-2)
b01=Ct26(k)/C26(k-1)
b00=ht(k-1)*Ct26(k-1)/(h(k-1)*C26(k-1))

select case (k)

case (3)   ! racunanje q-splajna 3. reda

! racunanje koeficijenata d

    d(1)=b12*c(ileft-2)+b11*c(ileft-1)
    d(2)=b01*c(ileft-1)+b00*c(ileft)

! racunanje vrijednosti B-splajnova na nizu cvorova tt
! u tocki x

    i=2
    TtB(1)=ht(i+1)*(2*qt(i+1)+qt(i+2))/Ct26(i)
    TtB(2)=ht(i)*(qt(i)+2*qt(i+1))/Ct26(i)

! vrijednost q-splajna 3. reda u tocki x

    qv=d(1)*TtB(1)+d(2)*TtB(2)
```

```
case (4)   ! racunanje q-splajna 4. reda

! racunanje polja C32 i Ct32

    do i=1,3
        j=ileft-3+i
        C32(i)=C3_2(q,h,i,j,C26(i),C26(i+1))
        Ct32(i)=C3_2(qt,ht,i,i,Ct26(i),Ct26(i+1))
    enddo
    i=4
    Ct32(i)=C3_2(qt,ht,i,i,Ct26(i),Ct26(i+1))

! racunanje netrivijalnih elemenata knot insertion
! matrice reda 4

    b23=b12*Ct32(2)/C32(1)
    b22=Ct32(1)/C32(1)
    b12=b01*Ct32(3)/C32(2)
    b11=b11*Ct32(2)/C32(2)
    b01=Ct32(4)/C32(3)
    b00=b00*Ct32(3)/C32(3)

! racunanje koeficijenata d

    d(1)=b23*c(ileft-3)+b22*c(ileft-2)
    d(2)=b12*c(ileft-2)+b11*c(ileft-1)
    d(3)=b01*c(ileft-1)+b00*c(ileft)

! racunanje vrijednosti B-splajnova na nizu cvorova tt
! u tocki x

    i=2
    TtB(1)=ht(i+2)*ht(i+2)*(qt(i+2)+qt(i+3))/(Ct26(i+1)* &
           Ct32(i))
    Ttb(2)=((ht(i)+ht(i+1))*ht(i+2)*(qt(i)*ht(i)+qt(i+1)* &
           (ht(i)+ht(i+1)))/((ht(i+1)+ht(i+2))*Ct26(i))+ &
           qt(i+2)*ht(i+1)*ht(i+2)/Ct26(i+1))/Ct32(i) + &
```

```
          (qt(i+2)*ht(i+1)*ht(i+2)/Ct26(i+1)+ht(i+1)* &
          (ht(i+2)+ht(i+3))*(qt(i+3)*(ht(i+2)+ht(i+3))+ &
          qt(i+4)*ht(i+3))/((ht(i+1)+ht(i+2))* &
          Ct26(i+2)))/Ct32(i+1)
    Ttb(3)=ht(i+1)*ht(i+1)*(qt(i+1)+qt(i+2))/(Ct26(i+1)* &
          Ct32(i+1))

! vrijednost q-splajna 4. reda u tocki x

    do i=1,3
        qv=qv+d(i)*TtB(i)
    enddo
end select

end subroutine qvalue

!**************************************************************
```

U proceduri `qdvalue` derivacije se računaju pomoću derivacijske jednadžbe (3.6). Dakle, ako imamo q-splajn reda 4 f zadan sa

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j T_j^4(x),$$

onda njegova generalizirana derivacija L_1 ima oblik

$$L_1 f(x) = \sum_{j=2}^{n} \frac{c_j - c_{j-1}}{C_3(j)} T_j^3(x) =: \sum_{j=2}^{n} c_j^1 T_j^3(x).$$

U ovom slučaju je $L_1 = D$, tj. prva generalizirana derivacija jednaka je običnoj. Za drugu generaliziranu derivaciju L_2 vrijedi

$$L_2 f(x) = \sum_{j=3}^{n} \frac{c_j^1 - c_{j-1}^1}{C_2(j)} B_j^2(x) =: \sum_{j=3}^{n} c_j^2 B_j^2(x),$$

gdje su B_j^2 ponovo polinomni B-splajnovi reda 2. Iz definicije se vidi da su prostori q-splajnova reda 1 i 2 jednaki polinomnim. Pošto se derivacijskom jednadžbom dobivaju samo generalizirane derivacije, obične derivacije izvoditi ćemo iz njih, pa se tako trivijalno vidi da je $D^2 f = qL_2 f$. Još nam ostaje $L_3 f$:

$$L_3 f(x) = \sum_{j=4}^{n} \frac{c_j^2 - c_{j-1}^2}{C_1(j)} B_j^1(x) =: \sum_{j=4}^{n} c_j^3 B_j^1(x).$$

Lako se izvede da je $D^3 f = qL_3 f + q' L_2 f$. Po definiciji q-splajna, $L_4 f \equiv 0$, ali je $D^4 f = 2q' L_3 f$. Analogno se izvedu derivacije za splajn reda 3. U ovom slučaju vrijedi da je $Df = qL_1 f$, $D^2 f = qL_2 f + q' L_1 f$ i $D^3 f = 2q' L_2 f$.

Uz prethodno spomenute varijable, važne su još:

- `deriv` ... red derivacije;
- `gen` ... oznaka koja određuje da li se računa obična ili generalizirana derivacija: `gen=0` za običnu i `gen=1 (gen/=0)` za generaliziranu derivaciju;
- `qdv` ... izlazna vrijednost.

Navedimo još da ova procedura poziva već spomenutu proceduru `interv` koja određuje podinterval u kom se nalazi `x`.

```
!**************************************************************
!
!  PROCEDURA: qdvalue
!
!  NAMJENA:  racuna vrijednost generalizirane ili obicne
!            derivacije reda deriv q-splajna zadanog danim
!            koeficijentima
!
!**************************************************************

subroutine qdvalue(t,q,c,n,k,x,deriv,gen,qdv)
!
! t...niz cvorova (t(1),...,t(n+k))
! q...vrijednost q-a u cvorovima
! c...B-splajn koeficijenti q-splajna
! n...broj koeficijenata (dimenzija prostora q-splajnova)
! k...stupanj splajna: k=3 ili k=4
! x...tocka u kojoj se racuna vrijednost q-splajna
```

```
! deriv...red derivacije
! gen...oznaka koja odredjuje da li se racuna obicna ili
!   generalizirana derivacija: gen=0 za obicnu i gen=1
!   (gen/=0) za generaliziranu derivaciju
! qdv...vrijednost q-splajna (izlaz)
!
use q_spl_mod
implicit none

! Varijable

double precision, intent(out) :: qdv
double precision, intent(in) :: t(1),q(1),c(1),x
integer, intent(in) :: n,k,deriv,gen
double precision, external :: dbvalue
double precision :: qv,h(5),C26(4),C32(3),d(3),qdvp
integer :: ileft,mflag,i,j,poc

! Tijelo qdvalue-a

qdv=0.0d0
if (k/=3 .and. k/=4) then
    print *, "Red (k) mora biti 3 ili 4!!!"
    return
endif
call interv(t,n+k,x,ileft,mflag)
if (mflag/=0) return
if ((ileft<k).or.(ileft>n)) then
    if (x/=t(n+1)) then
        print *, x, " je izvan intervala [",t(k),",", &
                 t(n+1),"]!!!"
        return
    endif
endif
if (deriv>k.or.((deriv==k).and.(gen/=0))) return

if (k==4) then   ! ako je red q-splajna jednak 4
```

```
    if (deriv<=0) then

! racunanje vrijednosti q-splajna reda 4

        call qvalue(t,q,c,n,4,x,qv,ileft,mflag)
        qdv=qv
        return
    else

! ako se racuna derivacija reda >=1 q-splajna reda 4

        j=ileft-2
        h(1)=t(j+1)-t(j)
        h(2)=t(j+2)-t(j+1)
        C26(1)=C2_6(q,h,1,j)
        do i=1,3
            j=ileft-3+i
            h(i+2)=t(i+3)-t(i+2)
            C26(i+1)=C2_6(q,h,i+1,j+1)
            C32(i)=C3_2(q,h,i,j,C26(i),C26(i+1))
            d(i)=(c(j)-c(j-1))/C32(i)
        enddo
    endif

else   ! ako je red q-splajna jednak 3

    do i=1,3
        j=ileft-3+i
        d(i)=c(j)
    enddo
endif

if ((deriv<=0).or.((k==4).and.(deriv==1))) then

! racunanje vrijednosti q-splajna reda 3 ili 1. derivacije
! q-splajna reda 4

    poc=ileft-2
```

```
    call qvalue(t(poc:poc+5),q(poc:poc+5),d,3,3,x,qv, &
                ileft-poc+1,mflag)
    qdv=qv
    return
else

! ako se racuna derivacija reda >=1 q-splajna reda 3 ili
! derivacija reda >=2 q-splajna reda 4

    if (k==3) then

! ako se racuna derivacija reda >=1 q-splajna reda 3

        j=ileft-1
        h(1)=t(j+1)-t(j)
        do i=1,2
            j=ileft-2+i
            h(i+1)=t(j+2)-t(j+1)
            C26(i)=C2_6(q,h,i,j)
        enddo
    endif
    do i=1,2
        d(i)=(d(i+1)-d(i))/C26(i+k-3)
    enddo
endif
if ((k/=4).or.(deriv/=4).or.(gen/=0)) then

! ako se racuna obicna derivacija 3. reda od q-splajna
! reda 3, ili obicna derivacija 4. reda od q-splajna reda 4,
! onda se ovaj dio ne treba racunati

    poc=ileft-1
    qdvp=dbvalue(t(poc:poc+3),d,2,2,x,0,ileft-poc+1,mflag)
endif
if ((deriv==1).or.((k==4).and.(deriv==2))) then

! racunanje 1. generalizirane derivacije q-splajna reda 3
! ili 2. generalizirane derivacije q-splajna reda 4
```

```
    qdv=qdvp

! racunanje 1. obicne derivacije q-splajna reda 3 ili
! 2. obicne derivacije q-splajna reda 4

    if (gen==0) qdv=qdv*qq(t,q,ileft,x)
    return
endif

! racunanje 2. generalizirane derivacije q-splajna reda 3
! ili 3. generalizirane derivacije q-splajna reda 4

qdv=dbvalue(t(poc:poc+3),d,2,2,x,1,ileft-poc+1,mflag)
if (gen==0) then

! racunanje 2. obicne derivacije q-splajna reda 3 ili 3.
! obicne derivacije q-splajna reda 4

    if ((deriv==2).or.((k==4).and.(deriv==3))) then
        qdv=qq(t,q,ileft,x)*qdv+(q(ileft+1)-q(ileft))* &
            qdvp/(t(ileft+1)-t(ileft))
    return
    else

! racunanje 3. obicne derivacije q-splajna reda 3 ili 4.
! obicne derivacije q-splajna reda 4

        qdv=2*(q(ileft+1)-q(ileft))*qdv/(t(ileft+1)- &
            t(ileft))
    endif
endif

end subroutine qdvalue

!*************************************************************
```

4.4 Računanje vrijednosti q-splajna u točki pomoću generaliziranog de Boor-ovog algoritma

U odjeljku 3.7 dan je generalizirani de Boor-ov algoritam za računanje vrijednosti q-splajna u točki x, i pokazano je da algoritam radi i u limesu kada x teži nekom čvoru. Glavna ideja je da se točka x ubacuje u niz čvorova (t_j) $k-1$ puta, ako računamo q-splajn reda k.

Uz već navedene varijable, važno je još spomenuti:

`qv` ... izlazna vrijednost q-splajna u točki `x`;
`tb, tt, th` ... polja u kojima su spremljeni podnizovi niza čvorova $(\bar{t}_j)$, $(\tilde{t}_j)$ i $(\hat{t}_j)$ iz (3.51);
`qb, qt, qh` ... vrijednosti funkcije q u čvorovima iz `tb, tt,` i `th`;
`Cb26, Ct26, Ch26` ... polja u kojima su spremljene vrijednosti $6 \cdot \bar{C}_2(j)$, $6 \cdot \widetilde{C}_2(j)$ i $6 \cdot \widehat{C}_2(j)$ definirane u odjelcima 3.5 i 3.7;
`Cb32, Ct32, Ch32` ... polja u kojima su spremljene vrijednosti $2 \cdot \bar{C}_3(j)$, $2 \cdot \widetilde{C}_3(j)$ i $2 \cdot \bar{C}_3(j)$ definirane u odjelcima 3.5 i 3.7;
`d` ... polje duljine 3 u kom se spremaju koeficijenti $\bar{c}_j$, $\tilde{c}_j$ ili $\hat{c}_j$ iz (3.53) ili (3.56).

Na ovom mjestu objasniti ćemo nužnost funkcije `div_0` koja se koristi u `C3_2`. U slučaju kada je $x \in [t_i, t_{i+1})$ i gledamo $\lim_{x\to t_i} \widehat{C}_{3,x}(i)$, znamo da je vrijednost tog limesa jednanaka 0, međutim kod računanja samog izraza pojavljuju se limesi oblika $\frac{0}{0}$. Trivijalno se vidi da je taj limes zapravo jednak 0. Osim toga može se provjeriti da se niti na jednom njestu ne može desiti dijeljenje nekog konačnog broja sa nulom, što opravdava samu definiciju funkcije `div_0`. Važno je još napomenuti da će nula u ovom slučaju biti "prava" nula, tj. svi bitovi varijable u kojoj je spremljena biti će jednaki nuli, zbog toga što dolazi oduzimanjem potpuno jednakih brojeva.

```
!*************************************************************
!
!  PROCEDURA: qvalue_dB_4
!
!  NAMJENA:  racuna vrijednost q-splajna zadanog danim
!            koeficijentima generaliziranim de Boor-ovim
```

```
!            algoritmom
!
!*************************************************************

subroutine qvalue_dB_4(t,q,c,n,k,x,qv)
!
! t...niz cvorova (t(1),...,t(n+k))
! q...vrijednost q-a u cvorovima
! c...B-splajn koeficijenti q-splajna
! n...broj koeficijenata (dimenzija prostora q-splajnova)
! k...stupanj splajna: k=3 ili k=4
! x...tocka u kojoj se racuna vrijednost q-splajna
! qv...vrijednost q-splajna (izlaz)
!
use q_spl_mod

implicit none

! Varijable

double precision, intent(out) :: qv
double precision, intent(in) :: t(1),q(1),c(1),x
integer, intent(in) :: n,k
double precision :: tb(7),tt(6),th(5),qb(7),qt(6),qh(5), &
                    h(5),hb(6),ht(5),hh(4), &
                    C26(4),Cb26(5),Ct26(4),Ch26(3), &
                    C32(3),Cb32(4),Ct32(3),Ch32(2), &
                    b23,b22,b12,b11,b01,b00,d(3)
integer :: ileft,mflag,i,j

! Tijelo qvalue_dB_4-a

if (k/=3 .and. k/=4) then
    print *, "Red (k) mora biti 3 ili 4!!!"
    return
endif

qv=0.0d0
```

```
call interv(t,n+k,x,ileft,mflag)

if (mflag/=0) return
if ((ileft<k).or.(ileft>n)) then
    if (x/=t(n+1)) then
        print *, x, " je izvan intervala [",t(k),",", &
                 t(n+1),"]!!!"
        return
    endif
endif

! pripreme za racunanje knot insertion matrice kod
! ubacivanja tocke x s kratnoscu 1 (ako je x jednak
! nekom cvoru - s kratnoscu 2)

! racunanje niza cvorova tb, i qb

do i=1,k-1
    j=ileft-k+1+i
    tb(i)=t(j)
    qb(i)=q(j)
enddo
tb(k)=x
qb(k)=qq(t,q,ileft,x)
do i=k+1,2*k-1
    j=ileft-k+i
    tb(i)=t(j)
    qb(i)=q(j)
enddo

! racunanje polja h, hb, C26 i Cb26

j=ileft-k+2
h(1)=t(j+1)-t(j)
hb(1)=tb(2)-tb(1)
do i=1,2*(k-2)
    j=ileft-k+1+i
    h(i+1)=t(j+2)-t(j+1)
```

```
    hb(i+1)=tb(i+2)-tb(i+1)
    C26(i)=C2_6(q,h,i,j)
    Cb26(i)=C2_6(qb,hb,i,i)
enddo
i=2*(k-1)-1
hb(i+1)=tb(i+2)-tb(i+1)
Cb26(i)=C2_6(qb,hb,i,i)

! racunanje netrivijalnih elemenata knot insertion matrice
! reda 3

b12=hb(k)*Cb26(k-1)/(h(k-1)*C26(k-2))
b11=Cb26(k-2)/C26(k-2)
b01=Cb26(k)/C26(k-1)
b00=hb(k-1)*Cb26(k-1)/(h(k-1)*C26(k-1))

select case (k)

case (3)   ! za q-splajn reda 3

! racunanje novih B-splajn koeficijenata

    d(1)=b12*c(ileft-2)+b11*c(ileft-1)
    d(2)=b01*c(ileft-1)+b00*c(ileft)

case (4)   ! za q-splajn reda 4

! racunanje polja C32 i Cb32

    do i=1,3
        j=ileft-3+i
        C32(i)=C3_2(q,h,i,j,C26(i),C26(i+1))
        Cb32(i)=C3_2(qb,hb,i,i,Cb26(i),Cb26(i+1))
    enddo
    i=4
    Cb32(i)=C3_2(qb,hb,i,i,Cb26(i),Cb26(i+1))

! racunanje netrivijalnih elemenata knot insertion matrice
```

```
! reda 4

    b23=b12*Cb32(2)/C32(1)
    b22=Cb32(1)/C32(1)
    b12=b01*Cb32(3)/C32(2)
    b11=b11*Cb32(2)/C32(2)
    b01=Cb32(4)/C32(3)
    b00=b00*Cb32(3)/C32(3)

! racunanje novih B-splajn koeficijenata

    d(1)=b23*c(ileft-3)+b22*c(ileft-2)
    d(2)=b12*c(ileft-2)+b11*c(ileft-1)
    d(3)=b01*c(ileft-1)+b00*c(ileft)

end select

! pripreme za racunanje knot insertion matrice kod
! ubacivanja tocke x s kratnoscu 2 (ako je x jednak
! nekom cvoru - s kratnoscu 3)

! racunanje niza cvorova tt, i qt

do i=1,k-1
    tt(i)=tb(i+1)
    qt(i)=qb(i+1)
enddo
tt(k)=tb(k)
qt(k)=qb(k)
do i=k+1,2*(k-1)
    tt(i)=tb(i)
    qt(i)=qb(i)
enddo

! racunanje polja ht i Ct26

ht(1)=tt(2)-tt(1)
do i=1,2*(k-2)
```

```
    ht(i+1)=tt(i+2)-tt(i+1)
    Ct26(i)=C2_6(qt,ht,i,i)
enddo

! racunanje netrivijalnih elemenata knot insertion matrice
! reda 3

b01=Ct26(k-1)/Cb26(k-1)
b00=Ct26(k-2)/Cb26(k-1)

select case (k)

case (3)   ! za q-splajn reda 3

! izlazna vrijednost u slucaju reda 3

    qv=b01*d(1)+b00*d(2)

case (4)   ! za q-splajn reda 4

! racunanje polja Ct32

    do i=1,3
        Ct32(i)=C3_2(qt,ht,i,i,Ct26(i),Ct26(i+1))
    enddo

! racunanje netrivijalnih elemenata knot insertion matrice
! reda 4

    b12=b01*Ct32(2)/Cb32(2)
    b11=Ct32(1)/Cb32(2)
    b01=Ct32(3)/Cb32(3)
    b00=b00*Ct32(2)/Cb32(3)

! racunanje novih B-splajn koeficijenata

    d(1)=b12*d(1)+b11*d(2)
    d(2)=b01*d(2)+b00*d(3)
```

```
! pripreme za racunanje knot insertion matrice kod ubacivanja
! tocke x s kratnoscu 3 (ako je x jednak nekom cvoru - s
! kratnoscu 4)

! racunanje niza cvorova th, i qh

   do i=1,3
       th(i)=tt(i+1)
       qh(i)=qt(i+1)
   enddo
   do i=4,5
       th(i)=tt(i)
       qh(i)=qt(i)
   enddo

! racunanje polja hh i Ch26

   hh(1)=th(2)-th(1)
   do i=1,3
       hh(i+1)=th(i+2)-th(i+1)
       Ch26(i)=C2_6(qh,hh,i,i)
   enddo

! racunanje polja Ch32

   do i=1,2
       Ch32(i)=C3_2(qh,hh,i,i,Ch26(i),Ch26(i+1))
   enddo

! racunanje netrivijalnih elemenata knot insertion matrice
! reda 4

   b01=Ch32(2)/Ct32(2)
   b00=Ch32(1)/Ct32(2)

! izlazna vrijednost u slucaju reda 4
```

```
    qv=b01*d(1)+b00*d(2)

end select

end subroutine qvalue_dB_4

!**************************************************************
```

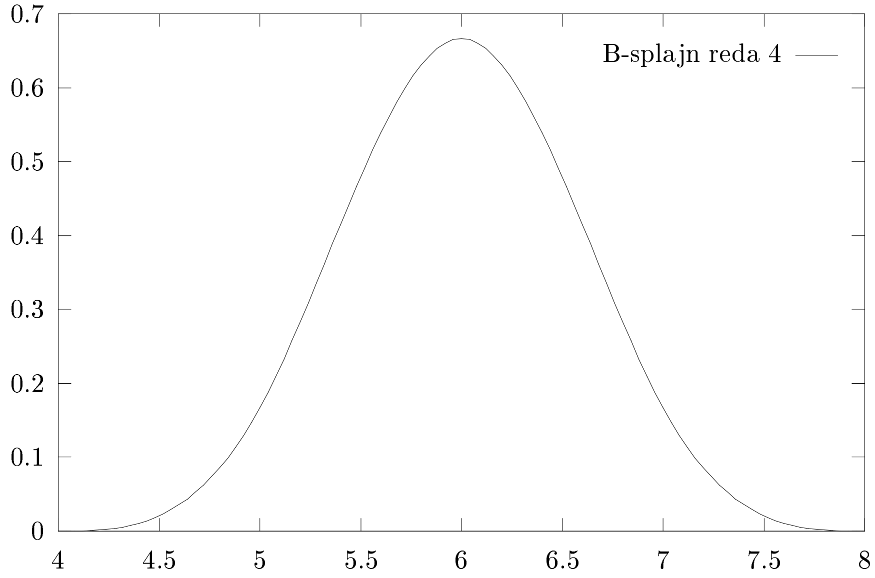
4.5 Grafički prikazi q-splajnova

Pokazat ćemo nekoliko grafičkih prikaza q-B-splajnova i njihovih derivacija kako bismo ilustrirali utjecaj smanjivanja nekih od parametara q_i na izgled krivulje. Uzet ćemo interval $[4, 8]$ i na njemu proširenu particiju $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

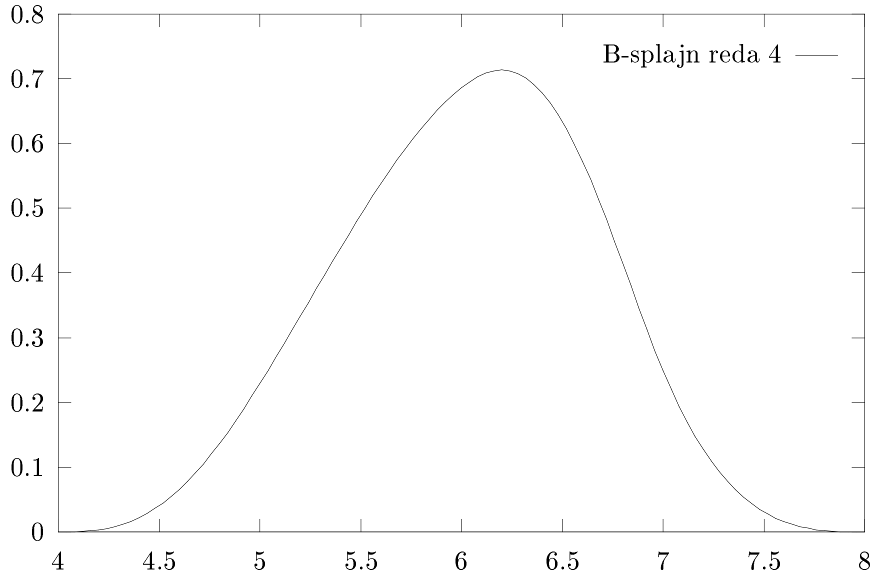
Za početak promatrati ćemo promjenu prametara q_5 i q_6 kod B-splajna T_4^4 reda 4: slike 4.1, 4.2 i 4.3. Vrijednosti q-splajna računate su pomoću procedure `qvalue_dB_4` iz odjeljka 4.4.

Zatim slijedi promjena parametra q_5 kod B-splajna T_4^3 reda 3, gdje se ponovo vrijednosti splajna računaju pomoću procedure `qvalue_dB_4`: slike 4.4, 4.5 i 4.6.

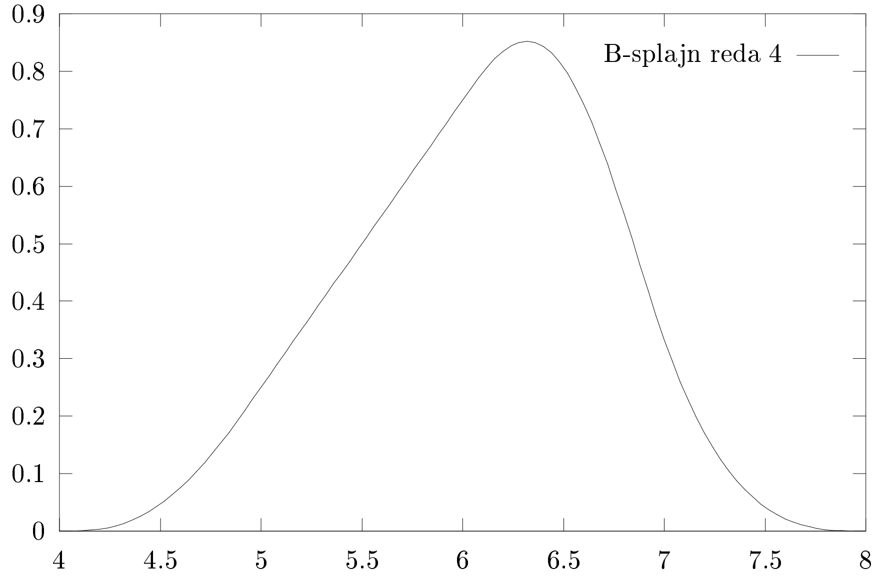
Na kraju dan je B-splajn T_4^4, njegove obične derivacije (slika 4.7) i njegove generalizirane derivacije (slika 4.8), te T_4^3, njegove obične (slika 4.9) i generalizirane derivacije (slika 4.10). Ponovo je $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ proširena particija intervala $[4, 8]$, $q_i = 1$ za $i \neq 5$ i $q_5 = 0.0001$, a vrijednosti q-splajnova i njihovih derivacija računaju se pomoću procedure `qdvalue` iz odjeljka 4.3.



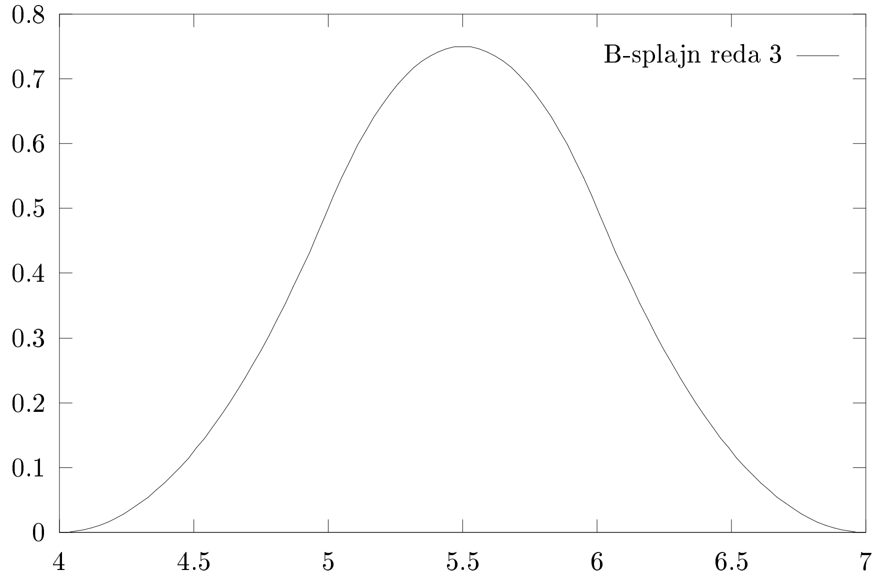
Slika 4.1: B-splajn T_4^4 za $q_i = 1$, $i = 1, \ldots, 11$



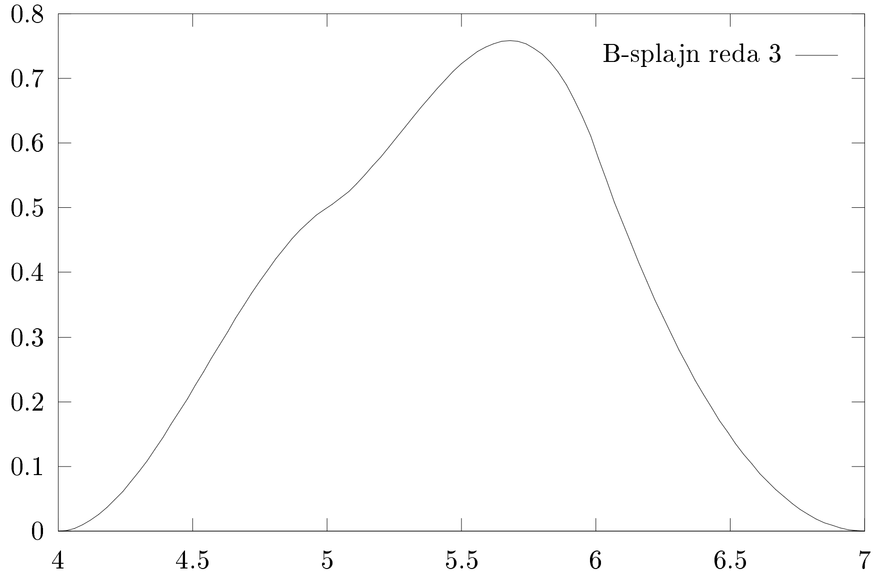
Slika 4.2: B-splajn T_4^4 za $q_i = 1$, $i \neq 5, 6$ i $q_5 = q_6 = 0.1$



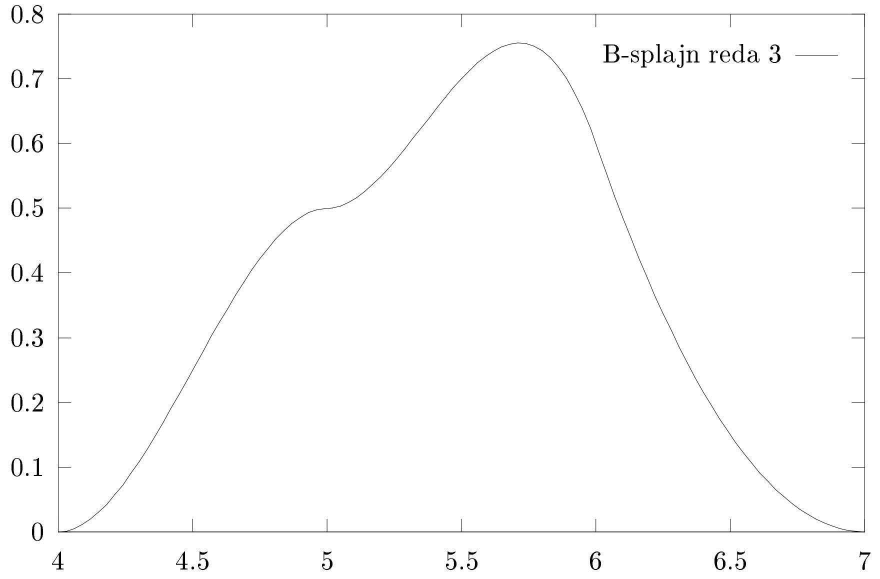
Slika 4.3: B-splajn T_4^4 za $q_i = 1$, $i \neq 5, 6$ i $q_5 = q_6 = 0.0001$



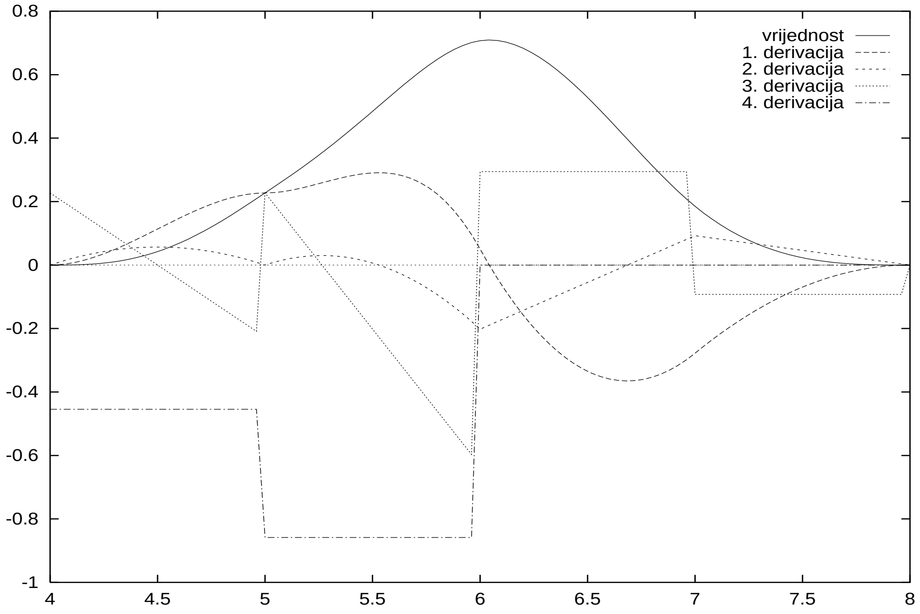
Slika 4.4: B-splajn T_4^3 za $q_i = 1$, $i = 2, \ldots, 9$



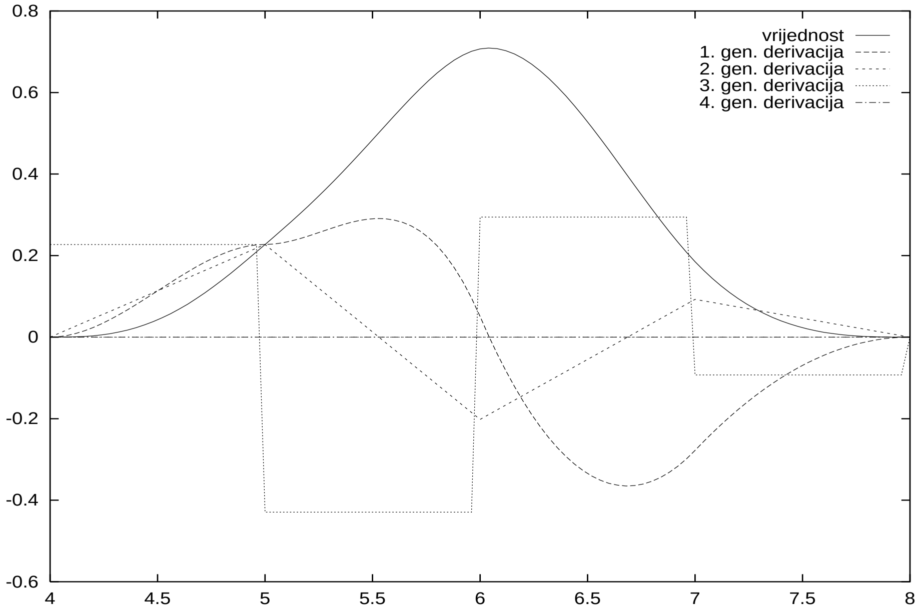
Slika 4.5: B-splajn T_4^3 za $q_i = 1$, $i \neq 5$ i $q_5 = 0.1$



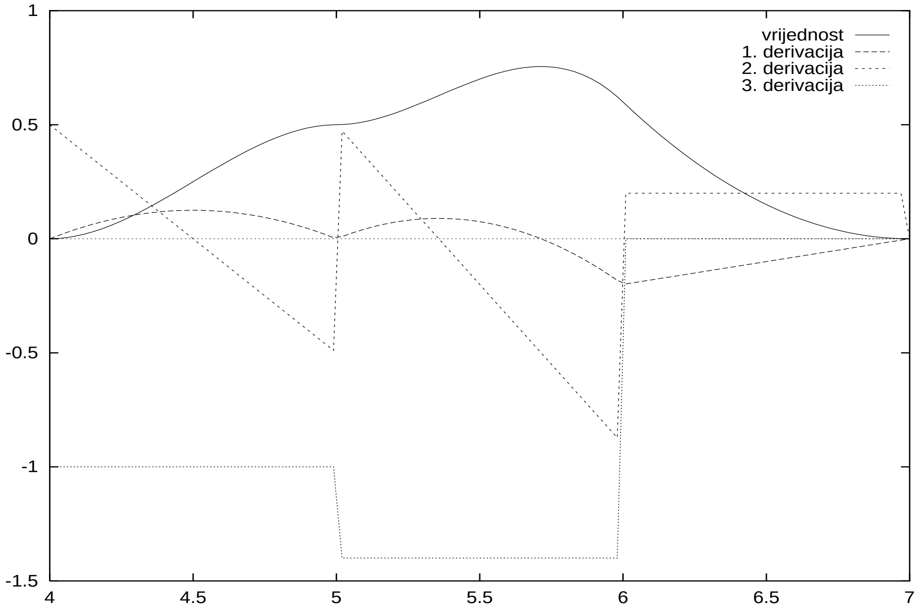
Slika 4.6: B-splajn T_4^3 za $q_i = 1$, $i \neq 5$ i $q_5 = 0.0001$



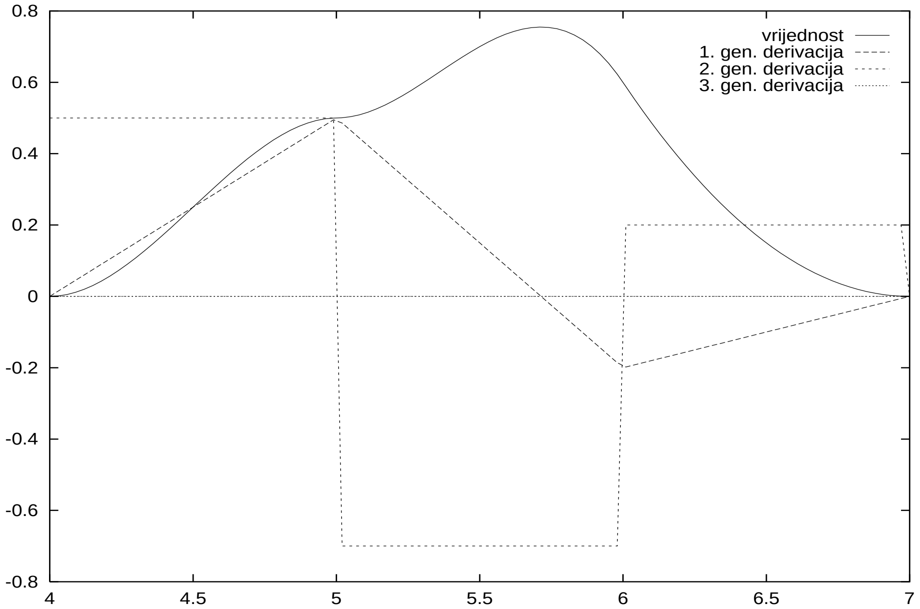
Slika 4.7: B-splajn T_4^4 i njegove obične derivacije



Slika 4.8: B-splajn T_4^4 i njegove generalizirane derivacije



Slika 4.9: B-splajn T_4^3 i njegove obične derivacije



Slika 4.10: B-splajn T_4^3 i njegove generalizirane derivacije

Dodatak A

Životopis

Rodila sam se 8.7.1973. u Zagrebu, gdje sam završila i osnovnu školu. Svoje školovanje dalje sam nastavila u Matematičko–informatičko obrazovnom centru u Zagrebu, u kojem sam 1992. godine maturirala. Iste godine upisala sam studij za inžinjera matematike na Matematičkom odjelu Prirodoslovno–matematičkog fakulteta u Zagrebu, na kojemu u trećoj godini studija biram smjer Primjenjene matematike. U listopadu 1997. uspješno sam diplomirala na temu "Morseova teorija", i upisala poslijediplomski studij matematike. Od veljače 1998. radim kao znanstveni novak na Matematičkom odjelu, i obavljam posao mlađeg asistenta. Sudjelovala sam na Konferenciji "Applied Mathematics and Computation" 1999. godine u Dubrovniku, te objavila dva rada [5] i [14].

Dodatak B

Sažetak

U ovom magisteriju dvije su glavne ideje usko povezane: polarne forme i ubacivanje čvorova splajnova. Polarne forme daju posve novu, pojednostavljenu perspektivu na polinomne splajnove, a između ostalog i na ubacivanje čvorova. Samo ubacivanje čvorova ima dosta važnih primjena, od kojih je pažnja posvečena dvijema: aproksimaciji reduciranjem čvorova, i stabilnom računanju q-splajnova.

U prvom poglavlju dan je pregled već poznatih teorema, ali uz posve nove dokaze bazirane na polarnim formama. Zahvaljujući njihovoj geometrijskoj prirodi, ti dokazi su kraći od onih postojećih i mogu dati bolji uvid u osnovnu teoriju B-splajnova. Prvo su dani definicija i osnovna svojstva polarnih formi, te de Casteljau-ov algoritam za njihovo računanje. Zatim su, pomoću njih, na novi način izražene de Boor-ove točke B-splajn krivulje. Odatle se izvodi Curry-Schoenberg-ov teorem i de Boor-ov algoritam. Na kraju je proučavano ubacivanje čvorova iz perspektive polarnih formi, i dati Boehm-ov i Oslo algoritam (v. [1]) kao primjere. Kao dodatak, ukratko je prodiskutirano svojstvo smanjenja varijacije B-splajnova i de Boor-Fix-ova forma dualnog funkcionala.

U drugom poglavlju prikazana je strategija reduciranja broja čvorova danog splajna bez perturbiranja splajna za više od zadane tolerancije. Takva redukcija znači da dani splajn iz prostora, recimo, $\mathcal{S}$ aproksimiramo sa splajnom iz potprostora od $\mathcal{S}$. Drugim rječima, broj stupnjeva slobode se smanjiuje, pa postižemo redukciju podataka. Strategija izbacivanja čvorova za skalarne funkcije jedne varijable opisana je detaljno, nakon čega je metoda generalizirana na parametarske B-splajn krivulje. Dana je, također, generalna metoda bazirana na izbacivanju čvorova, koja računa splajn aproksi-

maciju danih podataka, sa greškom manjom od dane tolerancije u svakoj točki podataka.

U trećem poglavlju ponuđeno je nekoliko stabilnih algoritama za računanje posebne klase nedavno otkrivenih polinomno-Čebiševljevih splajnova, tako zvanih q-splajnova. Nakon što je q-B-splajn prikazan na dva načina kao linearna kombinacija odgovarajućih polinomnih B-splajnova, izvodi se njegova matrica za ubacivanje jednog čvora, te na kraju su dana dva prilično jednostavna i satabilna algoritma za računanje q-splajna bazirana na ubacivanju čvorova i de Boor-ovom algoritmu.

Na kraju, u četvrtom poglavlju, izvedeni su programski kodovi, pisani u Fortranu 90, i dana je lista rutina potrebnih za implementaciju algoritama razrađenih u trećrm poglavlju.

Dodatak C

Summary

Polar Forms of Splines and Knot Insertion Algorithms

In this master thesis two main ideas are closely related: polar forms and knot insertion for splines. The polar forms give a completely new, simplified view of polynomial splines, which also applies to the knot insertion. The knot insertion itself has a number of quite important applications, but our main concern was with two questions, an algorithm for knot removal, which is approximate, and a knot insertion base algorithm for the stable calculation with q-splines.

In Chapter 1 we give an overview of already known theorems, but with new proofs based on polar forms. Due to their geometric nature, this proofs are shorter, and give better insight into the basic theory of B-splines. First, we give a definition and describe basic characteristics of polar forms, then de Casteljau algorithm for their evaluation. Polar forms then enable expression of de Boor points in a new way. Therefore we deduce the Curry-Schoenberg theorem and de Boor algorithm. At the end, we examine the knot insertion in perspective of polar forms, with Boehm and Oslo algorithms as examples. The variation diminishing property for B-splines and the de Boor-Fix form of the dual functionals are also discussed.

In Chapter 2 we accomplish a strategy for reducing the number of knots for a given spline without perturbing the spline more than a given tolerance.

Such a reduction means that we approximate the given spline in a space $\mathcal{S}$ by a spline in a subspace of $\mathcal{S}$. In other words, the number of degrees of freedom is reduced and we obtain data reduction. We describe the knot-removal for scalar functions of one variable in detail, and then generalize the method to the parametric B-spline curves. This naturally leads to the general method, based on the knot-removal, which calculates a spline approximation of given data, with an error less than the given tolerance in each data point.

In Chapter 3 we exploit a few stable algorithms for a special class of recently discovered polynomial-Chebyshev spline, the so called q-splines. Upon representing q-B-spline in two ways as a linear combination of adequate polynomial B-splines, we find the knot insertion matrix for inserting just one knot, and subsequently develop two very simple and stable knot insertion based algorithms for calculating with q-splines. One of them is an extension of the well known de Boor algorithm for polynomial splines.

Finally, in Chapter 4 we discuss procedural elements of programs written in Fortran 90, and give the full listing of all the routines needed to implement the algorithms constructed in the Chapter 3.

Bibliografija

[1] P. J. Barry and R. N. Goldman: *Algorithms for Progressive Curves: Extending B-Spline and Blossoming Techniques to the Monomial, Power, and Newton Dual Bases*, in Knot Insertion and Deletion Algorithms for B-Spline Curves and Surfaces, R. N. Goldman and T. Lyche ed., SIAM, 11-63 (1993)

[2] P. J. Barry and R. N. Goldman: *Knot Insertion Algorithms*, in Knot Insertion and Deletion Algorithms for B-Spline Curves and Surfaces, R. N. Goldman and T. Lyche ed., SIAM, 89-133 (1993)

[3] C. de Boor: *A Practical Guide to Splines*, Springer, New York (1978)

[4] C. de Boor: *B(asic)-Spline Basics*, `http://www.cs.wisc.edu/~deboor`

[5] T. Bosner and M. Rogina: *A Stable Algorithms for Calculating with Q-splines*, Proceedings of Computational and Applied Mathematics, M. Rogina, V. Hari, Z. Tutek, N. Limić ed., 99-104 (2001)

[6] E. Cohen, T. Lyche and R. Riesenfeld: *Discrete B-Splines and Subdivision Techniques in Computer-Aided Geometric Design and Computer Graphics*, Computer Graphics and Image Processing 14, 87-111 (1980)

[7] R. Kulkarni and P.-J. Laurent: *Q-splines*, Numer. Algorithms 1, 45-73 (1991)

[8] T. Lyche and K. Mørken: *Knot removal for parametric B-spline curves and surfaces*, CAGD 4, 217-230 (1987)

[9] T. Lyche and K. Mørken: *A Data-Reduction Strategy for Splines with Applications to the Approximation of Functions and Data*, IMA J. of Num. Anal. 8, 185-208 (1988)

[10] L. Ramshaw: *Blossoms are polar forms*, CAGD 6, 323-358 (1989)

[11] M. Rogina: *Basis of splines associated with some singular differential operators*, BIT 32, 496-505 (1992)

[12] M. Rogina: *Nove rekurentne relacije za Čebiševljeve spline funkcije i njihove primjene*, disertacija, PMF Zagreb, 39-40 (1994)

[13] M. Rogina: *On construction of fourth order Chebyshev splines*, Math. Commun. 4, 83-92 (1999)

[14] M. Rogina and T. Bosner: *On Calculating With Lower Order Chebyshev Splines*, Curves and Surfaces Design, P. J. Laurent, P. Sabloniere, L. L. Schumaker ed., Vanderbilt Univ. Press, Nashville, 343-353 (2000)

[15] L. L. Schumaker: *Spline Functions: Basic Theory*, New York, John Wiley & Sons (1981)

[16] H. P. Seidel: *A new multiaffine approach to B-splines*, CAGD 6, 23-32 (1989)

[17] G. A. Watson: *Approximation Theory and Numrical Methods*, Chichester, John Wiley & Sons (1980)