Lagrangeov i Markovljev spektar
1. domaća zadaća, 17.12.2018.

Rok za predaju je 14.1.2019.

1. Za prirodne brojeve $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *kontinuanta* $K(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ se definira kao brojnik verižnog razlomka $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

   $K(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ možemo interpretirati kao broj popločavanja $1 \times (n+1)$ ploče kvadratićima 1×1 i dominama 1×2 uz uvjet da se ništa ne stavlja na dominu i da se na i-to polje smije složiti najviše a_i kvadratića jedan na drugi. Dokažite ovu kombinatornu interpretaciju i pomoću nje dokažite identitete

   $$K(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0) = K(a_0, a_1, \ldots, a_n),$$
   $$K(a_0, \ldots, a_n) = K(a_0, \ldots, a_\ell)K(a_{\ell+1}, \ldots, a_n) + K(a_0, \ldots, a_{\ell-1})K(a_{\ell+2}, \ldots, a_n),$$

   za $n \geq 1$ i $0 \leq \ell \leq n-1$.

2. Ako nazivnici q_n konvergenti realnog broja α zadovoljavaju $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{\log\log q_n}{n} = +\infty$, onda je α transcendentan broj.

3. Ako je $L(\alpha) < 3$, onda se blok $1\,1\,1\,2\,2\,2$ može pojaviti najviše konačno mnogo puta u nizu parcijalnih kvocijenata verižnog razlomka od α.

4. Ako iracionalan broj α nije ekvivalentan ni $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ni $\sqrt{2}$, onda je $L(\alpha) > 2.94$.

5. Linearno preslikavanje $(x', y') \mapsto (x, y)$

   $$x = px' + qy', \qquad y = rx' + sy', \qquad \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}),$$

   takvo da je $f(x, y) = f(x', y')$ zove se *automorf* kvadratne forme $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

   Za indefinitnu formu f s cjelobrojnim koeficijentima koji su relativno prosti, dokažite sljedeću vezu između automorfa i rješenja odgovarajuće pellovske jednadžbe:

   Gore zadano linearno preslikavanje je automorf forme s diskriminantom $d > 0$ ako i samo ako je

   $$p = \frac{t - bu}{2} \qquad q = -cu$$
   $$r = au \qquad s = \frac{t + bu}{2},$$

   gdje su t, u cjelobrojna rješenja pellovske jednadžbe $t^2 - du^2 = 4$.

6. Dane su kvadratne forme

   $$f(x, y) = 256x^2 + 369xy + 133y^2, \qquad g(x, y) = -3x^2 - 21xy - 34y^2.$$

   Koristeći supstitucije s matricama $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & s \end{smallmatrix}\right]$ odredite reducirane forme ekvivalentne zadanim formama. Za indefinitnu formu nastavite supstitucije dok ne dobijete čitav lanac formi. Odaberite po jedan korijen od $f(x, 1)$ i $g(x, 1)$ i naznačite što se s njima događa u svakom koraku. Izračunajte $\sqrt{|d(f)|}/m(f)$ i $\sqrt{|d(g)|}/m(g)$.