# Iracionalnost vrijednosti Riemannove zeta funkcije[†]

Tomislav Pejković

18.3.2009.

## Sadržaj



# 1 Uvod

Za Riemannovu zeta funkciju $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ ($\operatorname{Re} s > 1$) dobro je poznato da za paran prirodan broj poprima vrijednost koja je iracionalan i štoviše transcendentan broj. To je posljedica činjenice da je $\pi$ transcendentan broj (v. [Li 82] ili [La 02, app. 1]) i sljedeće ne posebno teške propozicije.

**Propozicija 1.** *Vrijedi*

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} B_{2k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

*gdje su $B_m$ racionalni brojevi za sve $m \in \mathbb{N}$.*

*Dokaz.* [Po 79, Pa 95] Pokazat ćemo da su $B_m$ takozvani Bernoullijevi brojevi koji su definirani sljedećom funkcijom izvodnicom:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} z^m.$$

[†]Predavanje održano na Seminaru za teoriju brojeva i algebru.

Primjetimo da je funkcija $\dfrac{z}{e^z-1}+\dfrac{1}{2}z$ parna i zato je $B_1=-\frac{1}{2}$, a svi ostali Bernoullijevi brojevi s neparnim indeksom su jednaki 0. Izravno iz definicije dobivamo rekurziju

$$\binom{n+1}{0}B_0+\binom{n+1}{1}B_1+\cdots+\binom{n+1}{n}B_n=0,\ n\geq 2, \qquad B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2}$$

iz čega je jasno da su svi Bernoullijevi brojevi racionalni.

S druge strane, Hadamardov teorem faktorizacije (v. npr. [Ši 06, §0.10]) daje

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z^2}{n^2}\Big),$$

pa logaritamskim deriviranjem slijedi

$$\frac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}=\pi\operatorname{ctg}\pi z=\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2z}{n^2-z^2}\Big)$$

i nakon množenja sa $z$, razvoja u red oko 0 te zamjene poretka sumacije, dobivamo

$$\pi z\operatorname{ctg}\pi z=1-2\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}\Big)z^{2m}.$$

Ali, iz definicije kotangensa je

$$\pi z\operatorname{ctg}\pi z=\pi iz\frac{e^{\pi iz}+e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz}-e^{-\pi iz}}=\frac{2\pi iz}{e^{2\pi iz}-1}+\pi iz=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}B_{2m}z^{2m},$$

pa usporedbom koeficijenata u prvom i drugom razvoju dobivamo tvrdnju propozicije. $\square$

O aritmetičkim svojstvima brojeva $\zeta(2k+1)$ zna se puno manje. Hipoteza je da su brojevi

$$\pi,\ \zeta(3),\ \zeta(5),\ \zeta(7),\ldots$$

algebarski nezavisni nad $\mathbb{Q}$. Iz toga bi slijedilo da su svi $\zeta(2k+1)$ transcendenti, pa i iracionalni, te da su linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$ (v. [Fi 04]).

Vrlo malo rezultata u smjeru ove hipoteze su poznati. Prvi od njih oglasio je Apéry 1978. na Journées arithmétiques u Luminyju.

**Teorem 2** ([Ap 79])**.** *Broj $\zeta(3)$ je iracionalan.*

Sam Apéry imao je vrlo šturo izlaganje (v. [Po 79]) i objavio je samo skicu dokaza. Vrlo netrivijalne detalje nadopunio je van der Porten [Po 79] uz pomoć Cohena i Zagiera. Narednih godina objavljeni su mnogi drugi dokazi Apéryjevog teorema i sinteza različitih točaka gledišta dana je u preglednom članku [Fi 04].

Idući veliki napredak dogodio se 2000. godine.

**Teorem 3** ([Ri 00, BR 01])**.** *Vektorski prostor razapet nad $\mathbb{Q}$ sa $1$, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\ldots$ je beskonačnodimenzionalan.*

Posljedica je ovog teorema to da postoji beskonačno $k$-ova za koje je $\zeta(2k+1)$ iracionalan broj. Vidjet ćemo kasnije i konkretne ograde za dimenziju vektorskog prostora razapetog nad $\mathbb{Q}$ sa $1$, $\zeta(3)$, $\ldots$, $\zeta(2n+1)$ koje je dokazao Rivoal [Ri 00], a poboljšao Zudilin [Zu 02].

Rivoal je dao i efektivne verzije svog rezultata; dokazao je da je od devet brojeva $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\ldots$, $\zeta(21)$ barem jedan iracionalan. Ovu tvrdnju poboljšao je Zudilin.

**Teorem 4** ([Zu 01d])**.** *Barem jedan od četiriju brojeva $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ je iracionalan.*

Unatoč ovim poboljšanjima, još uvijek se niti za jedan neparan prirodan broj $s \geq 5$ ne zna je li $\zeta(s)$ racionalan ili nije.

Naše izlaganje podijeljeno je u dva dijela. U prvome ćemo izložiti tri dokaza teorema 2 i to ponajprije Apéryjev slijedeći van der Poortenovo izlaganje [Po 79] kako je predstavljeno u [Fi 04]. Nakon toga prikazat ćemo Beukersov dokaz [Be 79] jer je elegantan i kratak. Konačno ćemo navesti i Nesterenkov dokaz jer se u njemu pojavljuju neki elementi bitni za efektivne rezultate Rivoala i Zudilina.

U drugom dijelu izlaganja detaljnije ćemo izložiti dokaz Rivoalovog teorema 3 prema [BR 01]. Teorem 4 nećemo dokazivati jer sadrži vrlo tehnička poboljšanja rezultata koje je Rivoal dobio profinivši svoje osnovne tehnike iz [Ri 00]. Sažetak dokaza pogledajte u [Fi 04, §3.2&3.3]

Zainteresirane upućujemo na [Fi 04] gdje je dan vrlo opširan i obuhvatan pregled rezultata vezanih uz iracionalnost vrijednosti zeta funkcije do 2003. godine. Autor pokušava dati što je moguće više unificiran pogled, posebno korištenjem hipergeometrijskih funkcija. Mi smo većinu takvih stvari izostavili prije svega zbog nevelike upućenosti, ali i zato što smo u relativno kratkom vremenu htjeli prikazati što je više moguće originalnih pristupa problemu.

Većinu navedenih članaka, najčešće u preprint obliku, moguće je skinuti sa poprilično potpune internet stranice W. Zudilina [Zu Int].

# 2 Apéryjev dokaz

Svi poznati dokazi iracionalnosti $\zeta(3)$ imaju istu strukturu [Fi 04]. Konstruiraju se za svaki $n \geq 0$ racionalni brojevi $u_n$ i $v_n$ sa sljedećim svojstvima:

(1) Linearna forma $I_n = u_n\zeta(3) - v_n$ zadovoljava

$$\limsup_{n\to\infty} |I_n|^{1/n} \leq (\sqrt{2}-1)^4 = 0.0294372\ldots$$

(2) Označimo li s $d_n$ najmanji zajednički višekratnik prirodnih brojeva od 1 do $n$, koeficijenti $u_n$ i $v_n$ zadovoljavaju

$$u_n \in \mathbb{Z} \quad \text{i} \quad 2d_n^3 v_n \in \mathbb{Z}.$$

(3) Za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$ je $I_n \neq 0$.

Zaključak slijedi neposredno. Pretpostavimo da je $\zeta(3)$ racionalan broj $p/q$. Za sve $n$ je tada $2qd_n^3 I_n$ cijeli broj. No, taj izraz teži prema 0 kad $n$ teži u beskonačnost.

Naime, teorem o prostim brojevima povlači[‡] da je $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(d_n)}{n} = 1$, a usto je i $(\sqrt{2}-1)^4 e^3 < 1$. Tako dolazimo u kontradikciji s tvrdnjom (3).

**Napomena.** Budući da je već i $(\sqrt{2}-1)^4 \cdot 3.23^3 < 1$, možemo teorem o prostim brojevima zamijeniti slabijom tvrdnjom $d_n < 3.23^n$ za $n$ dovoljno velik, koju je moguće pokazati korištenjem elementarnih argumenata sličnih Čebiševljevim (v. reference u [Fi 04, §1]).

U različitim dokazima Apéryjevog teorema dane su raznolike konstrukcije za $u_n$, $v_n$ i $I_n$. A posteriori se pokazuje da te konstrukcije daju iste nizove. Dokazi tih ekvivalencija najčešće su izravni. Početne vrijednosti od $u_n$ i $v_n$ su

$$(u_n)_{n\geq 0} = 1,\ 5,\ 73,\ 1445,\ 33001,\ 819005, \ldots$$
$$(v_n)_{n\geq 0} = 0,\ 6,\ \frac{351}{4},\ \frac{62531}{36},\ \frac{11424695}{288}, \ldots$$

Većina poznatih metoda u dokazivanju rezultata vezanih uz iracionalnost vrijednosti zeta funkcije vezane su uz polilogaritme, koje za sve prirodne $k$ definiramo s

$$\mathrm{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k},$$

za $|z| < 1$ ako je $k = 1$ i $|z| \leq 1$ ako je $k \geq 2$. Ideja je u tome da se konstruiraju linearne forme u polilogaritmima kojima su koeficijenti polinomi i da ih se zatim specijalizira u $z = 1$. Linearne forme u polilogaritmima $I_n(z)$ koje se koriste nisu uvijek iste, ali se u $z = 1$ podudaraju s Apéryjevim linearnim formama (detaljnije v. [Fi 04]).

Prijeđimo sada na sam Apéryjev dokaz.

**Definicija 5.** *Neka su $(u_n)_{n\geq 0}$ i $(v_n)_{n\geq 0}$ nizovi definirani rekurzivnom relacijom*

$$(n+1)^3 y_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5) y_n + n^3 y_{n-1} = 0 \tag{1}$$

*uz početne uvjete*

$$u_0 = 1,\ u_1 = 5, \quad v_0 = 0,\ v_1 = 6.$$

Iz rekurzije odmah slijedi da su $(u_n)$ i $(v_n)$ rastući nizovi s racionalnim članovima i da je $n!^3 u_n \in \mathbb{Z}$, te $n!^3 v_n \in \mathbb{Z}$. Štoviše, pokazuje se da $n!^3$ možemo zamijeniti s $d_n^3$.

Asimptotska svojstva nizova koji zadovoljavaju rekurziju (1) nije teško odrediti. Pridružena karakteristična jednadžba je $X^2 - 34X + 1$, ona ima dva jednostruka korijena, $(\sqrt{2}+1)^4$ i $(\sqrt{2}-1)^4$. Vektorski prostor rješenja od (1) je dimenzije dva i dopušta bazu koja se sastoji od nizova $(y_n^{(0)})_{n\geq 0}$ i $(y_n^{(1)})_{n\geq 0}$ za koje je[§]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|y_n^{(0)}|}{n} = \log\big((\sqrt{2}+1)^4\big) \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log|y_n^{(1)}|}{n} = \log\big((\sqrt{2}-1)^4\big).$$

[‡]Vidi [Ch 03, §5.1], uz napomenu da je $\log d_n = \sum_{k=1}^{n} \Lambda(k) = \psi(n)$.
Naglasimo da svuda koristimo log u značenju prirodnog logaritma, tj. logaritma s bazom $e$.

[§]Ovo je direktna posljedica 2. Perronovog teorema, v. [El 05, §8.2]

Niz $(y_n^{(1)})$ jedinstveno je određen (do na proporcionalnost) svojim asimptotskim ponašanjem; sva ostala rješenja od (1) ponašaju se kao $(y_n^{(0)})$. Budući da su $(u_n)$ i $(v_n)$ rastući nizovi, imamo

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} v_n^{1/n} = (\sqrt{2}+1)^4 = 33.9705627\ldots \tag{2}$$

Ovdje je zanimljivo promatrati $\Delta_n = \begin{vmatrix} v_n & v_{n-1} \\ u_n & u_{n-1} \end{vmatrix}$ za $n \geq 1$. Iz rekurzivne relacije je $\Delta_n = \frac{6}{n^3}$ za sve $n$, što znači da je $\dfrac{v_n}{u_n} - \dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}} = \dfrac{6}{n^3 u_n u_{n-1}}$. Odatle slijedi da je niz $(\frac{v_n}{u_n})$ strogo rastući i teži prema konačnom limesu $\ell$ za koji je

$$u_n\ell - v_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6u_n}{k^3 u_k u_{k-1}}.$$

Ovim je pokazano da je $(u_n\ell - v_n)$ jedno rješenje od (1) koje teži prema nuli kad $n$ ide u beskonačnost, pa je asimptotsko ponašanje dano s

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|u_n\ell - v_n|}{n} = \log\big((\sqrt{2}-1)^4\big).$$

Uz ovu definiciju od $u_n$ i $v_n$, nije očito kako pokazati da je $\ell = \zeta(3)$ i kako ograničiti nazivnike od $u_n$ i $v_n$ s $d_n^3$. U tu svrhu upotrijebit ćemo metodu korištenu u prvim detaljnim dokazima iracionalnosti od $\zeta(3)$ koji su se pojavili nakon Apéryjevog izlaganja (npr. [Po 79]).

**Definicija 6.** *Neka su nizovi $(\widetilde{u}_n)$ i $(\widetilde{v}_n)$ zadani sljedećim formulama*

$$\widetilde{u}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2,$$

$$\widetilde{v}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \Big( \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} \Big).$$

Jasno je da je $\widetilde{u}_n \in \mathbb{Z}$ i da $\dfrac{\widetilde{v}_n}{\widetilde{u}_n}$ teži prema $\zeta(3)$¶. Kako bismo dokazali $2d_n^3\widetilde{v}_n \in \mathbb{Z}$, dovoljno je za $1 \leq m \leq k \leq n$ pokazati da je

$$\frac{\binom{n+k}{k} d_n^3}{m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} = \frac{\binom{n+k}{k-m} d_n^3}{m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}} \tag{3}$$

cijeli broj.

¶Zbog $\binom{n+m}{m} = \binom{n+m}{n} \geq \binom{n+1}{n} > n$ je

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} \in \Big\langle (1-\frac{1}{n}) \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3}, (1+\frac{1}{n}) \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} \Big\rangle.$$

Neka je $p$ prost broj, $p$-adska valuacija $\mathrm{v}_p(n!)$ od $n!$ je $\sum_{i=1}^{\alpha} \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor$, gdje je $\alpha = \lfloor \frac{\log(n)}{\log(p)} \rfloor = \mathrm{v}_p(d_n)$. Imamo

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{n-m}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor \quad \text{za } 1 \le i \le \mathrm{v}_p(m) \text{ i} \\ \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor &\le \left\lfloor \frac{n-m}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor + 1 \quad \text{za } \mathrm{v}_p(m) < i \le \mathrm{v}_p(d_n). \end{aligned}$$

Iz toga zaključujemo

$$\mathrm{v}_p\left(\binom{n}{m}\right) \le \mathrm{v}_p(d_n) - \mathrm{v}_p(m) \quad \text{i} \quad \mathrm{v}_p\left(\binom{k}{m}\right) \le \mathrm{v}_p(d_k) - \mathrm{v}_p(m),$$

pa je $\dfrac{d_n^3}{m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}}$ cijeli broj, a isto vrijedi i za kvocijent (3).

Preostaje pokazati da nizovi $(\widetilde{u}_n)$ i $(\widetilde{v}_n)$ zadovoljavaju rekurziju (1). Izgleda da je nakon Apéryjevog predavanja to ostao najveći problem jer provjera uopće nije trivijalna. No, uskoro je i to riješeno (vidi [Po 79], a mi nastavljamo prema [Fi 04]).

Neka je $\lambda_{n,k} = \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$ za $k, n \in \mathbb{Z}$ i

$$\mathbf{A}_{n,k} = 4(2n+1)\big(k(2k+1) - (2n+1)^2\big)\lambda_{n,k},$$

uz uobičajene postavke, tj. $\lambda_{n,k} = 0$ za $k < 0$ i $k > n$. Tada je

$$\mathbf{A}_{n,k} - \mathbf{A}_{n,k-1} = (n+1)^3\lambda_{n+1,k} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)\lambda_{n,k} + n^3\lambda_{n-1,k}.$$

Sumiramo li ovo po $k$ od 0 do $n-1$, zaključujemo da niz $(\widetilde{u}_n)$ zadovoljava rekurziju (1). Za niz $(\widetilde{v}_n)$, isto dobivamo korištenjem dvostrukog niza[‖]

$$\mathbf{B}_{n,k} = \mathbf{A}_{n,k}\Big(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}\Big) + \frac{5(2n+1)k(-1)^{k-1}}{n(n+1)}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}.$$

Ovim smo dokazali da je $\widetilde{u}_n = u_n$ i $\widetilde{v}_n = v_n$ za sve $n \ge 0$. Zajedno s prije dokazanim tvrdnjama, dokaz iracionalnosti $\zeta(3)$ je dovršen.

**Napomena.** Asimptotsku analizu nizova $(u_n)$ i $(v_n)$ mogli smo za sam dokaz Apéryjevog teorema obaviti i grublje, bez pozivanja na Perronov teorem, ali ovako dobivamo preciznije informacije.

U prethodnom dokazu je središnju ulogu odigrao dvostruki niz

$$c_{n,k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}$$

[‖] Označimo li izraz u prvoj zagradi s $c_{n,k}$ i $P(x) := 34x^3 + 51x^2 + 27x + 5$, imamo

$$\begin{aligned} &(n+1)^3\lambda_{n+1,k}c_{n+1,k} - P(n)\lambda_{n,k}c_{n,k} + n^3\lambda_{n-1,k}c_{n-1,k} = \\ &\qquad = (\mathbf{A}_{n,k} - \mathbf{A}_{n,k-1})c_{n,k} + (n+1)^3\lambda_{n+1,k}(c_{n+1,k} - c_{n,k}) - n^3\lambda_{n-1,k}(c_{n,k} - c_{n-1,k}) \\ &\qquad = [\text{malo računa}] = \mathbf{B}_{n,k} - \mathbf{B}_{n,k-1}. \end{aligned}$$

Sada je dovoljno primjetiti da je $\widetilde{v}_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}c_{n,k}$.

koji je definiran za $0 \leq k \leq n$. On teži prema $\zeta(3)$ kad $n$ teži u beskonačnost i to uniformno po $k$. Budući da je $c_{n,n} - c_{n-1,n-1} = \frac{5}{2}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}$ i $\lim_{n\to\infty} c_{n,n} = \zeta(3)$, imamo

$$\zeta(3) = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}.$$

Ovaj red se ne koristi u dokazivanju iracionalnosti $\zeta(3)$, ali je vrlo zanimljiv jer brojevi $c_{n,k}$ leže u srži eksplicitnih formula kojima su definirani $\widetilde{u}_n$ i $\widetilde{v}_n$. Zato su mnogi autori istraživali generalizacije prije spomenutog reda, primjerice

$$\zeta(5) = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^3\binom{2n}{n}}\Big(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j^2} - \frac{4}{5n^2}\Big).$$

Nažalost, te generalizacije nisu dovele do novih rezultata o iracionalnosti jer je porast nazivnika prebrz u odnosu na konvergenciju.

# 3 Beukersov dokaz

U Beukersovom dokazu [Be 79] iracionalnosti $\zeta(3)$ koriste se dvostruki i trostruki integrali čiji izgled je motiviran Apéryjevim formulama. Na taj način Beukers elegantno izbjegava rekurzije i eksplicitne identitete. Kao i Apéryjev dokaz, Beukersov je postupak primjenjiv i na broj $\zeta(2)$, za koji naravno znamo da je transcendentan jer je jednak $\pi^2/6$. Većina integrala koji se pojavljuju u nastavku su nepravi. Upotreba ovih integrala može se strogo opravdati zamijenimo li $\displaystyle\int_0^1$ s $\displaystyle\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}$ i pustimo da $\varepsilon$ ide u 0.

**Lema 7.** *Neka su $r$ i $s$ nenegativni cijeli brojevi.*
*Ako je $r > s$, onda je*

$$\int_0^1\int_0^1 -\frac{\log xy}{1-xy}x^r y^s \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

*racionalan broj čiji nazivnik dijeli $d_r^3$.*
*Ako je $r = s$, onda vrijedi*

$$\int_0^1\int_0^1 -\frac{\log xy}{1-xy}x^r y^r \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\Big(\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \cdots - \frac{1}{r^3}\Big).$$

*(Za $r = 0$ suma $1^{-3} + \cdots + r^{-3}$ iščezava.)*

*Dokaz.* Neka je $\sigma$ proizvoljan nenegativan broj. Promotrimo integral

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{4}$$

Razvijemo li $(1-xy)^{-1}$ u geometrijski red i izvršimo dvostruku integraciju, dobivamo

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+\sigma+1)(k+s+\sigma+1)}. \tag{5}$$

Neka je $r > s$. Tada prethodnu sumu možemo zapisati ovako

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r-s}\Big(\frac{1}{k+s+\sigma+1} - \frac{1}{k+r+\sigma+1}\Big) = \frac{1}{r-s}\Big(\frac{1}{s+1+\sigma} + \cdots + \frac{1}{r+\sigma}\Big). \quad (6)$$

Deriviranjem po $\sigma$ i uvrštavanjem $\sigma = 0$, integral (4) se pretvara u

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^r y^s \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

a suma (6) postaje

$$-\frac{1}{r-s}\Big(\frac{1}{(s+1)^2} + \cdots + \frac{1}{r^2}\Big),$$

pa prva tvrdnja leme očito vrijedi.

Neka je sad $r = s$. Prema (4) i (5) imamo

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{r+\sigma}}{1-xy} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)^2}.$$

Deriviramo li po $\sigma$ i uvrstimo $\sigma = 0$, dobivamo

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^r y^r \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{(k+r+1)^3},$$

što dokazuje i drugu tvrdnju leme. $\square$

Sada dokazujemo Apéryjev teorem.

*Dokaz teorema 2.* Promotrimo integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} P_n(x) P_n(y) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad (7)$$

gdje je $P_n(x) = \frac{1}{n!}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^n \big(x^n(1-x)^n\big)$**. Iz leme 7 slijedi da je integral (7) jednak

$$\frac{a_n + b_n \zeta(3)}{d_n^3}$$

za neke $a_n \in \mathbb{Z}$, $b_n \in \mathbb{Z}$. Budući je

$$\frac{-\log xy}{1-xy} = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z} \,\mathrm{d}z,$$

vidimo da integral (7) možemo zapisati kao

$$\int \frac{P_n(x) P_n(y)}{1-(1-xy)z} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

**Ako sa $L_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^n (x^2-1)^n$ označimo $n$-ti Legendreov polinom, onda je $P_n(x) = L_n(2x-1)/(-2)^n$.

gdje $\int$ označava trostruku integraciju. Nakon što $n$ puta parcijalno integriramo po $x$, naš integral postaje

$$\int \frac{(xyz)^n(1-x)^n P_n(y)}{\bigl(1-(1-xy)z\bigr)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Uz zamjenu $w = \dfrac{1-z}{1-(1-xy)z}$, tj.

$$z = \frac{1-w}{1-(1-xy)w}, \quad \mathrm{d}z = \frac{-xy\,\mathrm{d}w}{\bigl(1-(1-xy)w\bigr)^2}, \quad 1-(1-xy)z = \frac{xy}{1-(1-xy)w},$$

dobivamo

$$(-1)^n \int (1-x)^n(1-w)^n \frac{P_n(y)}{1-(1-xy)w}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}w.$$

Nakon što $n$ puta parcijalno integriramo po $y$, dobivamo

$$\int \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w^n(1-w)^n}{\bigl(1-(1-xy)w\bigr)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}w. \tag{8}$$

Izravno se provjerava da

$$x(1-x)y(1-y)w(1-w)\bigl(1-(1-xy)w\bigr)^{-1}$$

može postići maksimum samo za $x = y$, a zatim da je

$$\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w} \le (\sqrt{2}-1)^4 \quad \text{za sve } 0 \le x, y, w \le 1.^{\dagger\dagger}$$

Stoga je integral (7) ograđen odozgo s

$$(\sqrt{2}-1)^{4n} \int \frac{1}{1-(1-xy)w}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}w = (\sqrt{2}-1)^{4n} \int_0^1\int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= 2(\sqrt{2}-1)^{4n}\zeta(3).$$

Kako integral (8) nije nula, imamo

$$0 < |a_n + b_n\zeta(3)| d_n^{-3} < 2\zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n},$$

pa je

$$0 < |a_n + b_n\zeta(3)| < 2\zeta(3) d_n^3(\sqrt{2}-1)^{4n} < 2\zeta(3)27^n(\sqrt{2}-1)^{4n} < \Bigl(\frac{4}{5}\Bigr)^n$$

za dovoljno velike $n$, što implicira iracionalnost od $\zeta(3)$ (koristili smo ogradu $d_n < 3^n$ za $n$ dovoljno velik, v. str. 4). □

**Napomena.** Prema [Po 79, Ne 96] je integral (7) jednak

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} P_n(x)P_n(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\bigl(u_n\zeta(3) - v_n\bigr),$$

gdje su $(u_n)$ i $(v_n)$ nizovi iz Apéryjevog dokaza.

---

†† Primjenom nejednakosti između geometrijske i aritmetičke sredine dobivamo

$$x(1-x)y(1-y) = (1-y)x \cdot (1-x)y \le \Bigl(\frac{1-y+x}{2}\Bigr)^2\Bigl(\frac{1-x+y}{2}\Bigr)^2 = \frac{1}{16}\bigl(1-(x-y)^2\bigr),$$

pa vidimo da uz fiksirani $xy$ maksimum lijeve strane izraza koji ograđujemo postižemo za $x = y$. Uvrstimo to i pogledamo kada je $\frac{\partial}{\partial w}$lijeve strane $= 0$. Dobivamo da je za $w = \frac{1}{1+x}$ i tada lijeva strana našeg izraza postaje $\dfrac{x^3(1-x)^2}{(1+x)^2}$. Sada još samo potražimo maksimum.

# 4 Nesterenkov dokaz

Nesterenko je u članku [Ne 96] uz sintezu rezultata i metoda poznatih do 1996. godine dao i novi dokaz Apéryjevog teorema.

Neka je $n$ prirodan broj za koji pretpostavljamo da je dovoljno velik. Sljedeća racionalna funkcija ima važnu ulogu u dokazu:

$$R(z) = \frac{(z-1)^2 \cdots (z-n)^2}{z^2(z+1)^2 \cdots (z+n)^2}.$$

**Lema 8.** *Vrijedi sljedeća relacija*

$$I = \sum_{\nu=1}^{\infty} R'(\nu) = A_n \zeta(3) + B_n, \tag{9}$$

*gdje je* $A_n \in \mathbb{Z}$ *i* $B_n \in \mathbb{Q}$. *Štoviše, ako stavimo* $D_n = \prod_{p \le n} p^{\lfloor \log 2n / \log p \rfloor}$, *onda je* $D_n^3 B_n \in \mathbb{Z}$.

**Napomena.** Primjetimo da je $d_n | D_n$ i $D_n | d_{2n}$. Za svaki $\varepsilon > 0$, za sve $n$ dovoljno velike (tj. veće od nekog $n_0(\varepsilon)$) vrijedi

$$\begin{aligned} \log D_n &= \sum_{p \le n} \left\lfloor \frac{\log 2n}{\log p} \right\rfloor \log p \le \sum_{p \le n} \log 2n = \log 2n \sum_{p \le n} 1 \\ &< \log 2n \cdot \frac{n}{\log n} \Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big) = \Big(1 + \frac{\log 2}{\log n}\Big)\Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big) n < (1+\varepsilon) n. \end{aligned}$$

*Dokaz leme.* Zapišimo funkciju $R(z)$ kao sumu parcijalnih razlomaka

$$R(z) = \sum_{k=0}^{n} \Big( \frac{B_{k2}}{(z+k)^2} + \frac{B_{k1}}{z+k} \Big),$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} B_{k2} &= (z+k)^2 R(z) \Big|_{z=-k} = \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2, \\ B_{k1} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \big( (z+k)^2 R(z) \big) \Big|_{z=-k} = -2 B_{k2} \Big( \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k+j} - \sum_{\substack{j=0 \\ j \ne k}}^{n} \frac{1}{k-j} \Big). \end{aligned}$$

Iz ovih izraza slijedi da je $B_{k2} \in \mathbb{Z}$ i $D_n B_{k1} \in \mathbb{Z}$[‡‡]. Kako funkcija $R(z)$ ima nultočku drugog reda u točki $z = \infty$ (drugim riječima $R(1/z)$ ima takvu nultočku u 0), imamo (v. npr. [Ši 06, §0.6])

$$\sum_{k=0}^{n} B_{k1} = -\operatorname{Res}_{z=\infty} R(z) = 0. \tag{10}$$

Koristeći (10), dobivamo

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} R'(\nu) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big( -2 \frac{B_{k2}}{(\nu+k)^3} - \frac{B_{k1}}{(\nu+k)^2} \Big) = A_n \zeta(3) + B_n,$$

[‡‡]Za proste brojeve $p \in \{n+1, \ldots, n+k\}$ ne moramo brinuti jer takvi faktori dijele $\binom{n+k}{k}$, pa i $B_{k2}$.

gdje je

$$A_n = -2\sum_{k=0}^{n} B_{k2}, \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{k}(2B_{k2}r^{-3} + B_{k1}r^{-2}).$$

Odavdje je jasno da je $A_n \in \mathbb{Z}$ i $D_n^3 B_n \in \mathbb{Z}$, pa je lema dokazana. $\square$

**Lema 9.** *Za sumu reda* (9) *vrijedi*

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_L \Big(\frac{\pi}{\sin \pi z}\Big)^2 R(z)\,\mathrm{d}z, \tag{11}$$

*gdje je $L$ vertikalni pravac $\operatorname{Re} z = C$, $0 < C < n+1$, orijentiran odozgo prema dolje.*

*Dokaz.* Neka je $T = N + 1/2$, gdje je $N$ dovoljno velik cijeli broj ($N > n$). Budući da je

$$|\sin(a+bi)|^2 = \frac{1}{2}(e^{2b} + e^{-2b} - \cos^2 a + \sin^2 a),$$

funkcija $(\pi/\sin \pi z)^2$ je ograničena na rubu kvadrata s vrhovima u točkama $(\pm T, \pm T)$; a vrijedi i $R(z) = \mathcal{O}(T^{-2})$. Iskoristivši teorem o reziduumima zaključujemo da je integral naveden u (11) jednak zbroju reziduuma integranda u točkama $n+1$, $n+2,\ldots$ (zatvorena krivulja koju smo gledali je rub pravokutnika sa vrhovima u $(C,T)$, $(C,-T)$, $(T,-T)$, $(T,T)$).

U okolini točke $z = k$ ($k \in \mathbb{N}$, $k > n$) vrijede sljedeće relacije

$$\Big(\frac{\pi}{\sin \pi z}\Big)^2 = \frac{1}{(z-k)^2} + \mathcal{O}(1), \qquad R(z) = R(k) + R'(k)(z-k) + \mathcal{O}\big((z-k)^2\big),$$

pa je

$$\operatorname{Res}_{z=k}\left(\Big(\frac{\pi}{\sin \pi z}\Big)^2 R(z)\right) = R'(k).$$

S obzirom da je $R'(k) = 0$ za $k = 1, 2, \ldots, n$, dobivamo traženi izraz za sumu reda $I$. $\square$

**Lema 10.** *Vrijedi sljedeća asimptotska formula kad $n \to \infty$*

$$I = -\frac{\pi^{3/2}2^{3/4}}{n^{3/2}}(\sqrt{2}-1)^{4n+2}\big(1 + o(1)\big).$$

*Dokaz.* Budući da je (v. npr. [Pa 95, App.4])

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \quad \text{i} \quad \Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t},$$

imamo

$$\Big(\frac{\pi}{\sin \pi z}\Big)^2 R(z) = \Big(\frac{\Gamma(n+1-z)\Gamma(z)^2}{\Gamma(n+1+z)}\Big)^2.$$

Izaberimo sad $C = (n+1)/\sqrt{2}$ (točka $C$ leži na putu integracije $L$) i u integralu (11) napravimo zamjenu varijabli $z = (n+1)t$.

Na putu integracije $L$ veličine $\operatorname{Re}(n+1+z)$, $\operatorname{Re}(n+1-z)$, $\operatorname{Re}(z)$ jednake su umnošku $n$ s nekim pozitivnim konstantama, pa za

$$F(z) := \Big(\frac{\Gamma(n+1-z)\Gamma(z)^2}{\Gamma(n+1+z)}\Big)^2,$$

koristeći izraz (to je Stirlingova formula, v. [Pa 95, App.4])

$$\log \Gamma(z) = \Big(z - \frac{1}{2}\Big) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + r(z), \qquad |r(z)| \le K |\operatorname{Re} z|^{-1},$$

gdje je $K$ apsolutna konstanta, dobivamo da na putu integracije vrijedi

$$\begin{aligned}\log F(z) =& (2n+1-2z)\log(n+1-z) - 2(n+1-z) + (4z-2)\log z - 4z \\ & - (2n+1+2z)\log(n+1+z) + (2n+2+2z) + 2\log 2\pi + \mathcal{O}(n^{-1}) \\ =& \log \frac{1+t}{(1-t)t^2} + 2(n+1)f(t) - 2\log(n+1) + 2\log 2\pi + \mathcal{O}(n^{-1}).\end{aligned}$$

Ovdje je konstanta u $\mathcal{O}(\cdot)$ apsolutna i

$$f(t) = (1-t)\log(1-t) + 2t\log t - (1+t)\log(1+t).$$

Stoga je

$$I = -\frac{2\pi}{ni} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{2(n+1)f(t)} \frac{1+t}{(1-t)t^2} \big(1 + \mathcal{O}(n^{-1})\big)\, \mathrm{d}t,$$

gdje je $c = 1/\sqrt{2}$, a konstanta u $\mathcal{O}(\cdot)$ je apsolutna.

Točka $t = 1/\sqrt{2}$ je jedinstvena točka na putu integracije u kojoj funkcija $\operatorname{Re} f(t)$ postiže maksimum. Zaista, ako stavimo $g(u) = \operatorname{Re} f(c+iu)$, onda je $g'(u) = -\operatorname{Im} f'(t) = \operatorname{Im}\big(\log(t^{-2}-1)\big)$, pa $g'(u)$ iščezava samo za $u = 0$. Direktnim računom vidimo da je $f'(1/\sqrt{2}) = 0$, pa je u okolini točke $t = 1/\sqrt{2}$

$$f(t) = f(c) + 2\sqrt{2}(t-c)^2 + \mathcal{O}\big((t-c)^3\big).$$

Dakle, na putu $t = c + iu$, $-\infty < u < +\infty$ u okolini točke $c$, imamo

$$f(t) = f(c) - 2\sqrt{2}u^2 + \mathcal{O}(u^3).$$

Primjenom Laplaceove metode (v. napomenu nakon dokaza) dobivamo

$$I = -2\pi n^{-1} \cdot 2(\sqrt{2}+1)^2(\sqrt{2}-1)^{4n+4}\Big(\frac{2\pi}{n+1}(8\sqrt{2})^{-1}\Big)^{1/2}\big(1 + \mathcal{O}(n^{-1})\big),$$

čime je i ova lema dokazana. □

**Napomena** (Laplaceova metoda)**.** Nećemo navoditi dokaze vezane uz ovu metodu koja se engleski zove i *steepest descent method* ili *saddle-point approximation.* Detaljan prikaz može se naći u većini knjiga o asimptotskoj analizi, npr. [Mu 84]. Navodimo najprije teorem iz [Ri 03] koji je dovoljan za naše potrebe u prethodnom i budućim dokazima.

*Neka su $g$ i $w$ dvije analitičke funkcije definirane na otvorenom, jednostavno povezanom podskupu $\mathcal{D}$ kompleksne ravnine. Pretpostavimo da postoji $z_0 \in \mathcal{D}$ takav da je $w'(z_0) = 0$ i $w''(z_0) = |w''(z_0)|e^{i\alpha_0} \neq 0$. Ako je $L$ put koji leži u $\mathcal{D}$ duž kojega $w(z)$ postiže globalni maksimum u $z_0$, onda vrijedi*

$$\int_L g(z)e^{nw(z)}\,\mathrm{d}z \sim g(z_0)\sqrt{\frac{2\pi}{n|w''(z_0)|}}\, e^{i(\pm\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_0}{2})} e^{nw(z_0)} \quad (n \to +\infty)$$

*gdje izbor predznaka ovisi o orijentaciji od $L$.*

Osnovna ideja Laplaceove metode sastoji se u sljedećem (navodimo za slučaj realne funkcije realne varijable). Pretpostavimo da funkcija $f$ ima globalni maksimum u $x_0$. Tada je vrijednost $f(x_0)$ veća od drugi vrijednosti $f(x)$. Ako ovu funkciju pomnožimo s velikim brojem $M$, jaz između $Mf(x_0)$ i $Mf(x)$ samo će se povećati, a rast će eksponencijalno za funkciju $e^{Mf(x)}$. Zato će bitan doprinos integralu ove funkcije dolaziti samo od točaka u okolini $x_0$, a to onda možemo procijeniti.

Pokažimo ovo na jednom primjeru. Pretpostavimo da je točka $x_0$ u kojoj $f$ postiže globalni maksimum u unutrašnjosti intervala po kojem integriramo. Pretpostavimo također da vrijednosti $f(x)$ ne mogu biti vrlo blizu $f(x_0)$, osim ako je $x$ blizu $x_0$. Uzmimo i da je $f''(x_0) < 0$. Prema Taylorovom teoremu, možemo razviti $f$ oko $x_0$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \mathcal{O}\big((x - x_0)^3\big).$$

Budući da $f$ ima globalni maksimum u $x_0$ i $x_0$ nije rubna točka intervala, ona mora biti stacionarna točka, tj. derivacija od $f$ iščezava u $x_0$. Zato funkciju $f$ možemo aproksimirati do kvadratnog reda

$$f(x) \approx f(x_0) - \frac{1}{2}|f''(x_0)|(x - x_0)^2$$

za $x$ blizu $x_0$ (sjetimo se da je druga derivacija negativna u globalnom maksimumu). Naše pretpostavke osiguravaju preciznost aproksimacije

$$\int_a^b e^{Mf(x)}\,\mathrm{d}x \approx e^{Mf(x_0)} \int e^{-M|f''(x_0)|(x-x_0)^2/2}\,\mathrm{d}x$$

pri čemu integriramo u okolini od $x_0$. Posljednji integral je Gaussovog tipa ako granice integracije stavimo u $-\infty$ i $+\infty$ (a to možemo pretpostaviti jer eksponencijalna funkcija opada vrlo brzo kad se udaljavamo od $x_0$), pa ga možemo izračunati (sjetimo se da je $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$). Dobivamo

$$\int_a^b e^{Mf(x)}\,\mathrm{d}x \approx \sqrt{\frac{2\pi}{M|f''(x_0)|}}\,e^{Mf(x_0)} \quad \text{kad} \quad M \to \infty.$$

Vratimo se sada Nesterenkovom dokazu kojemu smo na samom kraju. Iz lema 8 i 10 slijedi da je $\zeta(3)$ iracionalan. Zaista, ako je $\zeta(3) = b/a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, onda je $2aD_n^3 \cdot I$ cijeli broj različit od nule. Stoga je

$$1 \le 2aD_n^3 \cdot |I| = \mathcal{O}\big(D_n^3(\sqrt{2} - 1)^{4n}\big).$$

Prethodna nejednakost je nemoguća jer za svaki $\varepsilon > 0$ i svaki dovoljno velik $n$ vrijedi ocjena $D_n < e^{(1+\varepsilon)n}$, a usto je $e^3(\sqrt{2} - 1)^4 < 1$. Ova kontradikcija pokazuje da $\zeta(3)$ ne može biti racionalan broj.

# 5 Rivoalovi rezultati i dokaz

Rivoalove rezultate koje je objavio u [Ri 00], donosimo prema [BR 01] gdje su dani i detaljni dokazi korištenih tvrdnji. Iako smo već najavili u teoremu 3 da se radi o postojanju beskonačnog skupa vrijednosti funkcije $\zeta$ u neparnim prirodnim brojevima koje su linearno nezavisne nad $\mathbb{Q}$, navedimo sada konkretne rezultate.

**Teorem 11.** *Neka je $a$ neparan prirodan broj $\geq 3$ i označimo s $\delta(a)$ dimenziju vektorskog prostora razapetog nad $\mathbb{Q}$ sa $1$, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\ldots$, $\zeta(a)$. Tada je*

$$\delta(a) \geq \frac{1}{3}\log(a).$$

*Štoviše, za svaki $\varepsilon > 0$, postoji prirodan broj $A(\varepsilon)$ takav da za $a > A(\varepsilon)$ vrijedi*

$$\delta(a) \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\log(2)}\log(a).$$

**Teorem 12.** *Postoji neparan $j \leq 169$ takav da su $1$, $\zeta(3)$ i $\zeta(j)$ linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$.*

Rivoala je u dokazu ovih teorema inspirirao Nikišinov rad vezan uz simultane aproksimacije polilogaritama $\mathrm{Li}_n(z)$ u njihovim racionalnim vrijednostima. Prisjetimo se da su te funkcije definirane razvojem u red za $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ sa

$$\mathrm{Li}_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)^n}.$$

Posebno, $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)/z$ divergira u 1, a za $n \geq 2$ je $\mathrm{Li}_n(1) = \zeta(n)$. Nikišinov pristup vodi k uvođenju redova oblika

$$N_{n,a,b}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-an-b+2)}{(k+1)^a(k+2)^a\cdots(k+n)^a(k+n+1)^b} z^{-k},$$

gdje su $a$, $b$ i $n$ prirodni brojevi, $b \leq a$ i $z$ je kompleksan broj modula $\geq 1$, $z \neq 1$. Ovi redovi daju Padéove aproksimacije tipa I polilogaritama, a specijalizacijom u $z = -1$ dobivaju se linearne kombinacije s racionalnim koeficijentima od vrijednosti $\zeta$ u parnim i neparnim brojevima i $\log(2)$. Nažalost, porast koeficijenata u ovisnosti o $a$ je prebrz za dobivanje netrivijalnih aritmetičkih rezultata u ovom slučaju.

Zato je Rivoal modificirao Nikišinov red na sljedeći način

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q_n(k)}{(k+1)^a\cdots(k+n+1)^a} z^{-k},$$

pri čemu je $q_n(k)$ polinom koji je, ako ga gledamo kao funkciju od $k+n/2+1$, parna funkcija. Parnost od $q_n$ osigurava da će se kod rastavljanja na parcijalne razlomke polinomi koji odgovaraju nazivnicima s parnom potencijom poništiti za $z = 1$, tako ćemo dobiti linearne kombinacije s racionalnim koeficijentima samo od vrijednosti $\zeta$ funkcije u neparnim brojevima. Druga Rivoalova ideja je da se parametrizira broj cjelobrojnih nultočaka od $q_n$ pomoću cijelog broja $r$ i tako postigne da porast koeficijenata linearnih kombinacija bude slabiji nego za Nikišinov red, ali u isto vrijeme čuvajući brzo smanjivanje same linearne kombinacije. U tu svrhu uvodimo red

$$S_{n,a,r}(z) = n!^{a-2r} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k\cdots(k-rn+1)\cdot(k+n+2)\cdots(k+(r+1)n+1)}{(k+1)^a(k+2)^a\cdots(k+n+1)^a} z^{-k},$$

gdje su $n$, $r$ i $a$ cijeli brojevi za koje vrijedi $1 \le r < a/2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Uvjeti na $a$ i $r$ osiguravaju da $S_{n,a,r}(z)$ konvergira za sve kompleksne $z$ modula $\ge 1$[§§]. Kako bismo pojednostavnili zapis, ovaj ćemo red pisati u obliku

$$S_n(z) = n!^{a-2r} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k - rn + 1)_{rn}(k + n + 2)_{rn}}{(k + 1)^a_{n+1}} z^{-k},$$

pri čemu je $(\alpha)_k$ Pochhammerov simbol

$$(\alpha)_0 = 1 \quad \text{i} \quad (\alpha)_k = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + k - 1) \text{ za } k = 1, 2, \ldots$$

Sada krećemo na dokazivanje pomoćnih tvrdnji vezanih uz ovaj red. U lemi 13 pokazat ćemo da nas red $S_n(1)$ snabdjeva linearnom kombinacijom s racionalnim koeficijentima u $\zeta$ od neparnih brojeva kad je $n$ paran. Lema 14 daje izraz u integralima sličan onome koji smo susreli kod Beukersa, a to nam omogućuje lakšu ocjenu za $\lim_{n\to+\infty} |S_n(1)|^{1/n}$ (lema 15). U nastavku slijedimo Nikišina kod dokazivanja lema 16 i 17 koje se tiču asimptotskih i aritmetičkih svojstava koeficijenata linearnih kombinacija. Nikišin je na kraju, kako bi dokazao da redovi $N_{n,a,b}(z)$ daju aproksimacije polilogaritama koje su linearno nezavisne, ocijenio jednu determinantu. Rivoal izbjegava ovu komplikaciju koristeći kriterij linearne nezavisnosti koji je dokazao Nesterenko [Ne 85].

## 5.1 Pomoćni rezultati

Označimo s $D_\lambda = \dfrac{1}{\lambda!} \dfrac{\mathrm{d}^\lambda}{\mathrm{d}t^\lambda}$ i

$$R_n(t) = n!^{a-2r} \frac{(t - rn + 1)_{rn}(t + n + 2)_{rn}}{(t + 1)^a_{n+1}},$$

pa je

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} R_n(k) z^{-k}.$$

Za $l \in \{1, \ldots, a\}$ i $j \in \{0, \ldots, n\}$ stavimo

$$c_{l,j,n} = D_{a-l}\big(R_n(t)(t + j + 1)^a\big)\big|_{t=-j-1} \in \mathbb{Q}, \tag{12}$$

[§§]Ako označimo sa $a_k$ koeficijent uz $z^{-k}$ u tom redu, onda je

$$\Big|\frac{a_{k+1}}{a_k}\Big| = \frac{(k+1)^{a+1}(k + (r+1)n + 2)}{(k + n + 2)^{a+1}(k - rn + 1)} = \frac{k^{a+2} + (rn + n + a + 3)k^{a+1} + \mathcal{O}(k^a)}{k^{a+2} + (-rn + an + n + 2a + 3)k^{a+1} + \mathcal{O}(k^a)},$$

pa vrijedi

$$k\bigg(\Big|\frac{a_{k+1}}{a_k}\Big| - 1\bigg) = \frac{(2rn - an - a)k^{a+2} + \mathcal{O}(k^{a+1})}{k^{a+2} + \mathcal{O}(k^{a+1})},$$

što zajedno s uvjetom $r < a/2$ povlači da možemo primjeniti Raabeov kriterij konvergencije redova koji kaže da ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da od nekog $k$ nadalje vrijedi

$$k\bigg(\Big|\frac{a_{k+1}}{a_k}\Big| - 1\bigg) \le -1 - \varepsilon,$$

onda red $\sum |a_k|$ konvergira.

$$P_{0,n}(z) = -\sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{(k+1)^l} z^{j-k} \quad \text{i} \quad P_{l,n}(z) = \sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} z^j. \tag{13}$$

Vidimo da su $P_{l,n}(z)$ polinomi s racionalnim koeficijentima.

**Lema 13.** *Vrijedi*

$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{l=2}^{a} P_{l,n}(1)\zeta(l). \tag{14}$$

*Nadalje,*

$$\text{ako je } (n+1)a + l \text{ neparan broj, onda je } P_{l,n}(1) = 0. \tag{15}$$

*Posebno, ako je $n$ paran i $a \geq 3$ neparan, onda je $P_{l,n}(1) = 0$ za sve parne $l \in \{2, \ldots, a\}$, stoga je $S_n(1)$ linearna kombinacija $\zeta$ samo u neparnim brojevima:*

$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{l=1}^{(a-1)/2} P_{2l+1,n}(1)\zeta(2l+1). \tag{16}$$

*Dokaz.* Rastavimo li $R_n(t)$ na parcijalne razlomke, dobivamo

$$R_n(t) = \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} \frac{c_{l,j,n}}{(t+j+1)^l}.$$

Odavdje je za $|z| > 1$

$$\begin{aligned}
S_n(z) &= \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z^k} \frac{1}{(k+j+1)^l} \\
&= \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} z^j \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z^k}\frac{1}{(k+1)^l} - \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{z^k}\frac{1}{(k+1)^l} \right) \\
&= \sum_{l=1}^{a} \mathrm{Li}_l(1/z) \sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} z^j - \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{(k+1)^l} z^{j-k}.
\end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$S_n(z) = \sum_{l=1}^{a} P_{l,n}(z)\, \mathrm{Li}_l(1/z) + P_{0,n}(z). \tag{17}$$

Budući da je $2r < a$, ukupni stupanj racionalne funkcije $R_n(t)$ je $\leq -2$, pa je¶¶

$$P_{1,n}(1) = \sum_{j=0}^{n} c_{1,j,n} = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{Res}_{t=-j-1}\big(R_n(t)\big) = 0 \quad \text{i}$$

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ |z|>1}} \big(P_{1,n}(z)\, \mathrm{Li}_1(1/z)\big) = 0,$$

---

¶¶Prvu činjenica slijedi iz toga što je $R_n(z) = \mathcal{O}(|z|^{-2})$ za $z \in \mathbb{C}$ dovoljno velikog modula. Zato je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} R_n(z)\,\mathrm{d}z = \mathcal{O}(\rho^{-1})$$

za $\rho \in \mathbb{R}$ dovoljno veliko, pa preostaje primjeniti teorem o reziduumima.

Drugu tvrdnju sada dobivamo korištenjem Abelovog teorema o redovima potencija.

čime je dokazano (14).

Preostaje pokazati (15) i u tu svrhu zapišimo formule (12) ovako

$$c_{l,j,n} = (-1)^{a-l} D_{a-l}\big(\Phi_{n,j}(x)\big)\Big|_{x=j}, \quad \text{gdje je}$$

$$\Phi_{n,j}(x) = R_n(-x-1)(j-x)^a = n!^{a-2r} \frac{(-x-rn)_{rn}(-x+n+1)_{rn}}{(-x)_{n+1}^a}(j-x)^a.$$

Vrijedi

$$\Phi_{n,n-j}(n-x) = n!^{a-2r} \frac{\big(x-(r+1)n\big)_{rn}(x+1)_{rn}}{(x-n)_{n+1}^a}(x-j)^a. \tag{18}$$

Primjenimo li identitet $(\alpha)_l = (-1)^l(-\alpha-l+1)_l$ na tri Pochhammerova simbola u (18), dobivamo

$$\begin{aligned}\Phi_{n,n-j}(n-x) &= n!^{a-2r} \frac{(-1)^{rn}(-x+n+1)_{rn}(-1)^{rn}(-x-rn)_{rn}}{(-1)^{(n+1)a}(-x)_{n+1}^a}(-1)^a(j-x)^a \\ &= (-1)^{na}\Phi_{n,j}(x).\end{aligned}$$

Stoga je za $k \ge 0$,

$$\Phi_{n,n-j}^{(k)}(n-x) = (-1)^k(-1)^{na}\Phi_{n,j}^{(k)}(x).$$

Tako za $k = a-l$ i $x = j$ imamo

$$c_{l,n-j,n} = (-1)^{a-l}(-1)^{an}c_{l,j,n},$$

što povlači

$$P_{l,n}(1) = (-1)^{(n+1)a+l}P_{l,n}(1),$$

pa zaključujemo da za neparan $(n+1)a+l$ vrijedi $P_{l,n}(1) = 0$. □

Definirajmo sada integral

$$I_n(z) = \int_{[0,1]^{a+1}} \left(\frac{\prod_{l=1}^{a+1} x_l^r(1-x_l)}{(z-x_1x_2\cdots x_{a+1})^{2r+1}}\right)^n \frac{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{a+1}}{(z-x_1x_2\cdots x_{a+1})^2}$$

koji sigurno konvergira za sve kompleksne $z$ takve da je $|z| > 1$.

**Lema 14.** *Red $S_n(z)$ se za $|z| \ge 1$ može zapisati pomoću integrala:*

$$S_n(z) = \frac{\big((2r+1)n+1\big)!}{n!^{2r+1}} z^{(r+1)n+2} I_n(z). \tag{19}$$

*Dokaz.* Za $|z| > 1$, ovu jednakost dobivamo razvojem u red nazivnika razlomka koji se nalazi pod znakom integrala te zamjenom poretka sume i integrala koja je u tom slučaju ispravna. Strogo opravdanje dobiva se gledamo li na $S_n(z)$ kao generaliziranu hipergeometrijsku funkciju sa parametrima koji omogućuju integralnu reprezentaciju tog reda za $|z| > 1$***.

***Naime [BR 01, str. 196],

$$S_n(z) = z^{-rn-1} n!^{a-2r} \frac{\Gamma(rn+1)^{a+1}\Gamma\big((2r+1)n+2\big)}{\Gamma\big((r+1)n+2\big)^{a+1}} {}_{a+2}F_{a+1}\left(\begin{matrix} rn+1, \dots, rn+1, (2r+1)n+2 \\ (r+1)n+2, \dots, (r+1)n+2 \end{matrix} \middle| z^{-1}\right),$$

pa možemo primjeniti integralne transformacije Eulerovog tipa, v. npr. [Sl 66, str. 108].

Treba pokazati da je ta reprezentacija valjana i za $|z| = 1$. U tu svrhu, stavimo $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ i definiramo funkciju

$$F(x,z) = \begin{cases} \frac{\prod_{l=1}^{a+1} x_l^r(1-x_l)}{(z-x_1\cdots x_{a+1})^{2r+1}} & \text{ako je } (x,z) \in [0,1]^{a+1} \times E \text{ i } (x,z) \neq (1,1,\dots,1); \\ 0 & \text{ako je } (x,z) = (1,1,\dots,1). \end{cases}$$

Funkcija $F(x,z)$ je neprekidna na $[0,1]^{a+1} \times E$. Naime, za $x \in [0,1]^{a+1}$, očito za sve $l \in \{1,\dots,a+1\}$ vrijedi $1 - x_1 \cdots x_{a+1} \geq 1 - x_l$, pa je

$$(1 - x_1 \cdots x_{a+1})^{a+1} \geq \prod_{l=1}^{a+1} (1 - x_l).$$

Zato je za sve $(x,z) \in [0,1]^{a+1} \times E$ takve da je $(x,z) \neq (1,1,\dots,1)$,

$$|F(x,z)| \leq F(x,1) \leq \prod_{l=1}^{a+1} \left( x_l^r (1-x_l)^{\frac{a-2r}{a+1}} \right).$$

Zaključujemo da je funkcija $F(x,z)$ neprekidna na $[0,1]^{a+1} \times E$ čim je ispunjeno $a > 2r$.

Funkcija $G(x,z) = (z - x_1 \cdots x_{a+1})^{-2}$ je integrabilna na $[0,1]^{a+1}$. To je posljedica neprekidnosti, za $|t| \leq 1$, funkcije

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w}{(1 - uvwt)^2} = \mathrm{Li}_2(t).$$

Označimo sa $\tilde{S}_n(z)$ desnu stranu od (19) i $u(x,z) = F(x,z)^n G(x,z)$. Tada je

- za sve $z \in E$, $|u(x,z)| \leq u(x,1)$ i $u(x,1)$ je integrabilna na $[0,1]^{a+1}$
- za sve $x \in [0,1]^{a+1}$, $x \neq (1,\dots,1)$, funkcija $u(x,z)$ je neprekidna na $E$.

Stoga je $\tilde{S}_n(z)$ neprekidna na $E$†††. Budući da je i $S_n(z)$ neprekidna na $E$, a $S_n(z) = \tilde{S}_n(z)$ za $|z| > 1$, zaključujemo da posljednja jednakost vrijedi na čitavom $E$, čime je dokaz leme 14 završen. □

Promotrimo polinom

$$Q_{r,a}(s) = rs^{a+2} - (r+1)s^{a+1} + (r+1)s - r.$$

Primjetimo da je $Q_{r,a}(1) = 0$ i $Q_{r,a}(s) = s^{a+1}(rs - r - 1) + \big((r+1)s - r\big) < 0$ na $[0, \frac{r}{r+1}]$. Nadalje,

$$Q'_{r,a}(s) = r(a+2)s^{a+1} - (r+1)(a+1)s^a + r + 1$$

i

$$Q''_{r,a}(s) = (a+1)s^{a-1}\big(r(a+2)s - (r+1)a\big).$$

Odavde je $Q'_{r,a}(0) = r + 1 > 0$, $Q'_{r,a}(1) = 2r - a < 0$ i $Q''_{r,a}(s) < 0$ na $[0,1]$. Sada nije teško (koristeći primjerice Lagrangeov teorem srednje vrijednosti) utvrditi da $Q_{r,a}$ ima točno jedan korijen $s_0$ u $[0,1\rangle$ i da je $s_0 \in \langle \frac{r}{r+1}, 1\rangle$.

†††Neka je $(z_k)$ niz u $E$ koji konvergira prema $z_0 \in E$. Označimo s $f_k(x) = f_k(x_1,\dots,x_{a+1}) = u(x_1,\dots,x_{a+1},z_k)$ za $k \in \mathbb{N}$. Tada prethodna dva uvjeta povlače da je $|f_k(x)| \leq u(x,1)$ gdje je funkcija s desne strane pozitivna i integrabilna na $[0,1]^{a+1}$ te da $f_k$ teži prema $u(\cdot,z_0)$ po točkama (skoro svuda, tj. na $[0,1]^{a+1} \setminus \{(1,\dots,1)\}$). Sada iz Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi da $\tilde{S}_n(z_k) \to \tilde{S}_n(z_0)$ kad $k \to \infty$ što prema Heineovoj karakterizaciji povlači neprekidnost.

**Lema 15.** *Imamo*

$$\lim_{n\to+\infty} |S_n(1)|^{1/n} = \varphi_{r,a}, \tag{20}$$

*gdje je*

$$\varphi_{r,a} = \big((r+1)s_0 - r\big)^r (r+1-rs_0)^{r+1}(1-s_0)^{a-2r}.$$

*Štoviše, vrijede ograde*

$$0 < \varphi_{r,a} \le \frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}}.$$

Dokazat ćemo ovu lemu koristeći lemu 14, a dat ćemo i drugi dokaz koji direktno koristi red $S_n(z)$.

*Prvi dokaz.* Zbog Stirlingove formule, $\frac{\Gamma(s+1)}{(s/e)^s\sqrt{2\pi s}} - 1 \to 0$ kad $s \to \infty$, je

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\big((2r+1)n+1\big)!}{n!^{2r+1}}\right)^{1/n} = (2r+1)^{2r+1}.$$

Integralni prikaz (19) i lema 14 impliciraju da $\lim_{n\to+\infty} |S_n(1)|^{1/n}$ postoji i jednak je

$$\varphi_{r,a} = (2r+1)^{2r+1} \max_{(x_1,\dots,x_{a+1})\in[0,1]^{a+1}} \left(\frac{\prod_{l=1}^{a+1} x_l^r(1-x_l)}{(1-x_1x_2\cdots x_{a+1})^{2r+1}}\right) > 0.$$

Neka je

$$F(x) = F(x_1,\dots,x_{a+1}) = \frac{\prod_{l=1}^{a+1} x_l^r(1-x_l)}{(1-x_1x_2\cdots x_{a+1})^{2r+1}}$$

i $f(x) = \log\big(F(x)\big)$. U ekstremima od $F$ mora za sve $l \in \{1,\dots,a+1\}$ biti ispunjeno

$$\frac{\partial f}{\partial x_l}(x) = \frac{1}{x_l}\Big(r - \frac{x_l}{1-x_l} + (2r+1)\frac{x_1x_2\cdots x_{a+1}}{1-x_1x_2\cdots x_{a+1}}\Big) = 0.$$

Zato se maksimum od $F$ postiže na dijagonali $x_1 = x_2 = \cdots = x_{a+1}$ i imamo

$$\varphi_{r,a} = (2r+1)^{2r+1} \max_{s\in[0,1]} \Big(\frac{s^{r(a+1)}(1-s)^{a+1}}{(1-s^{a+1})^{2r+1}}\Big).$$

Nije teško provjeriti da se maksimum postiže upravo za $s = s_0$, korijen polinoma $Q_{r,a}$ u $\langle 0,1\rangle$. Iz jednakosti $Q_{r,a}(s_0) = rs_0^{a+2} - (r+1)s_0^{a+1} + (r+1)s_0 - r = 0$ proizlazi

$$s_0^{a+1} = \frac{(r+1)s_0 - r}{r+1-rs_0},$$

a odatle je

$$\begin{aligned}
\varphi_{r,a} &= (2r+1)^{2r+1}\frac{s_0^{r(a+1)}(1-s_0)^{a+1}}{(1-s_0^{a+1})^{2r+1}} \\
&= \big((r+1)s_0 - r\big)^r(r+1-rs_0)^{r+1}(1-s_0)^{a-2r} \\
&\le \frac{(2r+1)^{r+1}}{(r+1)^{a-r+1}} \le \frac{(2r+2)^{r+1}}{(r+1)^{a-r+1}} \le \frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}},
\end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili ograde $\frac{r}{r+1} < s_0 < 1$. $\square$

*Drugi dokaz.* Zapišimo $R_n(k) = (k+1)^{-a}\tilde{R}_n(k)$, gdje je

$$\tilde{R}_n(k) = n!^{a-2r}\frac{(k-rn+1)_{rn}(k+n+2)_{rn}}{(k+2)_n^a}.$$

Za $0 \le k \le rn-1$ je $\tilde{R}_n(k) = 0$, a zbog $r < a/2$ za dovoljno veliki $k/n$ imamo sljedeću ogradu za kvocijent

$$\frac{\tilde{R}_n(k-1)}{\tilde{R}_n(k-2)} = \frac{k^a(k-1)}{(k+n)^{a+1}} \cdot \frac{k+rn+n}{k-rn-1} < \Big(\frac{k/n}{k/n+1}\Big)^{a+1} \cdot \frac{k/n+r+1}{k/n-r-1/n} \le 1,$$

pa vidimo da postoji $c = c(a,r) > 0$ takav da je

$$\max_{k\ge 0}\tilde{R}_n(k) = \max_{rn\le k\le cn}\tilde{R}_n(k).$$

Označimo ovaj maksimum s $M_n$; kako je $\displaystyle\sum_{k\ge rn}(k+1)^{-a} < 1$ i $\tilde{R}_n(k) \ge 0$, vrijedi

$$\frac{1}{(cn)^a}M_n \le S_n(1) \le M_n.$$

Dovoljno je pokazati da $M_n^{1/n}$ teži ka $\varphi_{r,a}$. Stirlingova formula povlači da je za $rn \le k \le cn$

$$\tilde{R}_n(k) = \rho_n(k)\frac{k^{k(a+1)}\big(k+(r+1)n\big)^{k+(r+1)n}n^{n(a-2r)}}{(k+n)^{(k+n)(a+1)}(k-rn)^{k-rn}},$$

gdje $\rho_n(k)^{1/n}$ teži k 1. Postavimo

$$\tilde{F}(x) = \frac{x^{x(a+1)}(x+r+1)^{x+r+1}}{(x+1)^{(x+1)(a+1)}(x-r)^{x-r}}.$$

Sada je

$$\max_{x\in[r,c]}\tilde{F}(x) = \lim_{n\to+\infty}\max_{rn\le k\le cn}\tilde{F}\Big(\frac{k}{n}\Big) = \lim_{n\to+\infty}M_n^{1/n},$$

pri čemu prva jednakost slijedi, naravno, iz neprekidnosti od $\tilde{F}$.

Štoviše, možemo izabrati $c$ tako da je $\max_{x\in[r,c]}\tilde{F}(x) = \max_{x\in[r,+\infty\rangle}\tilde{F}(x)$ jer se računski pokazuje da je $\max_{x\in[r,+\infty\rangle}\tilde{F}(x) = \tilde{F}(x_0)$, gdje je $x_0 = \frac{s_0}{1-s_0}$ i $\tilde{F}(x_0) = \varphi_{r,a}$. Zato je

$$\lim_{n\to+\infty}|S_n(1)|^{1/n} = \lim_{n\to+\infty}M_n^{1/n} = \max_{x\in[r,+\infty\rangle}\tilde{F}(x) = \tilde{F}(x_0) = \varphi_{r,a}.$$

Primjetimo još na kraju da ograda $\varphi_{r,a} \le 2^{r+1}/r^{a-2r}$ izlazi direktno iz nejednakosti $k+(r+1)n < 2^{1+1/r}k$ za $k > rn$. Naime, za $k > rn$ imamo

$$\tilde{R}_n(k) < n^{(a-2r)n}\frac{k^{rn}\big(2^{1+1/r}k\big)^{rn}}{k^{an}} = \left(2^{r+1}\Big(\frac{n}{k}\Big)^{a-2r}\right)^n < \left(\frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}}\right)^n. \qquad \square$$

**Lema 16.** *Za sve $l \in \{0,\dots,a\}$,*

$$\limsup_{n\to+\infty}|P_{l,n}(1)|^{1/n} \le 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}. \tag{21}$$

*Dokaz.* Ako je $l \in \{1, \ldots, a\}$, dovoljno je ograditi koeficijente $c_{l,j,n}$ jer je $P_{l,n}(1) = \sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n}$. U tu svrhu koristimo Cauchyjevu formulu:

$$c_{l,j,n} = \frac{1}{(a-l)!}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^{a-l}\big(R_n(t)(t+j+1)^a\big)\Big|_{t=-j-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z+j+1|=1/2} R_n(z)(z+j+1)^{l-1}\,\mathrm{d}z,$$

gdje $|z+j+1| = 1/2$ označava kružnicu sa središtem u $-j-1$ i radijusom $1/2$. Na toj kružnici imamo

$$\begin{aligned}|(z-rn+1)_{rn}| &\le (j+2)_{rn}\\ &\text{jer je } |z| \le j+3/2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|(z+n+2)_{rn}| &\le (n-j+2)_{rn}\\ &\text{jer je } |z+n+2| \le n-j+3/2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|(z+1)_{n+1}| &\ge 2^{-3}(j-1)!(n-j-1)!\\ &\text{jer je } \begin{array}{l}|\operatorname{Re}(z+k+1)| \ge k-j \text{ za } k = 0, \ldots, j-2,\\ |z+k+1| \ge 1/2 \text{ za } k = j-1, j, j+1,\\ |\operatorname{Re}(z+k+1)| \ge k-j-1 \text{ za } k = j+2, \ldots, n.\end{array}\end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned}|c_{l,j,n}| &\le n!^{a-2r}\frac{(j+2)_{rn}(n-j+2)_{rn}}{\big(2^{-3}(j-1)!(n-j-1)!\big)^a}\\ &= \frac{(rn+j+1)!\big((r+1)n-j+1\big)!}{(j+1)!(n-j+1)!(j-1)!^a(n-j-1)!^a}n!^{a-2r}8^a\\ &= \frac{(rn+j+1)!}{(j+1)!\big(j!(n-j)!\big)^r}\cdot\frac{\big((r+1)n-j+1\big)!}{(n-j+1)!\big(j!(n-j)!\big)^r}\\ &\quad\cdot\Big(\frac{n!}{j!(n-j)!}\Big)^{a-2r}\cdot\big(j(n-j)\big)^a 8^a.\end{aligned}$$

Prva dva faktora u prethodnom produktu su multinomni koeficijenti koji se mogu ograditi odozgo sa $(2r+1)^{rn+j+1}$ i $(2r+1)^{(r+1)n-j+1}$, treći faktor ograđujemo kao binomni koeficijent sa $2^{n(a-2r)}$, a četvrti faktor je zbog aritmetičko-geometrijske nejednakosti manji od $(2n^2)^a$, pa je

$$|c_{l,j,n}| \le (2r+1)^{(2r+1)n+2}2^{(a-2r)n}(2n^2)^a.$$

Stoga vrijedi

$$\limsup_{n\to+\infty} |P_{l,n}(1)|^{1/n} \le 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}$$

Preostaje nam još ograditi $P_{0,n}(1)$ što je prema (13) jednako

$$P_{0,n} = -\sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{(k+1)^l}.$$

Budući da je

$$\sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{(k+1)^l} \le \sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{k+1} \le j \le n,$$

to vrijedi također
$$\limsup_{n\to+\infty} |P_{0,n}(1)|^{1/n} \le 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}. \qquad \square$$

Prisjetimo se da smo s $d_n$ označili najmanji zajednički višekratnik brojeva 1, 2, …, $n$.

**Lema 17.** *Za svaki $l \in \{0,\dots,a\}$ vrijedi*
$$d_n^{a-l} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]. \tag{22}$$

*Dokaz.* Ocjenu nazivnika koeficijenata $c_{l,j,n}$ dobit ćemo prikazujući $R_n(t)$ na drugi način. Fiksirajmo cijele brojeve $n$ i $j$. Rastavimo brojnik od $R_n(t)$ u $2r$ umnožaka od kojih svaki sadrži $n$ uzastopnih faktora ovako:
$$R_n(t)(t+j+1)^a = \left(\prod_{l=1}^{r} F_l(t)\right)\cdot\left(\prod_{l=1}^{r} G_l(t)\right)\cdot H(t)^{a-2r},$$
gdje je za $l \in \{1,\dots,r\}$
$$\begin{aligned}
F_l(t) &= \frac{(t-nl+1)_n}{(t+1)_{n+1}}(t+j+1),\\
G_l(t) &= \frac{(t+nl+2)_n}{(t+1)_{n+1}}(t+j+1),\\
H(t) &= \frac{n!}{(t+1)_{n+1}}(t+j+1).
\end{aligned}$$
Rastavimo $F_l(t)$, $G_l(t)$ i $H(t)$ na parcijalne razlomke
$$\begin{aligned}
F_l(t) &= 1 + \sum_{\substack{p=0\\p\ne j}}^{n} \frac{(j-p)f_{p,l}}{t+p+1},\\
G_l(t) &= 1 + \sum_{\substack{p=0\\p\ne j}}^{n} \frac{(j-p)g_{p,l}}{t+p+1},\\
H(t) &= \sum_{\substack{p=0\\p\ne j}}^{n} \frac{(j-p)h_p}{t+p+1},
\end{aligned}$$
gdje je
$$f_{p,l} = \frac{(-p-nl)_n}{\prod\limits_{\substack{h=0\\h\ne p}}^{n}(-p+h)} = \frac{(-1)^n\big((l-1)n+p+1\big)_n}{(-1)^p p!(n-p)!} = (-1)^{n-p}\binom{nl+p}{n}\binom{n}{p} \in \mathbb{Z},$$
$$g_{p,l} = \frac{(-p+nl+1)_n}{\prod\limits_{\substack{h=0\\h\ne p}}^{n}(-p+h)} = \frac{(-1)^p\big((l+1)n-p\big)!}{(nl-p)!p!(n-p)!} = (-1)^{p}\binom{n(l+1)-p}{n}\binom{n}{p} \in \mathbb{Z},$$
$$h_p = \frac{n!}{\prod\limits_{\substack{h=0\\h\ne p}}^{n}(-p+h)} = \frac{(-1)^p n!}{p!(n-p)!} = (-1)^p\binom{n}{p} \in \mathbb{Z}.$$

Za sve cijele $\lambda \geq 0$ imamo[‡‡‡]

$$\big(D_\lambda F_l(t)\big)\big|_{t=-j-1} = \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} (-1)^\lambda \frac{(j-p)f_{p,l}}{(p-j)^{\lambda+1}},$$

$$\big(D_\lambda G_l(t)\big)\big|_{t=-j-1} = \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} (-1)^\lambda \frac{(j-p)g_{p,l}}{(p-j)^{\lambda+1}},$$

$$\big(D_\lambda H(t)\big)\big|_{t=-j-1} = \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} (-1)^\lambda \frac{(j-p)h_p}{(p-j)^{\lambda+1}}.$$

Ovim smo pokazali da su za sve nenegativne cijele brojeve $\lambda$, brojevi

$$d_n^\lambda (D_\lambda F_l)|_{t=-j-1}, \quad d_n^\lambda (D_\lambda G_l)|_{t=-j-1}, \quad d_n^\lambda (D_\lambda H)|_{t=-j-1}$$

cijeli, pa pomoću Leibnizove formule

$$D_{a-l}\big(R(t)(t+j+1)^a\big) = \sum_\mu (D_{\mu_1} F_1) \cdots (D_{\mu_r} F_r)(D_{\mu_{r+1}} G_1) \cdots (D_{\mu_{2r}} G_r)(D_{\mu_{2r+1}} H) \cdots (d_{\mu_a} H)$$

(gdje suma ide po svim multiindeksima $\mu \in \mathbb{N}_0^a$ za koje je $\mu_1 + \cdots + \mu_a = a - l$), zaključujemo da je $d_n^{a-l} c_{l,j,n} \in \mathbb{Z}$ iz čega je $d_n^{a-l} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$. □

## 5.2 Dokaz teoremā

U nastavku ćemo koristiti sljedeći kriterij za dokazivanje propozicije 18. Teoremi 11 i 12 su posljedice te propozicije.

**Nesterenkov kriterij linearne nezavisnosti** [Ne 85]
*Neka je dano $N$ realnih brojeva $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ $(N \geq 2)$ i pretpostavimo da postoji $N$ nizova $(p_{l,n})_{n\geq 0}$ takvih da vrijedi:*

(i) $\forall l \in \{1, \ldots, N\},\ p_{l,n} \in \mathbb{Z}$;

(ii) $\alpha_1^{n+o(n)} \leq \Big| \sum_{l=1}^{N} p_{l,n}\theta_l \Big| \leq \alpha_2^{n+o(n)}$ *pri čemu je* $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1$;

(iii) $\forall l \in \{1, \ldots, N\},\ |p_{l,n}| \leq \beta^{n+o(n)}$ *pri čemu je* $\beta > 1$.

*Uz ove uvjete,*

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\theta_1 + \mathbb{Q}\theta_2 + \cdots + \mathbb{Q}\theta_N) \geq \frac{\log(\beta) - \log(\alpha_1)}{\log(\beta) - \log(\alpha_1) + \log(\alpha_2)}.$$

‡‡‡Sa $\delta$ smo označili Kroneckerov simbol, tj. u ovom slučaju

$$\delta_{0,\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \lambda = 0, \\ 0 & \text{ako je } \lambda > 0. \end{cases}$$

Podsjetimo se također da je $D_\lambda = \dfrac{1}{\lambda!}\dfrac{\mathrm{d}^\lambda}{\mathrm{d}t^\lambda}$.

**Propozicija 18.** *Neka je $a \geq 3$ neparan broj. Za sve cijele $r$ takve da je $1 \leq r < a/2$, vrijedi ograda*

$$\delta(a) \geq \frac{(a-2r)\log(2) + (2r+1)\log(2r+1) - \log(\varphi_{r,a})}{a + (a-2r)\log(2) + (2r+1)\log(2r+1)}, \tag{23}$$

*gdje je*

$$\varphi_{r,a} = \big((r+1)s_0 - r\big)^r (r+1-rs_0)^{r+1}(1-s_0)^{a-2r}$$

*i $s_0$ je jedinstveni korijen u $\langle 0,1\rangle$ polinoma $Q(s) = rs^{a+2} - (r+1)s^{a+1} + (r+1)s - r$. Posebice, vrijedi*

$$\delta(a) \geq \frac{\log(r) + \frac{a-r}{a+1}\log(2)}{1 + \log(2) + \frac{2r+1}{a+1}\log(r+1)}. \tag{24}$$

*Dokaz.* Primjetimo najprije da iz teorema o prostim brojevima slijedi (v. fusnotu na stranici 4)

$$d_n = e^{n+o(n)}. \tag{25}$$

Definirajmo za sve cijele $n \geq 0$, $\ell_n = d_{2n}^a S_{2n}(1)$,

$$p_{0,n} = d_{2n}^a P_{0,2n}(1) \quad \text{i} \quad p_{l,n} = d_{2n}^a P_{2l+1,2n}(1) \text{ za } l \in \{1,\dots,(a-1)/2\}.$$

Jednakost (16) iz leme 13 pokazuje da je $\ell_n$ linearna kombinacija vrijednosti zeta funkcije u neparnim brojevima:

$$\ell_n = p_{0,n} + \sum_{l=1}^{(a-1)/2} p_{l,n}\zeta(2l+1). \tag{26}$$

Iz (22) u lemi 17 slijedi da je za sve $l \in \{0,\dots,(a-1)/2\}$ i za sve $n \geq 0$, $p_{l,n} \in \mathbb{Z}$. Asimptotske ocjene u (20) i (25) pokazuju da je

$$\log|\ell_n| = 2n\log(\kappa) + o(n), \quad \text{gdje je } \kappa = e^a\varphi_{r,a},$$

a ocjene (21) i (25) povlače da je za sve $l \in \{0,\dots,(a-1)/2\}$

$$\log|p_{l,n}| \leq 2n\log(\tau) + o(n), \quad \text{gdje je } \tau = e^a 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}.$$

Sada možemo primjeniti kriterij Nesterenka sa $N = (a+1)/2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \kappa^2$ i $\beta = \tau^2$, pa dobivamo

$$\delta(a) \geq \frac{\log(\tau) - \log(\kappa)}{\log(\tau)} = \frac{(a-2r)\log(2) + (2r+1)\log(2r+1) - \log(\varphi_{r,a})}{a + (a-2r)\log(2) + (2r+1)\log(2r+1)}.$$

Iskoristimo li ogradu $\varphi_{r,a} \leq 2^{r+1}/r^{a-2r}$ iz leme 15 i $2r \leq 2r+1 \leq 2(r+1)$, dobit ćemo nejednakost (24). □

*Dokaz teorema 12.* Uzmimo da je $a = 169$ i $r = 10$ u propoziciji 18; pomoću računala dobivamo da je

$$s_0 \approx 0.90909093 \quad \text{i} \quad \log(\varphi_{10,169}) \approx -505.73453$$

odakle je $\delta(169) > 2.001$. Zato postoje dva neparna broja $j$ i $k$ takvi da je $3 \leq j, k \leq 169$ i $1$, $\zeta(j)$ i $\zeta(k)$ su linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$. Zbog iracionalnosti od $\zeta(3)$, možemo uzeti da je $k = 3$ čime smo dokazali teorem 12. □

*Dokaz teorema 11.* Neka je $a$ neparan broj. Razlikujemo više slučajeva:

- $3 \le a \le 167 < e^6$: Apéryjev teorem daje $\delta(3) \ge 2$ iz čega je $\delta(a) \ge 2 \ge \frac{1}{3}\log(a)$.
- $169 \le a \le 8 \cdot 10^3 - 1 < e^9$: teorem 12 daje $\delta(169) \ge 3$, odakle je $\delta(a) \ge 3 \ge \frac{1}{3}\log(a)$.
- $8\cdot 10^3+1 \le a \le 10^5-1 < e^{12}$: propozicija 18 (s $r = 200$) daje $\delta(8\cdot 10^3+1) > 3$, odakle je $\delta(a) \ge 4 \ge \frac{1}{3}\log(a)$.
- $10^5 + 1 \le a \le 10^6 - 1 < e^{15}$: propozicija 18 (s $r = 600$) daje $\delta(10^5 + 1) > 4$, odakle je $\delta(a) \ge 5 \ge \frac{1}{3}\log(a)$.
- $a \ge 10^6 + 1$: uzmimo $r = \lfloor a^{3/5} + 1 \rfloor < a/2$ u propoziciji 18. Dobivamo
$$\delta(a) \ge \frac{3}{5c(a)}\log(a),$$
gdje je
$$c(a) = 1 + \log(2) + \frac{2a^{3/5}+3}{a+1}\log(a^{3/5}+1)$$
padajuća funkcija i $c(10^6+1) < 9/5$. Zato je i u ovom slučaju $\delta(a) \ge \frac{1}{3}\log(a)$.

Preostalo je pokazati drugi dio teorema. U tu svrhu, neka je $r = r(a)$ cijeli broj $< a/2$ koji je najbliži broju $\frac{a}{(\log(a))^2}$. Tada imamo

$$\log(r) + \frac{a-r}{a+1}\log(2) = \big(1 + o(1)\big)\log(a) \quad \text{i}$$
$$1 + \log(2) + \frac{2r+1}{a+1}\log(r+1) = 1 + \log(2) + o(1),$$

pa je
$$\delta(a) \ge \frac{\big(1+o(1)\big)\log(a)}{1+\log(2)+o(1)}$$
i time je dokazan teorem 11. □

# 6 Eksponent iracionalnosti od $\zeta(3)$

Sve reference za ovaj odjeljak pogledajte u [Fi 04, §3.1] Za realni iracionalni broj $\alpha$ s $\mu(\alpha)$ označavamo *eksponent iracionalnosti* broja $\alpha$, tj. infimum skupa realnih brojeva $\nu$ za koje postoji najviše konačno mnogo racionalnih brojeva $p/q$ takvih da je $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\nu}$. Iz teorije verižnih razlomaka ili Dirichletovog principa slijedi da je eksponent iracionalnosti uvijek veći ili jednak 2. Ako je $\alpha$ algebarski, Liouville je pokazao da je $\mu(\alpha)$ manji ili jednak stupnju od $\alpha$. Ovaj rezultat je poboljšao Roth 1955. kada je dokazao da za sve algebarske iracionalne brojeve $\alpha$ vrijedi $\mu(\alpha) = 2$. Također je $\mu(\alpha) = 2$ za skoro sve realne brojeve $\alpha$ s obzirom na Lebesgueovu mjeru. S druge strane Liouvilleovi brojevi su brojevi kojima je eksponent iracionalnosti beskonačan, takvi brojevi mogu se iznimno dobro aproksimirati racionalnim brojevima $\big($jedan primjer takvog broja je $\sum_{k\ge 1}\frac{1}{10^{k!}}\big)$.

Iz Aperyjevih linearnih formi slijedi da je eksponent iracionalnosti od $\zeta(3)$ odozgo ograđen s 13.4179, posebno $\zeta(3)$ nije Liouvilleov broj. Ovaj je rezultat znatno poboljšao Hata, a nakon njega Rhin i Viola koji su pronašli najbolju do sada poznatu ogradu za $\mu\big(\zeta(3)\big)$.

**Teorem 19.** *Eksponent iracionalnosti od $\zeta(3)$ je ograđen odozgo s 5.5139. Drugim riječima, postoji najviše konačno mnogo racionalnih brojeva $p/q$ takvih da je*

$$\left|\zeta(3) - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{5.5139}}.$$

Kako bi dobili ovaj rezultat, Rhin i Viola promatrali su sljedeći integral

$$J_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{u^{hn}(1-u)^{ln} v^{kn}(1-v)^{sn} w^{jn}(1-w)^{qn}}{\big(1 - w(1-uv)\big)^{(q+h-r)n+1}} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w,$$

gdje su $h, \ldots, s$ parametri čije vrijednosti su ovako fiksirane: $h = 16$, $j = 17$, $k = 19$, $l = 15$, $q = 11$, $r = 9$, $s = 13$. Kada bismo stavili sve parametre da budu jednaki, dobili bismo integrale iz Beukersovog dokaza; dakle, niz Aperyjevih linearnih formi (točnije, podniz toga niza), a to nas vodi na istu mjeru iracionalnosti.

Interesantan je slučaj kad nisu svi parametri jednaki; asimptotika koju dobivamo za $J_n^{1/n}$ je nešto lošija, ali puno se dobiva na nazivnicima kojima treba pomnožiti $J_n$ da bi dobili linearnu formu u 1 i $\zeta(3)$ s cjelobrojnim koeficijentima.

**Napomena.** Spomenute ograde od $\mu\big(\zeta(3)\big)$ su efektivne, tj. može se dati eksplicitna ograda za visinu $\max\big(|p|, |q|\big)$ "vrlo dobrih" racionalni aproksimacija $p/q$. Ovo je bitna razlika u odnosu na Rothov teorem gdje možemo ograditi broj iznimnih $p/q$, ali ne i njihovu visinu.

# Literatura


[Ap 79] Apéry, R. – *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$.* Astérisque **61** (1979), 11–13.

[BR 01] Ball, K.; Rivoal T. – *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs.* Invent. Math. **146**:1 (2001), 193–207.

[Be 79] Beukers, F. – *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$.* Bull. London Math. Soc. **11**:3 (1979), 268–272.

[Be 95] Beukers, F. – *Consequences of Apéry's work on irrationality.* Rencontres arithmétiques de Caen (1995), Preprint.

[Ch 03] Chen, W. – *Distribution of prime numbers.* Online notes, 2003. `http://www.maths.mq.au/~wchen/`

[El 05] Elaydi, S. – *An introduction to difference equations.* Third edition. Undergraduate texts in mathematics. Springer-Verlag, New York, 2005.

[Fi 04] Fischler, S. – *Irrationalité de valeurs de zêta [d'après Apéry, Rivoal, ...].* Séminaire Bourbaki 2002–2003, exposé numéro 910 (17 novembre 2002), Astérisque No. **294** (2004), 27–62.

[La 02] Lang, S. – *Algebra.* Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002.

[Li 82] Lindemann, F. – *Über die Zalh $\pi$.* Math. Annalen **20** (1882), 213–225.

[Mu 84] Murray, J. D. – *Asymptotic Analysis.* Applied mathematical sciences, 48. Springer-Verlag, New York, 1984.

[Ne 85] Nesterenko, Yu. V. – *On the linear independence of numbers.* Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1 Mat. Mekh. 1985, no. 1, 46–54; English transl., Moscow Univ. Math. Bull. **40**:1 (1985), 69–74.

[Ne 96] Nesterenko, Yu. V. – *A few remarks on $\zeta(3)$.* Mat. Zametki [Math. Notes] **59**:6 (1996), 865–880.

[Pa 95] Patterson, S.J. – *An Introduction to the Theory of the Riemann Zeta-Function.* Cambridge studies in advanced mathematics, 14. Cambridge University Press, 1995.

[Po 79] van der Poorten, A. – *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$ (An informal report).* Math. Intelligencer **1**:4 (1978/79), 195–203.

[Pr 96] Prévost, M. – *A new proof of the irrationality of $\zeta(3)$ using Padé approximants.* J. Comput. Appl. Math. **67** (1996), 219–235.

[Ri 00] Rivoal, T. – *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331**:4 (2000), 267–270.

[Ri 02] Rivoal, T. – *Irrationalité d'au moins un des neuf nombres* $\zeta(5)$*,* $\zeta(7)$*, ...,* $\zeta(21)$*.* Acta Arith. **103**:2 (2002), 157–167.

[Ri 03] Rivoal, T. – *Séries hypergéométriques et irrationalité des valeurs de la fonction zêta.* Actes des journées arithmétiques de Lille (July, 2001), J. Théorie Nombres Bordeaux **15**:1 (2003), 351–365.

[Ši 06] Širola, B. – *Riemannova zeta funkcija.* Bilješke s predavanja na poslijediplomskom studiju PMF-MOa, Zagreb, 2006.

[Sl 66] Slater, L. J. – *Generalized hypergeometric functions.* Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

[Zu 01a] Zudilin, W. – *Irrationality of values of zeta function at odd integers.* Uspekhi Mat. Nauk [Russian Math. Surveys] **56**:2 (2001), 215–216.

[Zu 01b] Zudilin, W. – *Irrationality of values of zeta-function.* Contemporary research in mathematics and mechanics, Proceedings of the XXIII Conference of Young Scientists of the Department of Mechanics and Mathematics, Publ. Dept. Mech. Math. MSU, Moscow (2001), Part 2, 127–135.

[Zu 01c] Zudilin, W. – *One of the eight numbers* $\zeta(5)$*,* $\zeta(7)$*, ...,* $\zeta(17)$*,* $zeta(19)$ *is irrational.* Mat. Zametki [Math. Notes] **70**:3 (2001), 472–476.

[Zu 01d] Zudilin, W. – *One of the numbers* $\zeta(5)$*,* $\zeta(7)$*,* $\zeta(9)$*,* $\zeta(11)$ *is irrational.* Uspekhi Mat. Nauk [Russian Math. Surveys] **56**:4 (2001), 149–150.

[Zu 02] Zudilin, W. – *Irrationality of values of Riemann's zeta function.* Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. [Russian Acad. Sci. Izv. Math.] **66**:3 (2002), 49–102.

[Zu Int] Zudilin, W. – *Zeta values on the Web.* Started on February 5, 2002, Last modified on July 5, 2008.
`http://wain.mi.ras.ru/zw/index.html`