Lagrangeov i Markovljev spektar
2. domaća zadaća, 25.2.2019.

Rok za predaju je 25.3.2019.

1. Neka su A i $B = A + (p, q)$ cjelobrojne točke takve da su p i q relativno prosti prirodni brojevi. Promatramo cjelobrojne točke različite od A i B na putu koji odozdo diskretizira dužinu $\overline{AB}$. Dokažite da vertikalne udaljenosti tih cjelobrojnih točaka od dužine $\overline{AB}$ čine upravo skup $\{\frac{i}{p} : i = 1, \ldots, p + q - 1\}$.

2. Neka je $w = uv$ standardna faktorizacija prave donje Christoffelove riječi nagiba $\frac{|w|_b}{|w|_a} = \frac{q}{p}$. Dokažite da matrica $\begin{bmatrix} |u|_a & |v|_a \\ |u|_b & |v|_b \end{bmatrix}$ ima determinantu 1. Dokažite da je $|u| = q^*$, $|v| = p^*$, gdje su $p^*, q^* \in \{1, \ldots, p + q - 1\}$ redom inverzi od p, q modulo $p + q$.

3. Dokažite da se svaka prava Christoffelova riječ može prikazati kao produkt dva palindroma i takav prikaz je jedinstven.

   Koja je geometrijska interpretacija takve faktorizacije?

4. Dokažite sljedeće tvrdnje.

   (a) Neka su p i q relativno prosti prirodni brojevi i $n = p + q$. Orijentirani graf s vrhovima $0, 1, \ldots, n - 1$ i usmjerenim bridovima $i \to j$ ako je $j = i + q$ ili $j = i - p$ je ciklus.

   (b) Neka su p i q relativno prosti prirodni brojevi i w riječ duljine barem $p + q - 1$ koja ima periode p i q. Tada je w potencija jednog slova.

   (c) Ako je $w = us$, gdje su w i s palindromi, onda je w periodska riječ s periodom $|u|$.

   (d) Neka je $w = aw' \in \{a, b\}^*$ prava Christoffelova riječ sa standardnom faktorizacijom $w = uv$. Neka je p prefiks duljine $|v| - 1$ od w. Tada je $w'p$ palindrom i ima v kao periodski uzorak, pa mu je $|v|$ period koji je netrivijalan za $|w| \geq 3$.

   (e) Ako je $w = amb$ Christoffelova riječ sa standardnom faktorizacijom uv, onda m ima relativno proste periode $|u|$ i $|v|$.

   Primijetite da je $|m| = |u| + |v| - 2$ te usporedite s rezultatom u (b) dijelu ovog zadatka.

5. Provjerite sve tvrdnje zadataka 1, 2, 3, 4e za donju Christoffelovu riječ w nagiba $\frac{4}{9}$.

   Odredite Markovljevu trojku pridruženu riječi w.

   Uz koje najmanje parametre K i N riječ w^∞ zadovoljava Markovljevo svojstvo?

6. Dokažite da za cijeli broj k jednadžba $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$ ima rješenje $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ ako i samo ako je $k = 1$ ili $k = 3$.

7. Dokažite da za prirodan $n \geq 2$ i cijeli k jednadžba $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = kx_1x_2 \cdots x_n$ nema rješenja u prirodnim brojevima $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ako je $k > n$.

   Kakva je struktura rješenja za $k = n$?