Lagrangeov i Markovljev spektar

1. domaća zadaća, 17.12.2018.

skica rješenja

1. Kombinatorna interpretacija kontinuanti dokazuje se koristeći indukciju usporedbom početnih vrijednosti i rekurzije za p_n u formuli (1.2) iz skripte. Navodimo samo korak indukcije. Pretpostavimo da interpretacija vrijedi za brojnike verižnih razlomaka koji imaju manje od $n+1$ parcijalnih kvocijenata. Popločavanja $1 \times (n+1)$ ploče s uvjetima visina $a_0, a_1, \dots, a_n$ možemo podijeliti u dva disjunktna skupa: popločavanja koja završavaju kvadratićem, a takvih je $K(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \cdot a_n$ i popločavanja koja završavaju dominom, a takvih je $K(a_0, a_1, \dots, a_{n-2})$. Dakle, ukupno ima $a_n K(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) + K(a_0, a_1, \dots, a_{n-2}) = K(a_0, a_1, \dots, a_n)$ popločavanja.

   Identitet $K(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0) = K(a_0, a_1, \dots, a_n)$ vrijedi jer popločavanju $1 \times (n+1)$ ploče s uvjetima visina $a_0, a_1, \dots, a_n$ možemo pridružiti popločavanje $1 \times (n+1)$ ploče s uvjetima visina $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ koje dobijemo rotacijom početnog popločavanja za 180°. Očito je takvo pridruživanje bijektivno.

   Posljednji identitet dobivamo tako da promatramo je li u konkretnom popločavanju $1 \times (n+1)$ ploče s uvjetima visina $a_0, a_1, \dots, a_n$ na poljima ℓ i $\ell+1$ domina (takvih je $K(a_0, \dots, a_{\ell-1}) K(a_{\ell+2}, \dots, a_n)$) ili nije (takvih je $K(a_0, \dots, a_\ell) K(a_{\ell+1}, \dots, a_n)$).

2. Ovu ćemo tvrdnju dokazati indirektno.

   Pretpostavimo da je α algebarski broj stupnja d. Tada prema Liouvilleovom teoremu postoji konstanta $c(\alpha) > 0$ takva da je $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^d}$ za sve racionalne brojeve $\frac{p}{q}$ različite od α.

   Neka je k po volji izabran prirodan broj. Tvrdimo da je skup $A_k = \{n \in \mathbb{N} : q_n^k < q_{n+1}\}$ beskonačan.

   > Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $q_n^k \geq q_{n+1}$, tj. $k \log q_n \geq \log q_{n+1}$. Iteracijom dobivamo da za sve $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $k^i \log q_{n_0} \geq \log q_{n_0+i}$, iz čega slijedi $i \log k + \log\log q_{n_0} \geq \log\log q_{n_0+i}$ (primjetimo da je za $m \geq 1$ nužno $q_m > 1$, pa je i $\log q_m > 0$). Sada je
   >
   > $$\frac{i \log k}{n_0 + i} + \frac{\log\log q_{n_0}}{n_0 + i} \geq \frac{\log\log q_{n_0+i}}{n_0 + i} \qquad \text{za sve } i \in \mathbb{N},$$
   >
   > što je u kontradikciji sa činjenicama:
   >
   > $$\frac{i \log k}{n_0 + i} < \log k, \quad \lim_{i \to \infty} \frac{\log\log q_{n_0}}{n_0 + i} = 0, \quad \limsup_{i \to \infty} \frac{\log\log q_{n_0+i}}{n_0 + i} = \infty.$$

   Uzmimo prirodan broj k tako da je $2^k > \frac{1}{c(\alpha)}$ i uzmimo $n \in A_{k+d}$ tako da je $q_n > 2$. Onda vrijedi

   $$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \overset{(1.14)}{<} \frac{1}{q_n q_{n+1}} \overset{(n \in A_{k+d})}{<} \frac{1}{q_n^{k+d+1}} < \frac{1}{q_n^{k+d}} = \frac{1}{q_n^k} \cdot \frac{1}{q_n^d} \overset{(q_n > 2)}{<} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{q_n^d} < \frac{c(\alpha)}{q_n^d}.$$

   Došli smo do kontradikcije, što pokazuje da α ne može biti algebarski broj.

3. Pretpostavimo da se blok $1\,1\,1\,2\,2\,2$ pojavljuje beskonačno mnogo puta u nizu parcijalnih kvocijenata verižnog razlomka od α. Neka je i indeks parcijalnog kvocijenta gdje se pojavljuje podcrtani broj $1\,1\,1\,\underline{2}\,2\,2$ unutar bloka. Tada prema Teoremu 1.8.a, imamo $\lambda_i(\alpha) \geq [2,2,2]+[0,1,1,1,1] = \frac{12}{5}+\frac{3}{5} = 3$. Budući da to vrijedi za beskonačno mnogo $i \in \mathbb{N}$, zaključujemo $L(\alpha) \geq 3$ što je protivno uvjetu zadatka.

4. Prema Korolaru 1.14. možemo prepostaviti da se u verižnom razlomku od α pojavljuju samo parcijalni kvocijenti 1 i 2 i to beskonačno mnogo jednih i drugih. To znači da se beskonačno puta pojavljuje blok $2\,1$, pa imamo prema Teoremu 1.8. da je za svaki $\varepsilon > 0$

$$L(\alpha) > [2,1,\overline{1,2}] + [0,\overline{2,1}] - \varepsilon = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}+6\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) - \varepsilon = 2.9433\ldots - \varepsilon.$$

5. Pretpostavimo da je zadano linearno preslikavanje automorf forme f. Ako sa ξ označimo jedan korijen od $f(x,1)$, iz (2.8) je $\xi = \left[\begin{smallmatrix} p & q \\ r & s \end{smallmatrix}\right]\xi$, odnosno $r\xi^2+(s-p)\xi-q=0$. Budući da su a,b,c po uvjetu zadatka relativno prosti cijeli brojevi, $\pm f(x,1)$ je minimalni polinom od ξ nad $\mathbb{Z}$ iz čega zaključujemo da postoji cijeli broj u takav da je

$$r = au, \qquad s-p = bu, \qquad -q = cu.$$

Stavimo li sada $t = p+s$, imamo

$$t^2 = (s-p)^2 + 4ps = (bu)^2 + 4(1+rq) = b^2u^2 + 4 - 4acu^2 = 4 + du^2.$$

Očito je $p = \frac{t-bu}{2}$, $q = -cu$, $r = au$, $s = \frac{t+bu}{2}$.

Obratno, pretpostavimo da su p,q,r,s dani gornjim jednakostima preko cijelih brojeva t,u takvih da je $t^2-du^2=4$. Sada je $ps-rq = \frac{t^2-b^2u^2}{4} + acu^2 = 1$ i $f(x,y) = f(px'+qy', rx'+sy') = a'x'^2 + bx'y' + cy'^2$, gdje koristeći (2.3) iz skripte imamo

$$\begin{aligned} a' &= ap^2 + bpr + cr^2 = a\big(\frac{t-bu}{2}\big)^2 + b\frac{t-bu}{2}au + c(au)^2 \\ &= a\big(\frac{t-bu}{2} + \frac{bu}{2}\big)^2 + a\big(ac - \frac{b^2}{4}\big)u^2 = \frac{a}{4}(t^2 - du^2) = a \\ b' &= 2apq + b(ps+qr) + 2crs = \ldots = b \\ c' &= aq^2 + bqs + cs^2 = \ldots = c. \end{aligned}$$

Dakle, $f(x,y) = f(x',y')$ pa je dano linearno preslikavanje zaista automorf forme f.

6. U skladu s postupkom iz dokaza Teorema 2.3 za pozitivno definitnu formu $f = (256,369,133)$ s diskriminantom $d(f) = -31$ imamo

$$f \overset{s=-1}{\sim} (133,-103,20) \overset{s=3}{\sim} (20,-17,4) \overset{s=2}{\sim} (4,1,2) \overset{s=0}{\sim} (2,-1,4).$$

Stoga je $\sqrt{|d(f)|}/m(f) = \sqrt{31}/2$. Jedan korijen od $f(x,1)$ preslikava se redom

$$\frac{-369+i\sqrt{31}}{512} \mapsto \frac{103+i\sqrt{31}}{266} \mapsto \frac{17+i\sqrt{31}}{40} \mapsto \frac{-1+i\sqrt{31}}{8} \mapsto \frac{1+i\sqrt{31}}{4}.$$

U skladu s postupkom iz dokaza Teorema 2.7 za indefinitnu formu $g = (-3,-21,-34)$ s diskriminantom $d(g) = 33$ imamo

$$g \overset{s=0}{\sim} (-34,21,-3) \overset{s=4}{\sim} (-3,3,2) \overset{s=-2}{\sim} (2,5,-1) \overset{s=5}{\sim} (-1,5,2) \overset{s=-2}{\sim} (2,3,-3) \overset{s=1}{\sim} (-3,3,2).$$

Stoga je $\sqrt{|d(g)|}/m(g) = \sqrt{33}$. Jedan korijen od $g(x,1)$ preslikava se redom

$$\frac{-21-\sqrt{33}}{6} \mapsto \frac{21-\sqrt{33}}{68} \mapsto \frac{3-\sqrt{33}}{6} \mapsto \frac{-5+\sqrt{33}}{4} \mapsto \frac{5-\sqrt{33}}{2} \mapsto \frac{-3+\sqrt{33}}{4} \mapsto \frac{3-\sqrt{33}}{6}.$$