Lagrangeov i Markovljev spektar

2. domaća zadaća, 25.2.2019.

skica rješenja

1. Iz definicije slijedi da su promatrane vertikalne udaljenosti oblika $\delta = \frac{q}{p}x - y$, gdje su $x \in \{1, \dots, q\}$ i $y \in \mathbb{N}_0$ koordinate cjelobrojne točke na putu koji odozdo diskretizira dužinu $\overline{AB}$. Iz uvjeta zadatka je $\delta > 0$ budući da $\overline{AB}$ ne sadrži drugih cjelobrojnih točaka osim A i B. Za svaki takav x, mora biti $\delta < \frac{p+q}{p}$ jer bi u protivnom bilo $\frac{q}{p}(x-1) - (y+1) \geq 0$, što znači da je točka $(x-1, y+1)$ uključena u navedeni put, a onda to nikako ne može vrijediti za točku (x, y). Dakle, vidimo da vertikalne udaljenosti poprimaju vrijednosti iz skupa $\{\frac{i}{p} : i = 1, \dots, p+q-1\}$, a budući da je cjelobrojnih točaka različitih od A i B na tom putu u rešetki točno $p+q-1$, treba još samo pokazati da su sve vertikalne udaljenosti različite. No, ako bi dvije cjelobrojne točke K i L na navedenom putu imale iste vertikalne udaljenosti od AB, onda bi KL bio paralelan AB, a budući da je $|KL| < |AB|$, vrijedilo bi da je cjelobrojna točka $A + \overrightarrow{KL}$ na otvorenoj dužini AB što nije moguće.

2. Prva tvrdnja slijedi direktno iz Korolara 4.9 u skripti. Stoga je $|u|_a|v|_b = 1 + |u|_b|v|_a$. Modulo $p + q = |w|_a + |w|_b = |u|_a + |v|_a + |u|_b + |v|_b$ je

$$\begin{aligned} |u|q &\equiv (|u|_a + |u|_b)(|u|_b + |v|_b) \equiv |u|_a|u|_b + |u|_b^2 + |u|_a|v|_b + |u|_b|v|_b \\ &\equiv 1 + |u|_a|u|_b + |u|_b^2 + |u|_b|v|_a + |u|_b|v|_b \equiv 1 + |u|_b(|u|_a + |u|_b + |v|_a + |v|_b) \equiv 1 \end{aligned}$$

te zbog $|u| < |w| = p + q$, dobivamo $|u| = q^*$. Analogno se dokazuje $|v| = p^*$.

3. Budući da je obratna riječ gornje Christoffelove riječi donja Christoffelova riječ, vidimo da je dovoljno tvrdnju dokazati za donje Christoffelove riječi. Neka je $w = uv$ donja Christoffelova riječ sa svojom standardnom faktorizacijom.

   Pretpostavimo da su u i v prave Christoffelove riječi. Tada po Teoremu 4.6 imamo $w = apb$, $u = amb$, $v = anb$, gdje su p, m, n palindromi. Vrijedi $w = ambanb$, $p = mban$, $p = \widetilde{p} = nabm$ i zato $w = anabmb = v'u'$ za riječi $v' = ana$ i $u' = bmb$ koje su očito palindromi. Ako u nije prava, onda je $u = a$, pa je $w = a^n b$, $n \geq 1$ te je $v = a^{n-1}b$ i onda je $v' = a^n$, $u' = b$. Slično se pokazuje ako v nije prava.

   Da bismo pokazali jedinstvenost, pretpostavimo da se $w = a_0 \dots a_{d-1}$ može prikazati kao produkt dvaju palindroma na dva različita načina

$$w = (a_0 \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_{d-1}) = (a_0 \dots a_l)(a_{l+1} \dots a_{d-1}),$$

   gdje su riječi u zagradama palindromi i $k \neq l$. Iz prvog rastava od w lako vidimo da vrijedi $a_i = a_{k-i}$ za sve $i \in \mathbb{Z}$ pri čemu indekse gledamo modulo d. Iz drugog rastava u produkt palindroma je $a_i = a_{l-i}$ za sve cijele i uz isti dogovor oko indeksa. Stoga je $a_i = a_{k-i} = a_{l-(k-i)} = a_{i+l-k}$ iz čega vidimo da je w ciklički periodska riječ s periodom $|k - l| \in \{1, \dots, d-1\}$, pa zato i nekim periodom koji je pravi djelitelj od d. Dakle, $w = u^r$ za neki $r \geq 2$ što povlači da r dijeli najveći zajednički djelitelj $(|w|_a, |w|_b)$ koji je iz definicije Christoffelove riječi jednak 1. Ovom kontradikcijom je završen dokaz.

Geometrijska interpretacija je sljedeća. Neka w diskretizira $\overline{AB}$ odozdo i neka je D točka odgovarajućeg puta u rešetki koja je najudaljenija od AB. Tada su dijelovima puta od A do D i od D do B pridruženi palindromski faktori od w.

4. (a) Budući da su q i n relativno prosti, vidimo da q generira cikličku grupu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Stoga je graf G' sa skupom vrhova $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ i bridovima $i \to j$ ako je $j \equiv i + q \pmod{n}$ ciklus. Ovaj se graf podudara s grafom G iz zadatka. Zaista, svaki brid u G je brid u G' jer je $-p \equiv q \pmod{n}$. Nadalje, za svaki brid $i \to j$ u G' imamo ili $i + q < n$, pa je tada $j = i + q$ tako da je brid i u G ili $i + q \geq n$ te tada zbog $i + q < 2n$ vrijedi $j = i + q - n = i - p$, pa je ponovno brid i u G.

   (b) Možemo pretpostaviti da p i q nisu 1 jer je inače tvrdnja trivijalna. Neka je najprije w riječ duljine $n = p + q - 1$. Neka je H neorijentirani graf dobiven iz grafa u (a) dijelu zadatka uklanjanjem vrha 0 i brisanjem orijentacija bridova. Ako postoji brid između i i j u H, onda, uzevši da je $i < j$, vidimo da je $j = i + q$ ili $i = j - p$, pa je $a_i = a_j$ iz pretpostavke o periodičnosti. Kako je H povezan graf, dobivamo da su sva slova u w ista. Ako je w dulja od n, onda gledajući uzastopne faktore od w duljine n, zaključujemo da je zbog $n \geq 2$, nužno w potencija jednog slova.

   (c) Bez smanjena općenitosti uzmimo da u nije prazna riječ. Imamo $w = \widetilde{w} = \widetilde{s\widetilde{u}} = s\widetilde{u}$, pa je w prefiks od $uw = us\widetilde{u}$. Zato je uw prefiks od uuw, pa je uuw prefiks od $uuuw$ itd. Zaključujemo da je w prefiks od u^∞ i stoga w ima period $|u|$.

   (d) Pretpostavimo najprije da su obje u i v prave Christoffelove riječi. Tada je kao u Zadatku 3, $u = amb$, $v = anb$, $w = ambanb$, gdje su m, n, $mban$ palindromi. U tom zadatku smo pokazali da se w prikazuje kao produkt dva palindroma $w = (ana)(bmb)$. Stoga je $p = an$ i $w' = nabmb$, pa je $w'p = nabmban$ palindrom. Kako $w'p$ ima sufiks $mban$ koji je palindrom, prema (c) dijelu ovog zadatka slijedi da $w'p$ ima za period duljinu odgovarajućeg prefiksa, tj. nab, a to je isto kao i duljina od $v = anb$. Budući da je v pravi sufiks od w, pa stoga i faktor od $w'p$, zaključujemo da $w'p$ ima periodski uzorak v.

   Ako u i v nisu obje prave Christoffelove riječi, onda je ili $w = a^n b$ ili $w = ab^n$ za $n \in \mathbb{N}$. U prvom je slučaju $u = a$, $v = a^{n-1}b$, $w'p = a^{n-1}ba^{n-1}$ što ima v kao periodski uzorak, dok je u drugom slučaju $u = ab^{n-1}$, $v = b$, $w'p = b^n$ te je opet v periodski uzorak.

   Konačno, ako je $|w| \geq 3$, onda je $|v| < |v| + |w| - 2 = |p| + |w'| = |w'p|$, pa je period netrivijalan.

   (e) Iz (d) dijela zadatka vidimo da m ima period $|v|$, a simetrično se pokazuje da ima period $|u|$. Pozovemo se još na Korolar 4.11 iz skripte.

5. Iz definicije ili koristeći Teorem 4.4, dobivamo da je $w = (aaabaabaab)(aab)$ s naznačenom standardnom faktorizacijom.

   U 1. zadatku je niz vertikalnih udaljenosti redom $\frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{12}{9}, \frac{3}{9}, \frac{7}{9}, \frac{11}{9}, \frac{2}{9}, \frac{6}{9}, \frac{10}{9}, \frac{1}{9}, \frac{5}{9}, \frac{9}{9}$.

   U 2. zadatku je $|u| = 10$, $|v| = 3$ i imamo $10 \cdot 4 \equiv 3 \cdot 9 \equiv 1 \pmod{13}$.

   U 3. zadatku je faktorizacija $w = (aaa)(baabaabaab)$.

   U 4e. zadatku $m = aabaabaabaa$ ima periode 10 i 3.

   Markovljeva trojka pridružena riječi w je $(51641, 2012674, 13)$.

   Riječ w^∞ zadovoljava Markovljevo svojstvo uz parametre $K = 3$, $N = 11$.

6. Označimo jednadžbu $x^2+y^2+z^2=kxyz$ sa $(*k)$. Ako je $(x',y',z')\in\mathbb{N}^3$ rješenje od $(*k)$ za neki $k\in\mathbb{N}$, onda je (kx',ky',kz') rješenje od $(*1)$. Gledajući modulo 3, dobivamo da su sva tri broja djeljivi s 3 te je $(\frac{kx'}{3},\frac{ky'}{3},\frac{kz'}{3})\in\mathbb{N}^3$ rješenje od $(*3)$. Iz Korolara 4.25 u skripti slijedi da su zadnji dobiveni brojevi u parovima relativno prosti, pa mora k dijeliti 3, tj. $k\in\{1,3\}$. Također vidimo da je pridruživanje $(x',y',z')\mapsto(\frac{x'}{3},\frac{y'}{3},\frac{z'}{3})$ bijekcija između rješenja od $(*1)$ i rješenja od $(*3)$.

7. (Hurwitz, 1907.) Budući da rješenja gledamo u skupu prirodnih brojeva, očito je dovoljno promatrati $k\in\mathbb{N}$. Slučaj $n=2$ je vrlo jednostavan. Naime x_1 mora dijeliti x_2^2 i obratno, pa skraćivanjem jednadžbe s kvadratom najvećeg zajedničkog djelitelja od x_1 i x_2, vidimo da novo rješenje može biti samo $(1,1)$ što daje sva rješenja $(x_1,x_2)=(x,x)$, $x\in\mathbb{N}$ za $k=2$ dok za ostale $k\in\mathbb{N}$ nema rješenja. U nastavku pretpostavljamo da je $n\geq 3$.

   Označimo jednadžbu $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=kx_1x_2\cdots x_n$ sa $(*)$. Ako je $(x_1,\ldots,x_n)$ rješenje $(*)$ u $\mathbb{N}^n$, onda se, gledajući danu jednadžbu kao kvadratnu jednadžbu u x_1, lako vidi da je i $(kx_2\cdots x_n-x_1,x_2,\ldots,x_n)$ također rješenje u $\mathbb{N}^n$. Primijetimo da iz pozitivnosti $x_2,\ldots,x_n$ zbog $(*)$ slijedi i pozitivnost nove prve koordinate. Slično dobivamo rješenja uzevši umjesto prve ostale koordinate. Nazovimo ta rješenja susjedima početnog rješenja. Rješenje nazivamo fundamentalnim ako nijedan od njegovih susjeda nema strogo manju sumu koordinata. Ako rješenje nije fundamentalno, možemo se od njega pomaknuti na neki od susjeda s manjom sumom koordinata. Budući da su te sume prirodni brojevi, tako iz svakog rješenja možemo nakon konačno koraka doći do nekog fundamentalnog rješenja.

   Iz definicije fundamentalnog rješenja slijedi da ono zadovoljava $kx_2\cdots x_n-x_1\geq x_1$, tj. $kx_1x_2\cdots x_n\geq 2x_1^2$ te analogno dobivamo da je rješenje fundamentalno ako i samo ako je $U=x_1^2+\cdots+x_n^2=kx_1x_2\cdots x_n\geq 2x_i^2$ za svaki $i\in\{1,\ldots,n\}$.

   Neka je sada $(x_1,\ldots,x_n)$ jedno fundamentalno rješenje. Bez smanjenja općenitosti, zbog simetrije od $(*)$, možemo uzeti $x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_n\geq 1$. Kako je $U-2x_i^2\geq U-2x_1^2\geq 0$, sumiranjem po $i\in\{1,\ldots,n\}$ dobivamo $nU-2U\geq n(U-2x_1^2)\geq 0$. Kvadriranjem ove nejednakosti dobivamo $(n-2)^2U^2\geq n^2(U^2-4Ux_1^2+4x_1^4)$, odnosno nakon sređivanja, $(n-1)U^2\leq n^2(U-x_1^2)x_1^2$. No, $U-x_1^2=x_2^2+\cdots+x_n^2\leq(n-1)x_2^2$, pa je $(n-1)U^2\leq n^2(n-1)x_2^2x_1^2$, tj. $U^2\leq n^2x_1^2x_2^2$ ili $k^2x_3^2\cdots x_n^2\leq n^2$. Budući da su svi x_i prirodni brojevi, odavde zaključujemo da je $k\leq n$, tj. jednadžba $(*)$ nema fundamentalnih, pa ni ikakvih rješenja za $k>n$.

   Za $k=n$ vidimo da moraju vrijediti jednakosti $x_2=x_3=\ldots=x_n$ i $x_3=\ldots=x_n=1$, pa uvrštavanjem u $(*)$ dobivamo $x_1^2+n-1=nx_1$ iz čega je $x_1=1$ ili $x_1=n-1$. Lako se provjeri da samo prva vrijednost daje fundamentalno rješenje, pa je jedino $(1,1,\ldots,1)$ fundamentalno rješenje, te sva rješenja jednadžbe $(*)$ čine strukturu stabla uz gore opisanu relaciju susjedstva koja određuje susjedne čvorove.