Lagrangeov i Markovljev spektar
3. domaća zadaća, 10.5.2019.

Rok za predaju je 3.6.2019.

1. Stern–Brocotovo stablo dobili smo tako da smo u stablu Christoffelovih parova svaki par (u, v) zamijenili s nagibom riječi uv, tj. sa $|uv|_b/|uv|_a$. Dokažite da svaki čvor $q = [a_0, a_1, \ldots, a_k]$ $(a_k > 1)$ u Stern–Brocotovom stablu ima djecu
$$[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + 1] \qquad \text{i} \qquad [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k - 1, 2].$$

2. U skladu s terminologijom vezanom uz Bombierijev Teorem 4.62 u skripti, za $x = \frac{-15+\sqrt{1517}}{34}$ odredite kojeg je tipa te koji $n \in \mathbb{N}$ su dobri. Za konvergente $\frac{p_n}{q_n}$ od x takve da je $\max\{p_n, q_n\} < 10^5$ provjerite koje od njih zaista zadovoljavaju
$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{L(x) q_n^2}.$$

3. Neka je
$$C'(2) = \big\{ [a_0, a_1, a_2, \ldots] \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \, : \, a_0 \in \mathbb{Z},\, a_i \in \{1, 2\} \text{ za } i \geq 1 \big\}.$$
Poznato je da je $C'(2) + C'(2) + C'(2) + C'(2) = \mathbb{R}$, tj. svaki se realan broj može prikazati kao suma četiri elementa iz $C'(2)$. Odredite neke $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$ takve da
$$\alpha \notin C'(2), \quad \beta \notin C'(2) + C'(2), \quad \gamma \notin C'(2) + C'(2) + C'(2).$$

4. Dokažite da je
$$\big(L(\overline{1\,2\,1\,1\,1\,2}), L(\overline{2\,1\,2\,1\,2}) \big) = \big(\frac{\sqrt{1365}}{11}, \frac{\sqrt{290}}{5} \big)$$
rupa u Lagrangeovom i Markovljevom spektru.

5. Za realan broj α kažemo da je *vrlo dobro aproksimabilan* ako postoji pozitivan realan broj ε takav da je
$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} \text{ za beskonačno mnogo racionalnih brojeva } \frac{p}{q}.$$
Lebesgueova mjera skupa svih vrlo dobro aproksimabilnih brojeva je nula. Dokažite ovu tvrdnju potpuno, tj. bez pozivanja na druge rezultate.