Lagrangeov i Markovljev spektar

3. domaća zadaća, 10.5.2019. skica rješenja

1. Zamijenimo svaki čvor (u, v) u stablu Christoffelovih parova s matricom $T_{uv} = \left[\begin{smallmatrix} |u|_b & |v|_b \\ |u|_a & |v|_a \end{smallmatrix}\right]$. Tada će lijevo dijete (u, uv) toga čvora biti zamijenjeno sa $T_{uv}\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, a desno dijete (uv, v) sa $T_{uv}\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Verižnom razlomku $[a_0, a_1, \dots, a_k] = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, 1]$ možemo pridružiti matricu
$$M = \begin{bmatrix} K(a_0, \dots, a_{k-1}, a_k - 1) & K(a_0, \dots, a_{k-1}) \\ K(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k - 1) & K(a_1, \dots, a_{k-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k,$$
gdje je K oznaka za kontinuantu (usporedi jednakost (4.6) u skripti).

   Lako se vidi da je matrica $M\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ pridružena verižnom razlomku $[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, 2]$ ako je k paran, a $[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + 1]$ ako je k neparan. Za matricu $M\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ vrijedi obratno. Sada se korištenjem ovih činjenica lako dobiva tvrdnja zadatka.

2. Imamo $x = \frac{-15+\sqrt{1517}}{34} = [0\,\overline{1\,2\,2\,1\,1\,1}] = [0\,1\,2\,2\,\overline{1\,1\,1\,1\,2\,2}] = [0\,1\,\overline{2\,2\,1\,1\,1\,1}]$, pa je ovdje $p = \chi(aab) = 111122$ i $\widetilde{p} = 221111$. Stavimo $x = [a_0 s]$, gdje je $a_0 = 0$ te provjerimo da je x tipa II jer vrijedi uvjet 1, tj. $s = u\widetilde{p}^\infty$, gdje je $u = 1$ sufiks neparne duljine od $\widetilde{p}$. To znači da je $n \in \mathbb{N}$ dobar ako i samo ako je $n+1$ indeks prvog slova nekog $\widetilde{p}$ u nizu $a_0 s$, odnosno $n + 1 = 2 + 6k$, tj. $n = 6k + 1$ za $k \in \mathbb{N}_0$.

   Računom dobivamo da je $\max\{p_{19}, q_{19}\} < 10^5 < \max\{p_{20}, q_{20}\}$, pa su konvergente s dobrim indeksima
$$\frac{p_1}{q_1} = 1, \qquad \frac{p_7}{q_7} = \frac{31}{44}, \qquad \frac{p_{13}}{q_{13}} = \frac{1208}{1715}, \qquad \frac{p_{19}}{q_{19}} = \frac{47081}{66841}$$
i lako je izračunati da uz $n \in \{0, 1, \dots, 19\}$ samo za te konvergente vrijedi $L(x)q_n|q_n x - p_n| < 1$, gdje je $L(x) = \sqrt{9 - \frac{4}{m^2}} = \sqrt{9 - \frac{4}{13^2}} = \frac{\sqrt{1517}}{13}$.

3. Očito je $C'(2) = C(2) + \mathbb{Z}$, gdje je $C(2)$ skup iracionalnih brojeva iz $(0, 1)$ kojima je svaki parcijalni kvocijent ≤ 2. Imamo $C(2) \subset J \cup K$, pri čemu smo označili
$$J = \big[[0, 2, \overline{1, 2}], [0, 2, \overline{2, 1}]\big] = \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \subset [0.366, 0.423],$$
$$K = \big[[0, 1, \overline{1, 2}], [0, 1, \overline{2, 1}]\big] = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}-1\right] \subset [0.577, 0.733].$$
   Stoga je $C'(2) \cap [0, 1] = [0.366, 0.423] \cup [0.577, 0.733]$ i
$$\begin{aligned} C(2) + C(2) &\subset (J \cup K) + (J \cup K) = (J + J) \cup (J + K) \cup (K + K) \\ &\subset [0.732, 0.846] \cup [0.943, 1.156] \cup [1.154, 1.466], \end{aligned}$$
pa je $\big(C'(2) + C'(2)\big) \cap [0, 1] \subset [0, 0.466] \cup [0.732, 0.846] \cup [0.943, 1]$. Također je
$$\begin{aligned} C(2) + C(2) + C(2) &\subset (J \cup K) + (J \cup K) + (J \cup K) \\ &= (J + J + J) \cup (J + J + K) \cup (J + K + K) \cup (K + K + K) \\ &\subset [1.098, 1.269] \cup [1.309, 1.579] \cup [1.520, 1.889] \cup [1.731, 2.199], \end{aligned}$$
pa je $\big(C'(2) + C'(2) + C'(2)\big) \cap [0, 1] \subset [0, 0.269] \cup [0.309, 1]$. Zato možemo uzeti npr. $\alpha = \gamma = 0.3$ i $\beta = 0.5$.

4. Najprije vidimo da je $L(\overline{2\,1\,2\,1\,2}) = 2 + 2[0\,\overline{1\,2\,2\,1\,2}] = \frac{\sqrt{290}}{5} = 3.405\ldots$. Želimo pokazati da je $\min\{M(A) : 21212$ se pojavljuje u $A\} = L(\overline{2\,1\,2\,1\,2})$. Neka je A takav da sadrži 21212 i $M(A) = \lambda_0(A)$, što po Lemi o kompaktnosti možemo pretpostaviti. Tada je

$$M(A) = \lambda_0(A) = 2 + [0, 1, 2, \ldots] + [0, 1, 2, \ldots].$$

No, ako je jedan od gornjih pribrojnika oblika $[0, 1, 2, 1, \ldots]$ ili $[0, 1, 2, 2, 2 \ldots]$, onda je

$$M(A) \geq 2 + [0\,1\,2\,1\,\overline{1\,2}] + [0\,1\,2\,\overline{2\,1}] > 3.423 > \frac{\sqrt{290}}{5} \quad \text{ili}$$
$$M(A) \geq 2 + [0\,1\,2\,2\,2\,\overline{2\,1}] + [0\,1\,2\,\overline{2\,1}] > 3.409 > \frac{\sqrt{290}}{5},$$

što znači da je dovoljno promatrati slučaj $M(A) = \lambda_0(A) = 2+[0, 1, 2, 2, 1, u]+[0, 1, 2, 2, 1, v]$, gdje je $0 < u \leq v < 1$. Budući da je $(1, 2, 2, 1)$ simetričan blok, možemo primijeniti Bumbyjevu Lemu 6.16 iz skripte za $n = 5$, $f(z) = [0, 1, 2, 2, 1, z]$, $x = [2, 1, 2, 2, 1, u]$, $y = v$ te iz $\lambda_0(A) \geq \lambda_5(A)$ slijedi $x \geq y$ i $M(A) = \lambda_0(A) \geq x+f(x)$. Dakle, $[2, 1, 2, 2, 1, u] \geq v \geq u$, pa vrijedi $u \leq [\overline{2\,1\,2\,2\,1}]$ jer bi u protivnom imali $u > [\overline{2\,1\,2\,2\,1}]$ te zato $u \leq [2, 1, 2, 2, 1, u] < [2\,1\,2\,2\,1\,\overline{2\,1\,2\,2\,1}] = u$ što nije moguće. Sada je $x = [2, 1, 2, 2, 1, u] \geq [\overline{2\,1\,2\,2\,1}]$, pa budući da je $x \mapsto x + f(x)$ rastuća funkcija, imamo

$$M(A) \geq x + f(x) \geq [\overline{2\,1\,2\,2\,1}] + [0\,1\,2\,2\,1\,\overline{2\,1\,2\,2\,1}] = \frac{\sqrt{290}}{5}.$$

Preostaje još dokazati da je $\max\{M(A) : 21212$ se ne javlja u $A \in \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}\} = L(\overline{1\,2\,1\,1\,1\,2}) = 2 + [0\,\overline{1\,2\,1\,1\,1\,2}] + [0\,\overline{1\,1\,1\,2\,1\,2}] = \frac{\sqrt{1365}}{11} = 3.358\ldots$. Za niz A koji ne sadrži 21212 i $M(A) = \lambda_0(A)$ je najveći mogući imamo $M(A) = \lambda_0(A) = [2, 1, 2, u] + [0, 1, 1, v]$ za neke $u, v \in (0, 1)$. Sada redom biramo parcijalne kvocijente tako da se ne pojavi 21212, a da maksimiziramo svaki od verižnih razlomaka. Dobivamo

$$[2, 1, 2, u] \leq [2\,1\,2\,1\,\underbrace{1}_{\text{I.}}\,1\,\underbrace{2\,1\,2}_{\text{II.}}\ldots] \leq [\overline{2\,1\,2\,1\,1\,1}] \qquad \text{i}$$
$$[0, 1, 1, v] \leq [0\,1\,1\,1\,\underbrace{2\,1\,2}_{\text{III.}}\ldots] \leq [0\,1\,1\,1\,\overline{2\,1\,2\,1\,1\,1}] = [0\,\overline{1\,1\,1\,2\,1\,2}],$$

gdje je I.=“zbog zabrane bloka 21212”, II.=“isto kao početni blok”, III.=“nastavak kao gore”. Time smo dokazali i tvrdnju za lijevi kraj rupe.

5. Skup vrlo dobro aproksimabilnih brojeva je očito invarijantan na translaciju za 1, pa je dovoljno promatrati vrlo dobro aproksimabilne brojeve iz intervala $(0, 1)$.

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo skup $E_{k,n} = [0, 1] \cap \bigcup_{m=0}^{n} \left[\frac{m}{n} - \frac{1}{n^{2+\frac{1}{k}}}, \frac{m}{n} + \frac{1}{n^{2+\frac{1}{k}}}\right]$.

Neka je za vrlo dobro aproksimabilan $\alpha \in (0, 1)$ dan $\varepsilon > 0$ iz definicije. Tada za sve prirodne brojeve $k > \frac{1}{\varepsilon}$ mora vrijediti $\alpha \in E_{k,n}$ za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$, tj. $\alpha \in \cap_{N\geq 1} \cup_{n\geq N} E_{k,n}$.

Zato su vrlo dobro aproksimabilni brojevi iz $(0, 1)$ sadržani u $S = \bigcup_{k\geq 1} \Big(\bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} E_{k,n}\Big)$.

Imamo za Lebesgueovu mjeru

$$\Big|\bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} E_{k,n}\Big| \leq \Big|\bigcup_{n\geq N'} E_{k,n}\Big| \leq \sum_{n\geq N'} |E_{k,n}| \leq \sum_{n\geq N'} (n + 1)\frac{2}{n^{2+\frac{1}{k}}} < 4 \sum_{n\geq N'} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{k}}}$$

za svaki $N' \in \mathbb{N}$. Budući da red $\sum_{n\geq 1} n^{-1-\frac{1}{k}}$ konvergira, to niz $\left(\sum_{n\geq N} n^{-1-\frac{1}{k}}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ teži u 0, pa zaključujemo da je $|\cap_{N\geq 1} \cup_{n\geq N} E_{k,n}| = 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Iz toga slijedi da je Lebesgueova mjera skupa S jednaka 0, pa zato i skupa svih vrlo dobro aproksimabilnih brojeva u $(0, 1)$, a iz toga dobivamo tvrdnju zadatka.