AFINE I PROJEKTIVNE TRANSFORMACIJE

Predavanje za nastavnike i mentore na Državnom natjecanju iz matematike

Šibenik, travanj 2010.

Tomislav Pejković

Afine transformacije

Definicija. Za preslikavanje ravnine u samu sebe kažemo da je *afina transformacija* ako je neprekidno, injektivno i slika svakog pravca je pravac.

Translacije, rotacije i homotetije su primjeri afinih transformacija.
Dilatacija ravnine s koeficijentom k obzirom na pravac l je transformacija ravnine pri kojoj se točka M preslikava u točku M', gdje je $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, a O je ortogonalna projekcija točke M na pravac l. Dilataciju s koeficijentom manjim od 1 zovemo kontrakcija.

Sljedeće činjenice navodimo kao kratke zadatke koji nam objašnjavaju osnovna svojstva afinih transformacija[1].

- (Pr 29.2) Afina transformacija preslikava paralelne pravce u paralelne pravce.
- (Pr 29.3) Ako afina transformacija preslikava točke A, B, C, D redom u točke A', B', C', D' i vrijedi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, onda je i $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

Iz prethodne tvrdnje slijedi da možemo definirati sliku vektora $\overrightarrow{AB}$ po afinoj transformaciji L kao vektor $\overrightarrow{L(A)L(B)}$ i ova definicija ne ovisi o izboru točaka A i B koje određuju iste vektore.

- (Pr 29.4) Ako je L afina transformacija, onda je

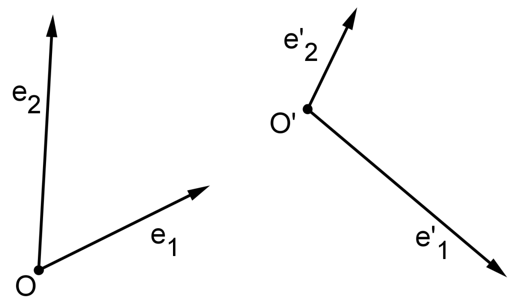
  · $L(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$;

  · $L(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = L(\overrightarrow{a}) + L(\overrightarrow{b})$;

  · $L(k\overrightarrow{a}) = kL(\overrightarrow{a})$,

  za sve vektore $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i sve $k \in \mathbb{R}$.

- (Pr 29.5) Neka su A', B', C' slike točaka A, B, C po afinoj transformaciji L. Ako C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $AC : CB = p : q$, onda C' dijeli dužinu $\overline{A'B'}$ u istom omjeru.



- (Pr 29.6) Dane su dvije točke u ravnini O i O' i dvije baze $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, $\{\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}\}$ (bazu čine dva nekolinearna vektora).
  Postoji jedinstvena afina transformacija koja preslikava O u O' i bazu $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ u $\{\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}\}$.
- Dana su dva trokuta ABC i $A'B'C'$. Postoji jedinstvena afina transformacija koja preslikava A u A', B u B' i C u C'.

[1]Oznaka Pr ukazuje na knjigu Viktora Prasolova "Zadaci iz planimetrije" koju možete naći na engleskom ovdje: `http://students.imsa.edu/~tliu/Math/planegeo.pdf`
a na ruskom ovdje: `http://www.mccme.ru/free-books/prasolov/planim/contents.htm`
Ukoliko negdje zapnete, pogledajte ondje rješenje.

- Dana su dva paralelograma $ABCD$ i $A'B'C'D'$. Postoji jedinstvena afina transformacija koja preslikava jedan paralelogram u drugi pri čemu se točka X preslikava u X' za $X \in \{A, B, C, D\}$.

Ako sada uvedemo Kartezijev koordinatni sustav te za točke i vektore iz tvrdnje prije predzadnje uzmemo

$$O = (0,0), \quad O' = (c,f), \qquad \overrightarrow{e_1} = (1,0),\ \overrightarrow{e_2} = (0,1), \qquad \overrightarrow{e_1'} = (a,d),\ \overrightarrow{e_2'} = (b,e),$$

onda dobivamo sljedeću karakterizaciju afinih preslikavanja

Teorem. *Transformacija ravnine je afina ako i samo ako je oblika*

$$(x,y) \mapsto (ax + by + c, dx + ey + f),$$

za neke realne brojeve a, b, c, d, e, f *za koje je* $ae - bd \neq 0$.

Posljednji uvjet iz teorema osigurava da je preslikavanje bijekcija. Transformacije poput dilatacije $(x,y) \mapsto (x, cy)$ ili posmika $(x,y) \mapsto (x+y, y)$ su afina preslikavanja koja pokazuju da afina preslikavanja općenito ne čuvaju kutove i udaljenosti.

Ipak vrijede sljedeće činjenice koje smo uglavnom već dokazali, a ovdje ih sabiremo na jedno mjesto.

- Afine transformacije čuvaju kolinearnost točaka, paralelnost pravaca i konkurentnost (kopunktalnost) pravaca. Afine tranformacije čuvaju omjere duljina paralelnih dužina, pa i omjer u kojemu točka dijeli dužinu na kojoj se nalazi (djelišni omjer). Nadalje, afina transformacija

  $$(x,y) \mapsto (ax + by + c, dx + ey + f)$$

  površine povećava za faktor $|ae - bd|$ i čuva orijentaciju ako i samo ako je $ae - bd > 0$.

- Bilo koja trojka nekolinearnih točaka može se preslikati u bilo koju drugu trojku nekolinearnih točaka pomoću jedinstvene afine transformacije.

Dokažite da je omjer površina dvaju trokutova invarijantan u odnosu na afine transformacije (to je nešto slabija tvrdnja nego ona odozgo), a onda to isto dokažite pomoću triangulacije za proizvoljne poligone.

⋆ ⋆ ⋆

Evo i zadataka. Pokušajte ih najprije riješiti koristeći Menelajev teorem, Cevin teorem, površine, itd. Zatim ih probajte riješiti pomoću afinih transformacija.

Zadatak 1. Kroz svaki vrh trokuta povučena su po dva pravca koji nasuprotne stranice trokuta dijele u tri jednaka dijela. Dokažite da se dijagonale koje prolaze nasuprotnim vrhovima šesterokuta formiranog ovim pravcima sijeku u jednoj točki.

Zadatak 2. Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ paralelograma $ABCD$ dane su redom točke K, L i M koje dijele pripadne stranice u istom omjeru. Neka su b, c, d pravci koji prolaze točkama B, C, D paralelni pravcima KL, KM, ML, respektivno. Dokažite da pravci b, c, d prolaze istom točkom.

Zadatak 3. Neka je O težište trokuta ABC, a M, N i P redom točke na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ koje ih dijele u istom omjeru (tj. $AM : MB = BN : NC = CP : PA$). Dokažite da je
a) O težište trokuta MNP;
b) O težište trokuta formiranog pravcima AN, BP i CM.

Zadatak 4. U četverokutu $ABCD$ pravci AD i BC sijeku se u E, a pravci AB i CD u F. Dokažite da su polovišta dužina $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ i $\overline{EF}$ kolinearne točke.

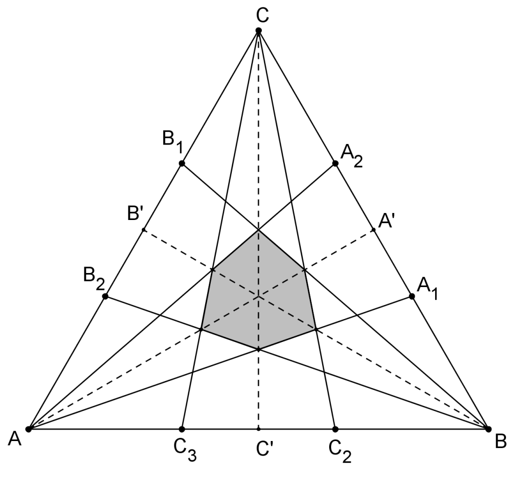
Zadatak 5. U trokutu ABC točke D, E, Z, H, Θ su redom polovišta dužina $\overline{BC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{ED}, \overline{EZ}$. Ako je I sjecište BE i AC, a K sjecište $H\Theta$ i AC, dokažite da vrijedi:
a) $AK = 3\,CK$
b) $HK = 3\,H\Theta$
c) $BE = 3\,EI$;
d) Površina $\triangle ABC$ je 32 puta veća od površine $\triangle E\Theta H$.

Zadatak 6. U konveksnom četverokutu $ABCD$ površine S dana je točka O. U unutrašnjosti stranica $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ dane su redom točke K, L, M, N. Ako su $OKBL$ i $OMDN$ paralelogrami, dokažite da je $\sqrt{S} \geq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$, gdje su S_1 i S_2 redom površine četverokuta $ONAK$ i $OLCM$.

Zadatak 7. Za proizvoljan skup S koji se sastoji od pet točaka u ravnini od kojih nikoje tri nisu kolinearne, označimo s $M(S)$ i $m(S)$ redom najveću i najmanju površinu trokuta kojemu su sva tri vrha iz S. Koja je minimalna vrijednost od $M(S)/m(S)$?

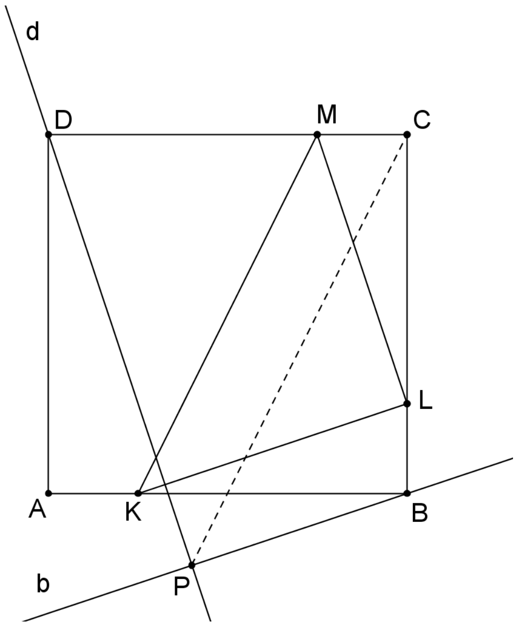
U nastavku dajemo skicu rješenja

Rješenje zad. 1. Budući da pomoću afine transformacije možemo proizvoljan trokut preslikati u jednakostranični i budući da afina transformacija čuva omjere paralelnih dužina, dovoljno je tvrdnju zadatka dokazati za jednakostranični trokut ABC (Drugim riječima, preslikamo naš trokut pomoću afine transformacije u jednakostranični, tvrdnja koju trebamo dokazati ostaje zbog svojstava afine transformacije nepromijenjena. Dokažemo tu tvrdnju i onda se pomoću inverza prethodne transformacije - a to je isto afina transformacija! - vratimo natrag na početni trokut.)



Neka točke A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 dijele stranice trokuta ABC na trećine i neka su točke A', B', C' polovišta stranica tog trokuta (vidi sliku). Osnom simetrijom s obzirom na pravac AA', preslikava se pravac BB_1 u CC_2, a BB_2 u CC_1. Budući da se simetrični pravci sijeku na osi simetrije, nužno AA' sadrži dijagonalu promatranog šesterokuta. Slično se pokazuje da i preostale dijagonale leže na BB' i CC'. Jasno je da se težišnice $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ sijeku u jednoj točki. $\square$

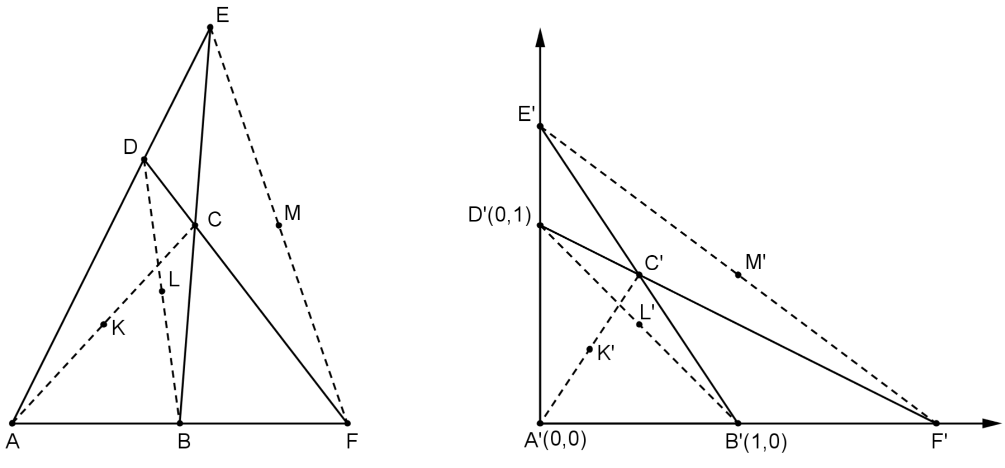
Rješenje zad. 2. Budući da pomoću afine transformacije možemo proizvoljan paralelogram preslikati u kvadrat i budući da afina transformacija čuva omjere paralelnih dužina, dovoljno je tvrdnju zadatka dokazati u slučaju kad je $ABCD$ kvadrat. Označimo s P sjecište pravaca b i d. Dovoljno je dokazati $PC||MK$.



Dužina $\overline{KL}$ prelazi rotacijom za 90° oko središta kvadrata $ABCD$ u dužinu $\overline{LM}$, pa su pravci b i d koji su paralelni ovim dužinama okomiti i stoga P leži na kružnici opisanoj $ABCD$. Zato je $\angle BPC = \angle BAC = 45^\circ$. No i $\angle LKM = 45^\circ$ jer je KLM jednakokračni pravokutni trokut. Ovo zajedno s $b||KL$ povlači $CP||MK$. □

Rješenje zad. 3. a) Iskoristimo afinu transformaciju koja trokut ABC preslikava u jednakostranični trokut $A'B'C'$. Neka su O', M', N', P' slike točaka O, M, N, P. Rotacijom za 120° oko točke O' trokut $M'N'P'$ prelazi u samog sebe, pa zaključujemo da je taj trokut jednakostraničan i da je O' njegovo središte (pa i težište). Budući da se afinom transformacijom svaka težišnica preslikava u težišnicu, O je težište trokuta MNP.
b) Rješenje je slično onome pod a). □

Rješenje zad. 4. Primjenimo afinu transformacija koja trokut ABD preslikava u jednakokračni pravokutni trokut $A'B'D'$ s pravim kutom u vrhu A'. Uvedemo Kartezijev koordinatni sustav tako da su koordinate točaka $A'(0,0)$ i $B'(1,0)$.



Tada je je $D'(0,1)$, $E'(0,e)$, $F'(f,0)$, gdje su e i f neki realni brojevi. Sada vidimo da je $L'(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $M'(\frac{f}{2}, \frac{e}{2})$. Lako se dobije da pravac $B'E'$ ima jednadžbu $y = -ex + e$, a pravac $D'F'$ ima jednadžbu

$y = -\frac{1}{f}x + 1$, pa je njihovo sjecište

$$C'\Big(\frac{(e-1)f}{ef-1}, \frac{e(f-1)}{ef-1}\Big) \quad \text{i konačno} \quad K'\Big(\frac{(e-1)f}{2(ef-1)}, \frac{e(f-1)}{2(ef-1)}\Big)$$

Uvrstimo li u jednadžbu pravca $L'M'$

$$y = \frac{1-e}{1-f}x + \frac{e-f}{2(1-f)}$$

koordinate točke K' zaključit ćemo da K' leži na pravcu $L'M'$, a to smo i željeli dokazati.

Dokažite najprije sljedeću lemu, a onda je iskoristite za drugi način rješavanja zadatka.

Lema. Zadan je četverokut $ABCD$ i realan broj k. Geometrijsko mjesto točaka X za koje je $P(ABX) = kP(CDX)$ je pravac. Ovdje smo s $P(MNK)$ označili površinu trokuta i to s predznakom, tj. negativnu ako su točke M, N, K poredane u smjeru kazaljke na satu, a pozitivnu u suprotnom. □

Rješenje zad. 5. Preslikamo pomoću afine transformacije trokut ABC u jednakokračni pravokutni trokut $A'B'C'$ s pravim kutom u točki A'. Uvedemo sada Kartezijev koordinatni sustav tako da su koordinate točaka A', B i C redom $(0,0)$, $(1,0)$ i $(0,1)$. Daljnji postupak je jednostavni standardni račun u analitičkoj geometriji.

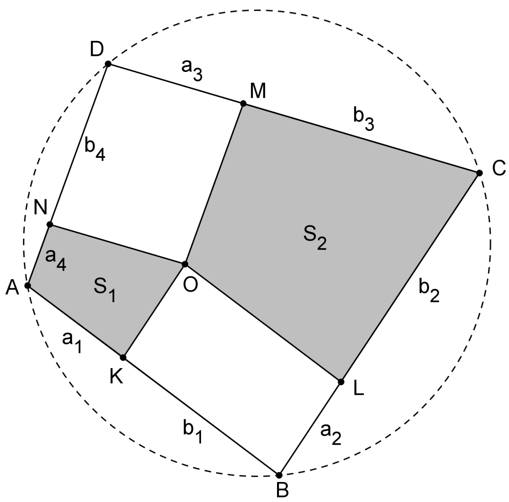
Pokušajte ovaj zadatak riješiti i pomoću površina. □

Rješenje zad. 6. Afinom transformacijom ravnine možemo bilo koji nedegenerirani četverokut preslikati u tetivni četverokut[2]. Pri tome se paralelnost i omjeri površina čuvaju. Zato bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $ABCD$ tetivni četverokut.

Prema poznatoj Brahmaguptinoj formuli, površina tetivnog četverokuta sa stranicama a, b, c, d i poluopsegom $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ dana je sa

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

(Dokažite ovu tvrdnju!)



[2]Ako je $ABCD$ paralelogram, preslikamo ga u pravokutnik. Ako mu neke dvije nasuprotne stranice nisu paralelne, npr. $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$, neka se njihovi produžeci sijeku u točki V. Tada postoji afina transformacija takva da je $V'A' \cdot V'D' = V'B' \cdot V'C'$. Popunite korake u dokazu!

Uvedimo oznake $AK = a_1$, $KB = b_1$, $BL = a_2$, $LC = b_2$, $MD = a_3$, $CM = b_3$, $NA = a_4$, $DN = b_4$. Tada su u četverokutu $AKON$ stranice a_i, u $CLOM$ su stranice b_i, a u $ABCD$ su stranice $a_i + b_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Ako s p i q označimo poluopsege četverokuta $AKON$ i $CLOM$, te $x_i = p - a_i$, $y_i = q - b_i$, onda je

$$S_1 = \sqrt{x_1x_2x_3x_4},\ S_2 = \sqrt{y_1y_2y_3y_4},\ S = \sqrt{(x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_3+y_3)(x_4+y_4)}.$$

Zato trebamo dokazati da je

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} + \sqrt[4]{y_1y_2y_3y_4} \le \sqrt[4]{(x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_3+y_3)(x_4+y_4)}.$$

Uz zamjenu $y_i = t_ix_i$, prethodna nejednakost postaje

$$1 + \sqrt[4]{t_1t_2t_3t_4} \le \sqrt[4]{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)}.$$

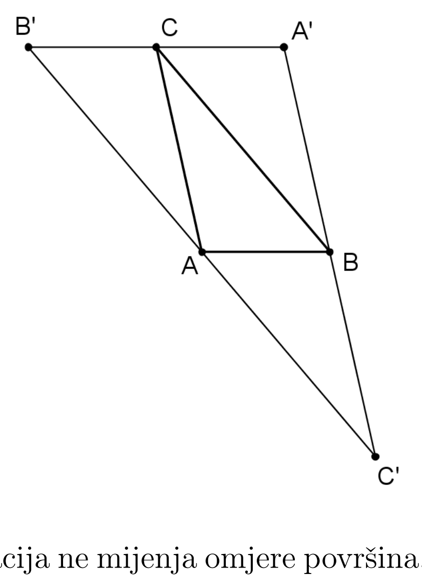
Jedan način za dokazivanje ove nejednakosti jest da jednostavnu nejednakost

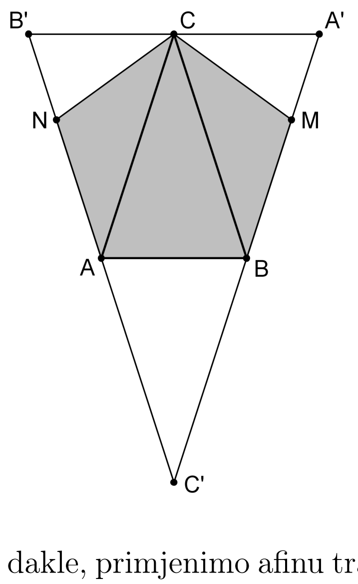
$$1 + \sqrt{uv} \le \sqrt{(1+u)(1+v)}$$

primjenimo najprije na $\sqrt{t_1t_2}, \sqrt{t_3t_4}$, a zatim na t_1, t_2 i t_3, t_4. $\square$

Rješenje zad. 7. Kada je S skup vrhova pravilnog peterokuta, nije teško vidjeti da je $\dfrac{M(S)}{m(S)} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$. Tvrdimo da je to najbolji mogući omjer. Neka je A, B, C, D, E proizvoljnih pet točaka koje zajedno čine skup S i pretpostavimo da trokut ABC ima površinu $M(S)$. Dokazat ćemo da neki trokut (s vrhovima u S) ima površinu manju ili jednaku $M(S)/\alpha$.

Konstruiramo veći trokut $A'B'C'$ tako da je $C \in A'B' || AB$, $A \in B'C' || BC$, $B \in C'A' || CA$. Točke D i E moraju ležati na istoj strani pravca $B'C'$ kao i $\overline{BC}$ jer bi u protivnom $\triangle DBC$ ili $\triangle EBC$ imao veću površinu od $\triangle ABC$. Slično vrijedi i za ostale stranice, pa zaključujemo da D i E leže unutar trokuta $A'B'C'$ ili na njegovom rubu. Nadalje, barem jedan od trokuta $A'BC$, $AB'C$, ABC', primjerice ABC', ne sadrži ni D ni E. Zato možemo pretpostaviti da D, E leže u četverokutu $A'B'AB$.



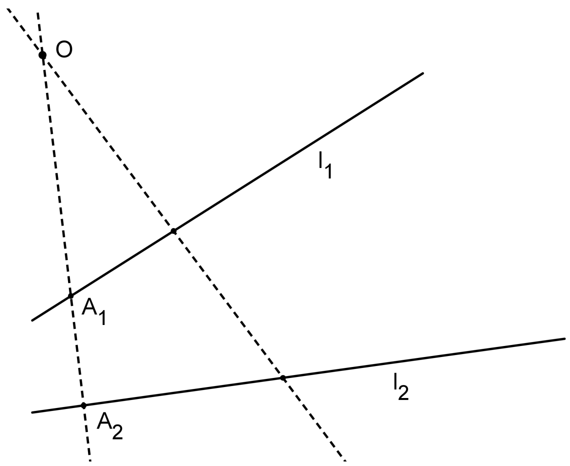


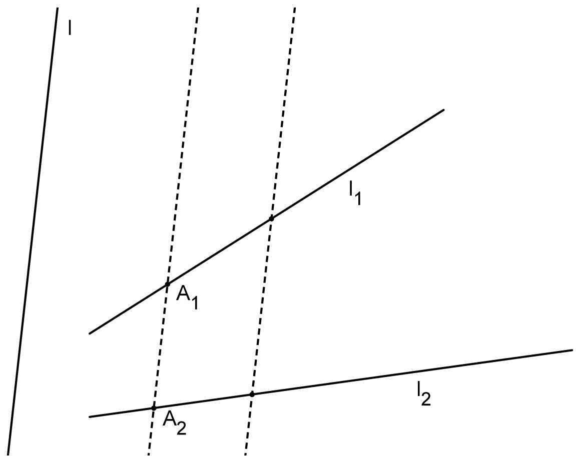
Afina transformacija ne mijenja omjere površina. Ako, dakle, primjenimo afinu transformaciju koja preslikava A, B, C u vrhove $ABMCN$ pravilnog peterokuta, nećemo promijeniti $M(S)/m(S)$. Ako je sada D ili E unutar $ABMCN$, onda smo gotovi. Pretpostavimo da i D i E leže u trokutima CMA', CNB'. Tada je $CD, CE \le CM$ (jer je $CM = CN = CA' = CB'$) i $\angle DCE$ mora biti ili manji ili jednak od $36°$ ili veći ili jednak od $108°$, iz čega zaključujemo da površina $\triangle CDE$ ne može biti veća od površine $\triangle CMN$, tj. $M(S)/\alpha$. Ovim je dokaz završen. $\square$

Projektivne transformacije

Najprije ćemo govoriti o projektivnim transformacijama pravca, a zatim o projektivnim transformacijama ravnine. Pri tome tvrdnje koje dokažemo u prvom slučaju vrijede i u drugom.

Definicija. Neka su l_1 i l_2 dva pravca u ravnini, O točka koja ne leži ni na jednom od tih pravaca, a l pravac koji ni s jednim od njih nije paralelan. *Centralna projekcija* pravca l_1 na pravac l_2 s centrom ili središtem u točki O je preslikavanje koje točku A_1 na pravcu l_1 preslikava u sjecište pravaca OA_1 i l_2. *Paralelna projekcija* pravca l_1 na pravac l_2 u smjeru pravca l je preslikavanje koje točku A_1 na pravcu l_1 preslikava u sjecište pravca l_2 i pravca paralelnog s l koji prolazi kroz točku A_1.

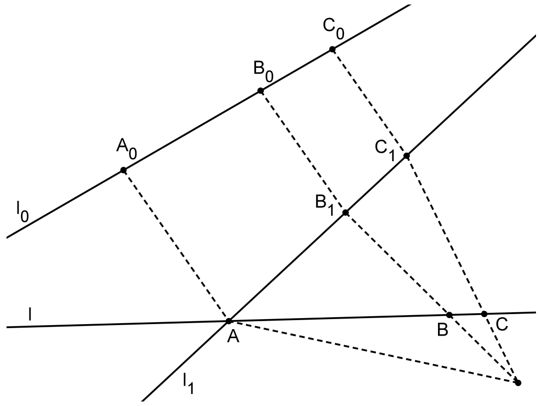




Definicija. Za preslikavanje[3] P pravca a u pravac b kažemo da je *projektivna transformacija* ako je kompozicija centralnih i paralelnih projekcija, tj. ako postoje pravci $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ i preslikavanja P_i pravca a_i na a_{i+1} koja su centralne ili paralelne projekcije tako da je $P = P_{n-1} \circ \cdots \circ P_1 \circ P_0$.

I ovdje navodimo niz tvrdnji o svojstvima projektivnih transformacija koje uglavnom nećemo dokazivati ili ćemo dati samo skicu dokaza. Svaku od ovih činjenica možete shvatiti kao mali zadatak za vježbu.

• (Pr 30.1) Postoji projektivna transformacija koja tri dane točke na jednom pravcu preslikava u tri dane točke na drugom pravcu.



[3]Iako bi izraz transformacija trebalo koristiti samo kada su domena i kodomena iste (u ovom slučaju pravci a i b), a općenito treba govoriti o preslikavanju, mi ćemo oba termina koristiti u istom smislu.

Skica dokaza. Pretpostavimo da treba točke A_0, B_0, C_0 na pravcu l_0 preslikati u točke A, B, C na pravcu l tim redom. Neka je l_1 pravac različit od l i AA_0 koji prolazi kroz A. Najprije paralelno projiciramo l_0 na l_1 tako da se A_0 preslika u A, a B, C u B_1, C_1 i zatim paralelnom ili centralnom projekcijom sa središtem u $BB_1 \cap CC_1$ preslikamo pravac l_1 na l. □

Iz prethodne tvrdnje je očito da projektivne transformacije, za razliku od afinih, općenito ne čuvaju omjer u kojemu točka dijeli neku dužinu. Ipak postoji nešto kompliciranija veličina koja je invarijantna.

Dvoomjer četvorke *točaka* A, B, C, D koje leže na istom pravcu je broj

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

pri čemu duljine dužina gledamo s predznakom, tj. $\frac{AC}{BC}$ je pozitivan broj ako su vektori $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ jednako orijentirani, a negativan ako su ti vektori suprotno orijentirani (analogno za $\frac{AD}{BD}$). Na engleskom jeziku se dvoomjer zove cross-ratio.

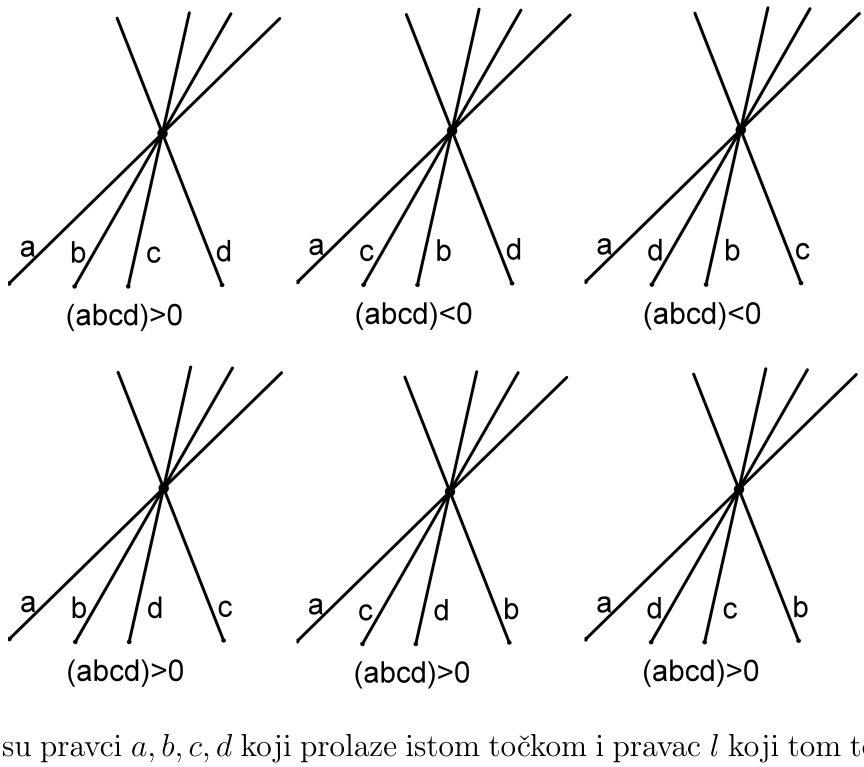
• Ponašanje dvoomjera s obzirom na permutacije točaka opisano je ovim jednakostima:

$$(ABCD) = (BACD)^{-1} = (ABDC)^{-1}, \quad (ABCD) + (ACBD) = 1.$$

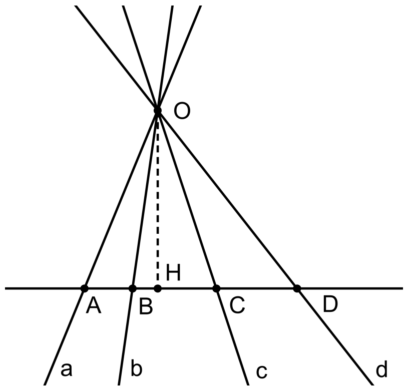
Dvoomjer četvorke *pravaca* a, b, c, d koji prolaze kroz istu točku je broj

$$(abcd) = \pm \frac{\sin \sphericalangle(a,c)}{\sin \sphericalangle(b,c)} : \frac{\sin \sphericalangle(a,d)}{\sin \sphericalangle(b,d)},$$

pri čemu je predznak određen kako slijedi: ako barem jedan od četiri kuta određena pravcima a i b ne sadrži nijedan od pravaca c i d (u tom slučaju kažemo da par pravaca a i b ne rastavlja par pravaca c i d), onda je $(abcd) > 0$, inače je $(abcd) < 0$.



• (Pr 30.2) Dani su pravci a, b, c, d koji prolaze istom točkom i pravac l koji tom točkom ne prolazi. Neka su A, B, C, D redom sjecišta pravca l s pravcima a, b, c, d. Tada je $(abcd) = (ABCD)$.



Skica dokaza. Označimo sjecište danih četiriju pravaca s O, a neka je H nožište okomice iz O na l te $h = OH$. Tada je

$$\begin{aligned} 2P(OAC) &= OA \cdot OC \sin\sphericalangle(a,c) = h \cdot AC, \\ 2P(OBC) &= OB \cdot OC \sin\sphericalangle(b,c) = h \cdot BC, \\ 2P(OAD) &= OA \cdot OD \sin\sphericalangle(a,d) = h \cdot AD, \\ 2P(OBD) &= OB \cdot OD \sin\sphericalangle(b,d) = h \cdot BD. \end{aligned}$$

Podijelimo li prvu jednakost s drugom i treću s četvrtom, dobivamo

$$\frac{OA \sin\sphericalangle(a,c)}{OB \sin\sphericalangle(b,c)} = \frac{AC}{BC}, \qquad \frac{OA \sin\sphericalangle(a,d)}{OB \sin\sphericalangle(b,d)} = \frac{AD}{BD}.$$

Ako sada podijelimo prvu jednakost s drugom, dobit ćemo $|(ABCD)| = |(abcd)|$. Da bismo dokazali da su brojevi $(ABCD)$ i $(abcd)$ istog predznaka možemo napisati sve moguće poretke točaka A, B, C, D na pravcu (24 mogućnosti) i provjeriti da je $(ABCD)$ pozitivno ako i samo ako par pravaca a, b ne razdvaja par pravaca c, d. □

Iz prethodne činjenice izravno slijedi[4]

● (Pr 30.2) Projektivne transformacije čuvaju dvoomjere točaka.

Ovo svojstvo je vrlo bitno i njegovim korištenjem dobivamo

• (Pr 30.3) Ako je $(ABCX) = (ABCY)$, onda je $X = Y$, pri čemu sve točke leže na istom pravcu i sve su različite (osim eventualno X i Y).

• (Pr 30.4) Svaka projektivna transformacija pravca jednoznačno je određena slikom triju proizvoljnih točaka.

• (Pr 30.5) Ako projektivna transformacija pravca ima više od dvije fiksne točke, onda je to identiteta.

● (Pr 30.6) Ako preslikavanje s pravca a u pravac b čuva dvoomjere točaka, onda je to preslikavanje projektivna transformacija.

Uvedemo li koordinatni sustav na pravac i iskoristimo da je preslikavanje među pravcima projektivno ako i samo ako čuva dvoomjere točaka, dobivamo sljedeću karakterizaciju

• (Pr 30.7) Transformacija P realnog pravca je projektivna ako i samo ako se može zapisati u obliku

$$P(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

gdje su a, b, c, d realni brojevi takvi da je $ad - bc \neq 0$.

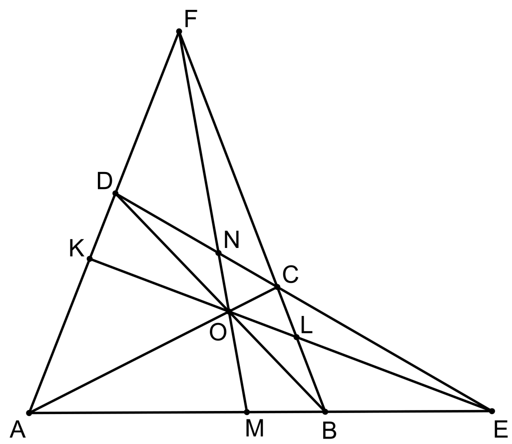
• (Pr 30.8) Točke A, B, C, D su kolinearne. Ako je $(ABCD) = 1$, onda je $A = B$ ili $C = D$.

Puno je zanimljivija situacija kad je $(ABCD) = -1$. U tom slučaju kažemo da su točke C i D *harmonijski konjugati* s obzirom na točke A i B (i obratno).

[4]Za centralne projekcije je očuvanje dvoomjera upravo pokazano, a za paralelne je ta činjenica direktna posljedica Talesovog teorema o proporcionalnosti.

Zadatak 8. (*Teorem o potpunom četverovrhu*) Neka je O sjecište dijagonala četverokuta $ABCD$; neka je E sjecište pravaca AB i CD, a F sjecište pravaca BC i AD. Pravac EO siječe AD i BC redom u K i L, a FO siječe AB i CD u M i N. Dokažite da je

$$(ABME) = (KLOE) = (DCNE) = (BCLF) = (MNOF) = (ADKF) = -1.$$



Rješenje (1. način). Primjenimo Menalajev teorem (duljine su s predznakom) na:

$$\triangle ABC \text{ i pravac } MF \qquad \frac{AM}{BM}\,\frac{BF}{CF}\,\frac{CO}{AO} = 1$$
$$\triangle ABO \text{ i pravac } EC \qquad \frac{BE}{AE}\,\frac{AC}{OC}\,\frac{OD}{BD} = 1$$
$$\triangle BCO \text{ i pravac } FA \qquad \frac{CF}{BF}\,\frac{BD}{OD}\,\frac{OA}{CA} = 1.$$

Pomnožimo li tri dobivene jednakosti, dolazimo do

$$(ABME) = \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BE}{AE} = -1.$$

Ostale tvrdnje dokazuju se analogno. □

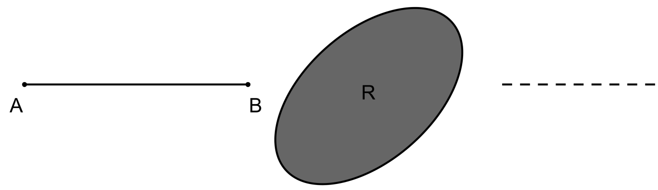
Rješenje (2. način). Iz veze između dvoomjera točaka i dvoomjera pravaca, te ponašanja dvoomjera s obzirom na permutaciju točaka, dobivamo sljedeće:

$$(ABME) = (AF\,BF\,MF\,EF) = (DCNE) = (CDNE)^{-1} = (AO\,BO\,MO\,EO)^{-1} = (ABME)^{-1},$$

pa je $(ABME) = \pm 1$. Kako točke M i E razdvajaju točke A i B, to mora biti $(ABME) = -1$. □

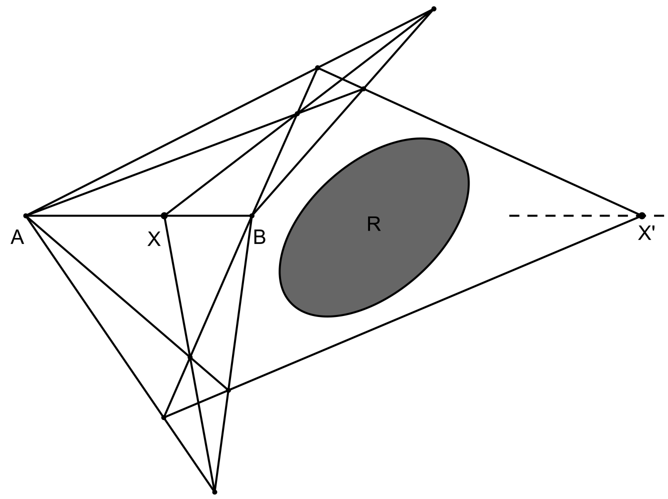
Kasnije ćemo dati još jedno rješenje prethodnog zadatka, a evo i jedne primjene ovog rezultata.

Zadatak 9. U ravnini je dana dužina $\overline{AB}$ i područje R kao na slici.



Želimo produžiti $\overline{AB}$ desno od R. Kako to učiniti samo pomoću ravnala tako da ravnalo ni u jednom trenutku ne prijeđe preko R tijekom konstrukcije?

Uputa. Odaberite točke X i Y na dužini $\overline{AB}$ i zatim odredite njihove harmonijske konjugate X' i Y' s obzirom na A i B pomoću četiri četverokuta s vrhovima u A i B. Evo skice za X:



□

Zadatak 10. Dan je trokut ABC i točke M i N na pravcu BC takve da je $(BCMN) = -1$ i $\angle MAN = 90°$. Dokažite da su pravci AM i AN unutrašnja i vanjska simetrala kuta BAC.

Uputa. Dokažite najprije obratnu tvrdnju, tj. da unutrašnja i vanjska simetrala zadovoljavaju uvjete zadatka. Pogledajte što se događa s kutom $\angle MAN$ ako pomičemo točku M, a želimo zadržati dvoomjer $(BCMN)$ fiksnim. □

Evo još jednog zadatka za vježbu prije nego što uvedemo projektivne transformacije ravnine.

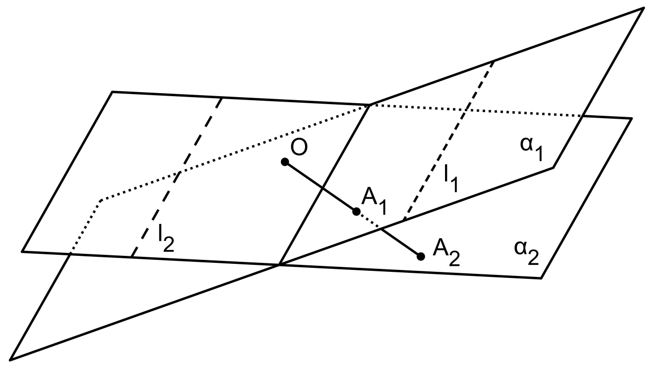
Zadatak 11. (Pr 30.9) Dan je pravac l, kružnica k i točke M i N koje leže na k, ali ne leže na l. Promotrimo sljedeće preslikavanje P pravca l na samog sebe: P je kompozicija projekcije l na k iz točke M i projekcije k na l iz točke N. (Dakle, ako je $X \in l$, onda je $P(X) \in NY \cap l$, gdje je $Y \in MX \cap k \setminus \{M\}$.) Dokažite da je P projektivna transformacija.

Uputa. Iskoristite vezu između dvoomjera točaka i dvoomjera pravaca te teorem o obodnim kutovima nad istim lukom kako biste pokazali da P čuva dvoomjere točaka na pravcu l. □

⋆⋆⋆

Definicija. Neka su α_1 i α_2 dvije ravnine u prostoru, O točka koja ne leži ni u jednoj od tih ravnina, a l pravac koji ni s jednom od njih nije paralelan. *Centralna projekcija* ravnine α_1 na ravninu α_2 s centrom ili središtem u točki O je preslikavanje koje točku A_1 u ravnini α_1 preslikava u sjecište pravca OA_1 i ravnine α_2. *Paralelna projekcija* ravnine α_1 na ravninu α_2 u smjeru pravca l je preslikavanje koje točku A_1 u ravnini α_1 preslikava u sjecište ravnine α_2 i pravca paralelnog s l koji prolazi kroz točku A_1.

• (Pr 30.11) Ako se ravnine α_1 i α_2 sijeku, onda je centralna projekcija α_1 na α_2 bijekcija ravnine α_1 s izbrisanim pravcem l_1 na ravninu α_2 s izbrisanim pravcem l_2, gdje su l_1 i l_2 redom presjeci ravnina α_1 i α_2 s ravninama koje prolaze kroz O i paralelne su s α_2, odnosno α_1. Dakle, na l_1 dana centralna projekcija nije definirana.



Pravac na kojemu centralna projekcija nije definirana zove se *singularni pravac* danog preslikavanja.

• (Pr 30.12) Centralna projekcija nesingularne pravce preslikava u pravce.

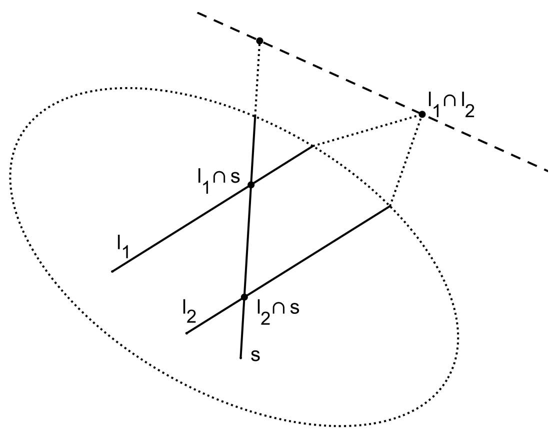
Kako bismo centralnu projekciju definirali svuda, korisno je uvesti nove objekte na sljedeći način:

∗ Uz uobičajene točke svaki pravac ima još jednu, takozvanu *točku u beskonačnosti* (ili beskonačno daleku točku) koju ponekad označavamo s ∞.

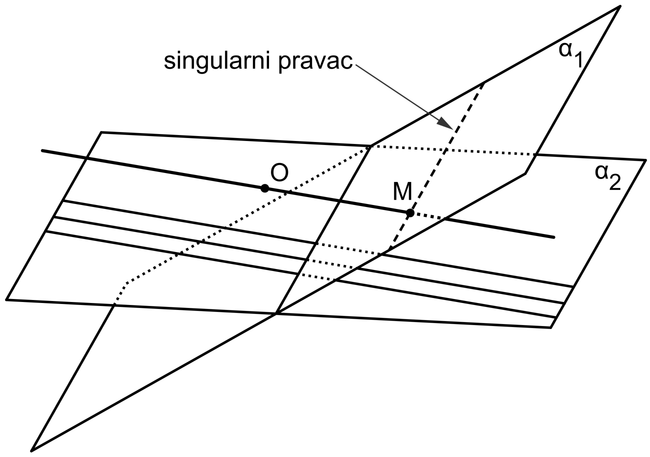
∗ Ako su dva pravca paralelni, onda uzimamo da im se točke u beskonačnosti podudaraju. Drugim riječima, paralelni pravci se sijeku u svojoj točki u beskonačnosti.

∗ Uz uobičajene pravce svaka ravnina ima još jedan, takozvani *pravac u beskonačnosti* (ili beskonačno dalek pravac) koji sadrži sve točke u beskonačnosti pravaca u toj ravnini.

∗ Pravac u beskonačnosti siječe svaki pravac u konačnosti ("obični" pravac) l koji leži u istoj ravnini u točki u beskonačnosti pravca l.



Nakon uvođenja točaka i pravaca u beskonačnosti, vidimo da centralna projekcija ravnine α_1 na ravninu α_2 s centrom u točki O preslikava singularni pravac u pravac u beskonačnosti ravnine α_2. Naime, slika točke M sa singularnog pravca je točka u beskonačnosti pravca OM, tj. točka u kojoj se sijeku pravci ravnine α_2 koji su paralelni s OM.



• (Pr 30.13) Ako uz (uobičajene) točke i pravce u konačnosti uzmemo u obzir i one u beskonačnosti, onda vrijedi

· Kroz svake dvije točke prolazi točno jedan pravac.

· Svaka dva pravca koji leže u istoj ravnini sijeku se u točno jednoj točki.

· Centralna projekcija jedne ravnine na drugu je bijekcija.

Definicija. Za preslikavanje P ravnine α u ravninu β kažemo da je *projektivna transformacija* ako je kompozicija centralnih i paralelnih projekcija, tj. ako postoje ravnine $\alpha = \alpha_0$, α_1, $\dots$, $\alpha_n = \beta$ i preslikavanja P_i ravnine α_i na α_{i+1} koja su centralne ili paralelne projekcije tako da je $P = P_{n-1} \circ \cdots \circ P_1 \circ P_0$. Praslika pravca u beskonačnosti naziva se *singularni pravac* dane projektivne transformacije.

Uvođenjem koordinatnog sustava u prostor, može se pokazati da svaku projektivnu transformaciju ravnine možemo zapisati kao kompoziciju dvaju (?) centralnih projekcija (v. npr. na Wikipediji).
• Svaka afina transformacija ravnine je projektivna transformacija.
Skica dokaza. Afina transformacija ravnine jednoznačno je određena slikom triju nekolineranih točaka i svojstvom da čuva omjere duljina paralelnih dužina. Budući da paralelna projekcija među proizvoljnim ravninama čuva omjere duljina paralelnih dužina, dovoljno je pokazati da postoji kompozicija takvih projekcija koja jednu proizvoljnu trojku nekolinearnih točaka preslikava u drugu proizvoljnu trojku nekolinearnih točaka. Ako trojke označimo s A, B, C i A', B', C' redom, evo jedne moguće kompozicije:

· Pomoću jedne (ako su ravnine od A, B, C i A', B', C' različite) ili dvije (ako se ravnine podudaraju) paralelne projekcije preslikamo A, B, C u ravninu određenu s A', B', C' tako da se A preslika u A'. Nove točke označavamo također A, B, C.

· Pomoću dvije paralelne projekcije, jedne na i druge s ravnine koja prolazi kroz AC preslikamo B u B'. Pri tome su A i C ostale nepromijenjene.

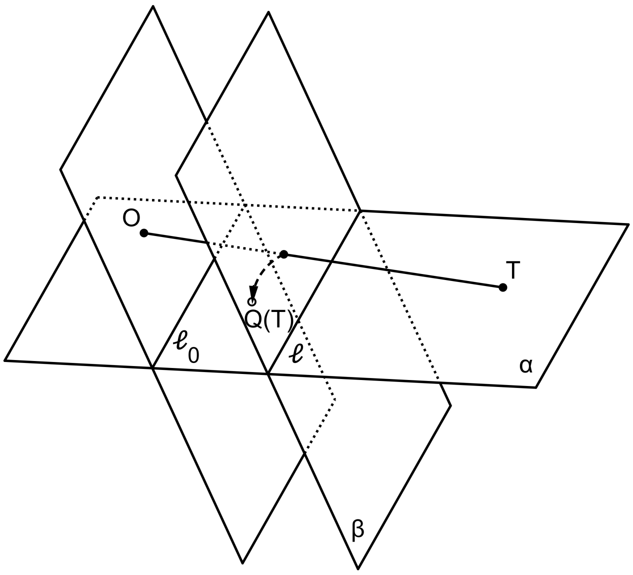
· Pomoću dvije paralelne projekcije, jedne na i druge s ravnine koja prolazi kroz AB preslikamo C u C'. Pri tome su A i B ostale nepromijenjene. □

Slijedi nekoliko tvrdnji koje će nam biti korisne u rješavanju zadataka.
• (Pr 30.14) Projektivna transformacija ravnine koja preslikava pravac u beskonačnosti u pravac u beskonačnosti je afina transformacija.
Dokaz. Budući je projektivna transformacija bijekcija (kao kompozicija bijekcija), zaključujemo

da se točke u konačnosti bijektivno preslikavaju u točke u konačnosti, a budući da su slike pravaca pravci, to dana transformacija mora biti afina. □

Projektivna transformacija ravnine naravno ne čuva omjer u kojemu točka dijeli dužinu, ali čuva dvoomjere jer je restrikcija projektivne transformacije ravnine na nesingularni pravac upravo projektivna transformacija pravca, a za nju smo tvrdnju već dokazali. Ipak, postoji specijalni slučaj kada i omjeri ostaju sačuvani:

• (Pr 30.14) Ako točke A, B, C, D leže na pravcu paralelnom singularnom pravcu projektivne transformacije P ravnine α, onda je $P(A)P(B) : P(C)P(D) = AB : CD$.



Dokaz. Označimo s l pravac na kojemu leže točke A, B, C, D, a s l_0 singularni pravac preslikavanja P. Neka je O proizvoljna točka izvan ravnine α i neka je β ravnina koja prolazi pravcem l i paralelna je ravnini koja prolazi pravcem l_0 i točkom O. Neka je Q kompozicija centralne projekcije α na β s centrom u O i nakon toga rotacije prostora oko osi l koja šalje β u α (rotacija je afino, pa i projektivno preslikavanje!). Singularni pravac preslikavanja Q je l_0.

Dakle, projektivna transformacija $R = P \circ Q^{-1}$ ravnine α šalje pravac u beskonačnosti u samog sebe, pa je prema prethodno dokazanoj tvrdnji to afina transformacija i zato sigurno čuva omjere duljina dužina koje leže na pravcu l. Preostaje jedino primjetiti da transformacija Q fiksira točke pravca l. □

• (Pr 30.14) Ako projektivna transformacija P preslikava paralelne pravce l_1 i l_2 u paralelne pravce, onda je ili P afina ili je singularni pravac od P paralelan s l_1 i l_2.

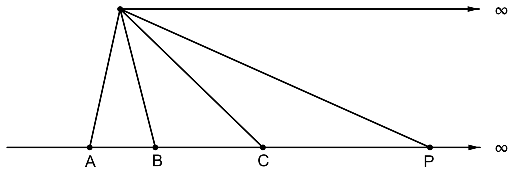
Dokaz. Budući da se paralelni pravci l_1 i l_2 preslikavaju u paralelne pravce, to se točka u beskonačnosti A ovih pravaca preslikava u točku u beskonačnosti, odnosno A leži na praslici l pravca u beskonačnosti. Dakle, ili je l pravac u beskonačnosti i onda je P afina transformacija ili je l paralelan s l_1 i l_2. □

• (Pr 30.14) Svaka bijekcija skupa svih točaka u konačnosti i beskonačnosti jedne ravnine u samog sebe koja preslikava pravce u pravce je projektivna transformacija.

Dokaz. Označimo danu bijekciju s P i pravac u beskonačnosti s l_∞. Ako je $P(l_\infty) = l_\infty$, onda P inducira bijekciju na skupu svih točaka u konačnosti ravnine koja preslikava pravce u pravce pa je P afina transformacija. U protivnom, uzmemo proizvoljnu projektivnu transformaciju Q kojoj je $P(l_\infty)$ singularan pravac. Tada je $(Q \circ P)(l_\infty) = l_\infty$, pa je kao u prvom slučaju $Q \circ P$ afino te zato i projektivno preslikavanje iz čega slijedi da je i $P = Q^{-1} \circ (Q \circ P)$ kao kompozicija projektivnih preslikavanja projektivno. □

Prije nego što dokažemo takozvani fundamentalni teorem projektivnih transformacija ravnine, napravit ćemo kratku digresiju o dvoomjeru s jednom točkom u beskonačnosti.

Označimo točku u beskonačnosti pravca l s ∞. Ako su A, B, C tri obične točke na l, onda možemo pridružiti simbolu $(ABC\infty)$ vrijednost na sljedeći način: uzmimo točku P na l; tada $(ABC\infty)$ treba biti limes kojemu teži $(ABCP)$ kad P duž pravca teži prema beskonačnosti.



No,

$$(ABCP) = \frac{AC}{BC} : \frac{AP}{BP}$$

i kad P ide u beskonačnost, $\frac{AP}{BP}$ se približava 1. Zato definiramo

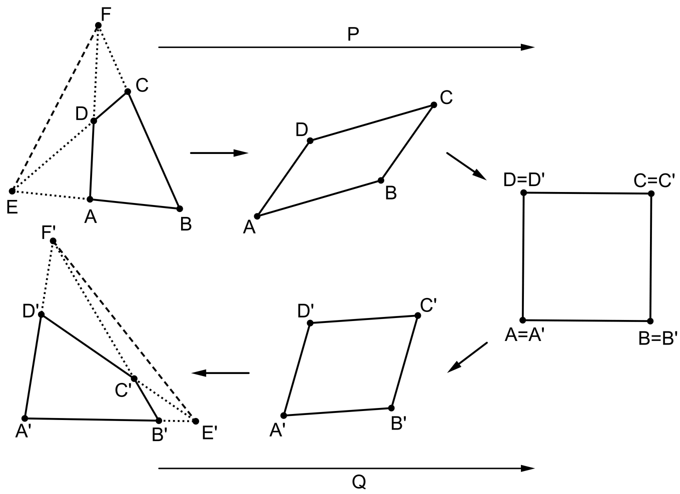
$$(ABC\infty) = \frac{AC}{BC}.$$

Posebno, ako je $(ABC\infty) = -1$, onda je C polovište dužine $\overline{AB}$, tj. polovište i točka u beskonačnosti u smjeru dužine harmonijski su konjugirani s obzirom na krajeve dane dužine. Za vježbu možete razmisliti o tome čemu je jednak dvoomjer četvorke paralelnih pravaca i posebno čemu je jednak ako je jedan od tih pravaca pravac u beskonačnosti.

● (*Osnovni teorem projektivnih transformacija ravnine*) Ako su dane dvije četvorke točaka A, B, C, D i A', B', C', D', pri čemu nikoje tri točke iz iste četvorke nisu kolinearne i sve točke iz četvorke leže u istoj ravnini, onda postoji jedinstvena projektivna transformacija koja točke A, B, C, D redom preslikava u točke A', B', C', D'.

Skica dokaza. Dokažimo najprije postojanje, a zatim i jedinstvenost projektivne transformacije iz teorema. Neka se parovi pravaca koji prolaze danim točkama sijeku ovako:

$$AB \cap CD = \{E\},\ AD \cap BC = \{F\}, \quad A'B' \cap C'D' = \{E'\},\ A'D' \cap B'C' = \{F'\}.$$



Pomoću projektivne transformacije kojoj je EF singularni pravac možemo postići da slika od $ABCD$ postane paralelogram, a zatim afinom transformacijom taj paralelogram preslikamo u kvadrat po volji. Kompoziciju ovih transformacija označimo s P. To je očito projektivna transformacija. Ako isti ovaj postupak napravimo s $A'B'C'D'$, pri čemu uzmemo isti kvadrat kao završnu sliku, dobivamo projektivnu transformaciju Q. Tada je $Q^{-1} \circ P$ tražena projektivna transformacija.

Neka je S projektivna transformacija takva da je $S(A) = A'$, $S(B) = B'$, $S(C) = C'$, $S(D) = D'$. Točke E, F, E', F' definiramo kao u prvom dijelu dokaza. Budući da S preslikava pravce u pravce, sigurno je $S(AB) = A'B'$ i $S(CD) = C'D'$, pa je zbog $E \in AB$ i $E \in CD$ nužno $S(E) \in A'B'$ i $S(E) \in C'D'$, tj. $S(E) = E'$. Analogno se pokaže da je $S(F) = F'$. Zbog očuvanja dvoomjera je jednoznačno određeno djelovanje S na pravcima AB, BC, CD, AD. Primjerice za $X \in AD$ je

$$(A'D'F'S(X)) = (S(A)S(D)S(F)S(X)) = (ADFX).$$

Kako bismo pokazali da je S jednoznačno određena i u točki X izvan ova četiri pravca, povučemo pravac koji prolazi kroz X i siječe ta četiri pravca u različitim točkama (to sigurno možemo zbog uvjeta nekolinearnosti iz teorema). Sada je djelovanje od S jednoznačno određeno u sjecištima s ta četiri pravca, pa zbog očuvanja dvoomjera i u samoj točki X. Dakle, dokazali smo da je zadavanjem projektivne transformacije u točkama A, B, C, D jednoznačno određeno djelovanje te transformacije i u svim ostalim točkama ravnine, pa je time dobivena i jedinstvenost. $\square$

Primjetite da nam u upravo završenom dokazu nije bilo bitno sijeku li se nasuprotne strane četverokuta $ABCD$ u konačnosti ili u beskonačnosti jer smo dvoomjer definirali u svim slučajevima.

• (Pr 30.15) Ukoliko u prethodnom teoremu izbacimo uvjet nekolinearnosti, projektivna transformacija s traženim svojstvom postoji, ali nije jedinstvena.

⋆⋆⋆

U rješavanju geometrijskih zadataka projektivne transformacije najčešće koristimo na sljedeći način: Odaberemo pravac l koji prolazi kroz što više sjecišta pravaca u danoj ravnini. Zatim primjenimo projektivnu transformaciju kojoj je l singularan pravac. Na taj način će se sve točke pravca l preslikati u točke u beskonačnosti, pa će slike pravaca koji su se sjekli na l biti paralelni pravci. Često je u novim uvjetima lakše dokazati tvrdnju zadatka, pa ukoliko svojstva koja dokazujemo ostaju sačuvana projektivnim transformacijama, znamo da smo ih dokazali i općenito. Pri tome valja imati na umu da projektivne transformacije ravnine čuvaju incidenciju ("pripadanje točke pravcu", tj. "prolaženje pravca kroz točku") i dvooomjere, a samo u specijalnom slučaju koji smo prije dokazali i omjere. Da bismo još pojednostavnili razmatranja, možemo koristiti i afine transformacije (primjer koji smo maloprije koristili je preslikavanje paralelograma u kvadrat), ali ne smijemo zaboraviti da se čuvaju samo zajednička svojstva svih transformacija koje smo upotrijebili: čim smo primjerice koristili neku općenitu projektivnu transformaciju (takvu u kojoj se može pojaviti i centralna projekcija), ne možemo više koristiti svojstva poput očuvanja paralelnosti ili očuvanja omjera površina koja afina transformacija ima.

Zadatke u kojima koristimo projektivna preslikavanja možemo usporediti s onima u kojima se pojavljuje inverzija s obzirom na kružnicu. Kod inverzije tražimo točku kroz koju prolazi dosta kružnica pa nam takva točka postaje središte kružnice inverzije kako bismo u slici dobili što više pravaca. Slično tome, kod projektivnih preslikavanja tražimo pravac na kojemu se siječe dosta pravaca kako bismo u slici dobili što više paralelnih pravaca. Na žalost, usporedba ovih dvaju preslikavanja prenosi se, po mom mišljenju, i na njihovu korisnost u rješavanju natjecateljskih geometrijskih zadataka, pri čemu projektivna preslikavanja imaju čak i uža područja upotrebljivosti.

Ilustrirajmo na jednom već riješenom zadatku standardni postupak koji smo opisali.

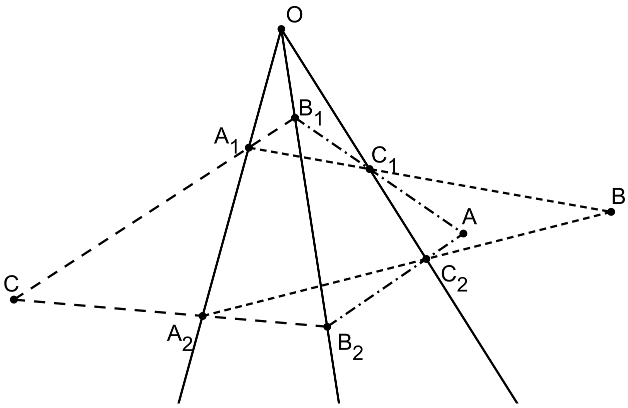
Rješenje zad. 8 (3. način). Primjenimo na danu ravninu projektivnu transformaciju kojoj je singularni pravac EF. Tada četverokut $ABCD$ postaje paralelogram (radi jednostavnosti zadržavamo iste oznake!). Naime, točke E i F preslikale su se u točke u beskonačnosti, pa se AB i CD sijeku u beskonačnosti, tj. paralelni su, a isto vrijedi i za AD i BC. Zbog očuvanja dvoomjera $(ABME)$ ostaje sačuvano, ali je nakon transformacije jednako $(ABM\infty) = AM/BM$ i slično za ostale dvoomjere. Dakle, preostaje pokazati da je M polovište od $\overline{AB}$. No, to je jasno jer M leži na pravcu

MN koji je paralelan sa stranicama $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ paralelograma $ABCD$ i prolazi njegovim središtem O. □

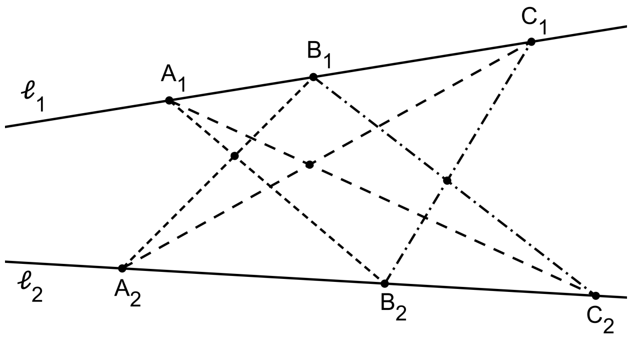
Evo još nekoliko zadataka za koje ćemo većinom dati samo upute, a ne i potpuna rješenja.

Zadatak 12. (Pr 30.25) Neka je O sjecište dijagonala četverokuta $ABCD$; neka je E sjecište pravaca AB i CD, a F sjecište pravaca BC i AD. Pravac EO siječe AD i BC redom u K i L, a FO siječe AB i CD u M i N. Dokažite da točka X koja je sjecište pravaca KN i LM leži na pravcu EF.

Zadatak 13. (Pr 30.26) (*Desargueov teorem*) Pravci A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 prolaze istom točkom O. Neka su A, B, C redom sjecišta pravaca B_1C_1 i B_2C_2, C_1A_1 i C_2A_2, A_1B_1 i A_2B_2. Dokažite da su točke A, B, C kolinearne.



Zadatak 14. (Pr 30.27) (*Pappusov teorem*) Točke A_1, B_1, C_1 leže na pravcu l_1, a točke A_2, B_2, C_2 leže na pravcu l_2. Dokažite da su sjecišta pravaca A_1B_2 i B_1A_2, B_1C_2 i C_1B_2, C_1A_2 i A_1C_2 kolinearne točke.



Zadatak 15. (Pr 30.28) Dan je konveksni četverokut $ABCD$. Neka su P i Q sjecišta produžetaka nasuprotnih stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ te $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$, respektivno. Neka je R proizvoljna točka unutar četverokuta, a K, L, M redom sjecišta BC i PR, AB i QR, AK i DR. Dokažite da su točke L, M, C kolinearne.

Zadatak 16. (Pr 30.30) (*Teorem o trostruko perspektivnim trokutima*) Dana su dva trokuta $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ tako da se pravci A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sijeku u točki O, pravci A_1A_2, B_1C_2, C_1B_2 sijeku u točki O_1, a pravci A_1C_2, B_1B_2, C_1A_2 sijeku u točki O_2. Dokažite da se pravci A_1B_2, B_1A_2, C_1C_2 također sijeku u istoj točki (nazovimo je O_3).

Zadatak 17. (Pr 30.31) Četiri pravca u ravnini određuju četiri trokuta. Dokažite da su ortocentri tih trokuta kolinearni.

Zadatak 18. (Pr 30.32) Dan je četverokut $ABCD$ i pravac l. Označimo s P, Q, R redom sjecišta pravaca AB i CD, AC i BD, BC i AD. Označimo s P_1, Q_1, R_1 polovišta dužina koje ovi parovi pravaca odsijecaju od pravca l. Dokažite da se pravci PP_1, QQ_1, RR_1 sijeku u istoj točki.

Zadatak 19. (Pr 30.35) Je li moguće obojati u ravnini nekih 2008 točaka crveno i nekih 2008 točaka plavo tako da su obojane točke različite, ne leže sve na istom pravcu i zadovoljavaju uvjet da svaki pravac koji prolazi dvjema točkama različite boje nužno prolazi još jednom obojanom točkom?

Zadatak 20. Neka je $VA_1 \ldots A_n$ piramida kojoj je $A_1 \ldots A_n$ baza i neka su odabrane točke $B_i \in \overline{VA_i}$, $1 \leq i \leq n$. Označimo s $\{T_{ij}\} = A_iB_j \cap A_jB_i$ za $1 \leq i < j \leq n$. Ako je barem $\binom{n-1}{2} + 1$ točaka T_{ij} komplanarno, onda su sve točke T_{ij} komplanarne.

Uputa za zad. 12. Primjenimo li projektivnu transformaciju kojoj je singularni pravac EF, četverokut $ABCD$ postaje paralelogram, a pravci KL i MN paralelni sa stranicama i prolaze sjecištem njegovih dijagonala, pa su točke K, L, M, N polovišta stranica paralelograma. □

Uputa za zad. 13. Primjenimo projektivnu transformaciju kojoj je AB singularni pravac, a nakon toga homotetiju sa središtem u O' (dodavanjem $'$ označavamo sliku točke s obzirom na danu projektivnu transformaciju) ili translaciju, ako je O' u beskonačnosti, koja šalje C_1' u C_2'.

Drugi način rješavanja zadatka je da primjenimo Menelajev teorem na:

$$\begin{aligned} &\triangle OA_1B_1 \text{ i pravac kroz } A_2, B_2, C \\ &\triangle OB_1C_1 \text{ i pravac kroz } B_2, C_2, A \\ &\triangle OA_1C_1 \text{ i pravac kroz } A_2, C_2, B, \end{aligned}$$

te sve tri dobivene jednakosti pomnožimo i onda još jednom iskoristimo Menelajev teorem ali u obratnom smjeru. □

Uputa za zad. 14. Primjenimo projektivnu transformaciju kojoj singularni pravac prolazi sjecištima A_1B_2 i B_1A_2, B_1C_2 i C_1B_2 i označimo s A_1' sliku od A_1 i slično za ostale točke. Tada je $A_1'B_2' \parallel B_1'A_2'$ i $B_1'C_2' \parallel C_1'B_2'$ te preostaje dokazati da je $C_1'A_2' || A_1'C_2'$.

Drugi način rješavanja zadatka je da primjenimo Menelajev teorem na trokut koji određuju pravci A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 i sljedeće pravce: $B_2C_1, C_2A_1, A_2B_1, l_1, l_2$. Izmnožimo pet dobivenih jednakosti i ponovno primjenimo Menelajev teorem, ali u drugom smjeru kako bismo pokazali tvrdnju zadatka. □

Uputa za zad. 15. Primjenimo projektivnu transformaciju kojoj je singularni pravac PQ. Sada zadatak riješimo pomoću sličnosti, površina ili korištenjem Menelajevog teorema. □

Uputa za zad. 16. Primjenimo projektivnu transformaciju kojoj je singularni pravac O_1O_2 i označimo s A_1' sliku od A_1 i slično za ostale točke. Tada je $A_1'C_2' \parallel C_1'A_2' \parallel B_1'B_2'$ i $B_1'C_2' \parallel C_1'B_2' \parallel A_1'A_2'$. Pretpostavimo, radi određenosti, da je točka C_1' unutar kuta $\angle A_1'O'B_1'$ (ostale slučajeve možemo svesti na ovaj nakon preimenovanja točaka). Sada primjenimo afinu transformaciju koja će $O'A_1'C_2'B_1'$ preslikati u kvadrat. Ostatak dokaza nije težak. □

Uputa za zad. 17. Dovoljno je dokazati da ortocentri svaka tri trokuta leže na istom pravcu. Odaberimo neka tri od dana četiri trokuta. Lako se vidi da je jedan od četiriju danih pravaca (nazovimo ga l_1) takav da po jedna strana svakog od tri odabrana trokuta leži na l_1. Preostale pravce nazovimo a, b, c, a točke u kojima sijeku l_1 nazovimo redom A_1, B_1, C_1. Neka je l_2 pravac u beskonačnosti, a A_2, B_2, C_2 točke u beskonačnosti od okomica na a, b, c, respektivno. Tada je tvrdnja da su ortocentri triju odabranih trokutova kolinearni direktna posljedica Pappusovog teorema (v. zad. 14).

Ukoliko osjećate nelagodu u primjeni Pappusovog teorema na ovaj način, možete najprije iskoristiti projektivnu transformaciju koja će sve točke i pravce koje prije spominjemo prebaciti u konačnost, a onda primjeniti teorem. □

Uputa za zad. 18. Primjenimo projektivnu transformaciju kojoj je singularni pravac paralelan s l i prolazi sjecištem pravaca PP_1 i QQ_1, zatim primjenimo afinu transformaciju koja pravce l i PP_1 preslikava u okomite pravce. Točke P_1, Q_1 i R_1 su i dalje polovišta pripadnih dužina jer je singularni pravac projektivne transformacije bio paralelan s l, a afina transformacija uvijek čuva omjere duljina dužina na istom pravcu.

Dakle, možemo uzeti da su pravci PP_1 i QQ_1 okomiti na pravac l i onda trebamo dokazati da je RR_1 također okomit na l. Iskoristimo činjenicu da su $\overline{PP_1}$ i $\overline{QQ_1}$ ujedno i težišnice i visine u određenim trokutima, pa su ti trokuti jednakokračni. Iz toga dobivamo da su pravci AC i BD osno simetrični s obzirom na QQ_1, a AB i CD simetrični s obzirom na PP_1. Ovo zajedno s $PP_1 \parallel QQ_1$ povlači $\angle BAC = \angle BDC$, pa je četverokut $ABCD$ tetivni. Igrajući se malo kutovima, nije teško pokazati da je RR_1 težišnica u nekom jednakokračnom trokutu kojemu je osnovica na l, pa je $RR_1 \perp l$. □

Uputa za zad. 19. Takvo bojanje je moguće. Zaista, promotrimo vrhove pravilnog 2008-erokuta koje obojamo crveno i točke u beskonačnosti pravaca na kojima leže stranice ovog 2008-erokuta koje obojamo plavo. Ovaj skup točaka ima tražena svojstva. Naime, svaki pravilni n-terokut, gdje je n paran, ima svojstvo da pravac koji prolazi jednim od njegovih vrhova i paralelan je jednoj od stranica prolazi još jednim vrhom.

Sada iskoristimo da se svaki konačan skup točaka u (projektivnoj) ravnini može projektivnom transformacijom preslikati u skup točaka u konačnosti. □

Rješenje zad. 20. Neka su točke $V_i \in \overline{VA_i}$ takve da je $(A_iB_iVV_i) = -1$. Primjenimo li rezultate iz zadatka 8 na četverkout $A_iA_jB_jB_i$, dobivamo da je $T_{ij} \in \overline{V_iV_j}$. Tvrdnju zadatka dokazat ćemo indukcijom.

Za $n = 3$ tvrdnja je trivijalna jer su tri točke uvijek komplanarne. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki n i neka je $VA_1 \dots A_{n+1}$ piramida i točke B_i, $1 \le i \le n+1$ te T_{ij}, $1 \le i < j \le n+1$ kao u zadatku. Označimo s π ravninu u kojoj prema uvjetu zadatka leži barem $\binom{n}{2} + 1$ točaka T_{ij}, $1 \le i < j \le n+1$. Renumerirajući, ako je potrebno, vrhove baze dane piramide, možemo pretpostaviti da se

$$m = \min_{1 \le i \le n+1} \operatorname{card}\{j : T_{ij} \in \pi \ \text{ ili } T_{ji} \in \pi\}$$

postiže za $i = n+1$, pri čemu smo s card$\{\cdot\}$ označili broj elemenata skupa. Primjetimo da je $m \ge 1$ jer bi u protivnom u π moglo ležati najviše $\binom{n}{2}$ točaka T_{ij}. Za $m = n$ bi očito sve točke T_{ij} ležale u ravnini π, pa pretpostavimo da je $m \le n-1$. Ako sada izbacimo točku A_{n+1} i sve točke oblika $T_{i,n+1}$, onda nam preostaje $VA_1 \dots A_n$ i barem $\binom{n}{2} + 1 - (n-1) = \binom{n-1}{2} + 1$ točaka T_{ij} u π. Sada iz pretpostavke indukcije dobivamo da su sve točke T_{ij}, $1 \le i < j \le n$ u π, pa zbog

$$T_{ij} \in \overline{V_iV_j},\ T_{ik} \in \overline{V_iV_k},\ T_{jk} \in \overline{V_jV_k} \ \text{ za sve } 1 \le i < j < k \le n,$$

vidimo da su i sve točke $V_1, \dots, V_n$ iz π.

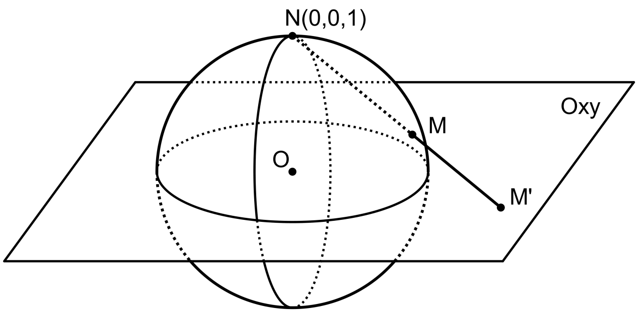
Sada zbog $m \ge 1$ postoji neki $1 \le i \le n$ tako da je $T_{i,n+1} \in \pi$, što zajedno s $V_i \in \pi$ i $T_{i,n+1} \in \overline{V_iV_{n+1}}$ povlači $V_{n+1} \in \pi$. Iz $T_{j,n+1} \in \overline{V_jV_{n+1}}$, $1 \le j \le n$, dobivamo da su i točke $T_{j,n+1}$ u π čime je dokaz završen. □

⋆ ⋆ ⋆

Analitički se pokazuje da se projektivnim transformacijama krivulje drugog reda (elipsa, hiperbola, parabola i degenerirani slučajevi) preslikavaju ponovno u krivulje drugog reda, ali nije nužno da se primjerice parabola opet preslika u parabolu. Naime, ako se sjetimo da se svaka krivulja drugog reda može dobiti kao presjek dvostrukog stošca (konusa) i ravnine (pa se zato krivulje i zovu konike), vidimo da centralna projekcija sa središtem u vrhu definirajućeg stošca može danu krivulju preslikati i u elipsu i u parabolu i u hiperbolu, ovisno o tome pod kojim kutem ravnina na koju projiciramo siječe os stošca.

Mi bismo željeli osigurati da slika određene kružnice bude kružnica i zato ćemo projektivnu transformaciju konstruirati koristeći preslikavanje za koje znamo da sigurno preslikava kružnice u kružnice. To preslikavanje definiramo u nastavku, a radi jednostavnosti zapisa, poslužit ćemo se Kartezijevim koordinatnim sustavom u prostoru.

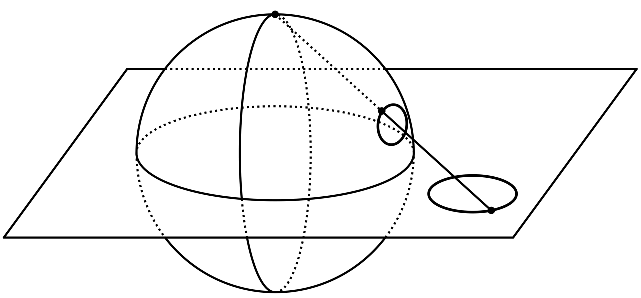
Definicija. Promotrimo jediničnu sferu sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava. Neka je $N(0,0,1)$ sjeverni pol ove sfere. *Stereografska projekcija* sfere na ravninu je preslikavanje koje svakoj točki M sfere, različitoj od N, pridružuje probodište pravca NM i ravnine Oxy (ravnine $z=0$).



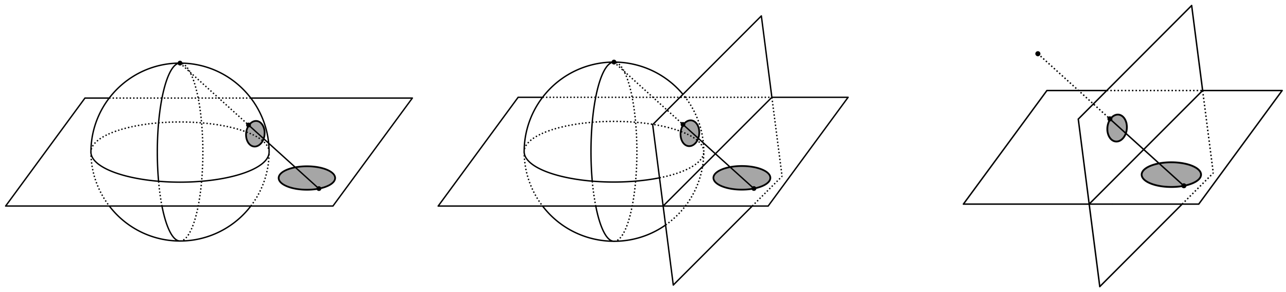
• U prostoru *inverziju* definiramo na isti način kao u ravnini. Ako je O središte, a r radijus sfere s obzirom na koju vršimo inverziju, onda točki $X \neq O$ pridružujemo točku X' tako da je

$$\overrightarrow{OX'} = \frac{r^2}{OX^2}\overrightarrow{OX}.$$

Inverzija preslikava ravnine i sfere u ravnine ili sfere ovisno o tome prolaze li ili ne točkom O.
• Stereografska projekcija je restrikcija inverzije u prostoru na sferu koja prolazi centrom inverzije. Svaka kružnica na sferi je presjek sfere s ravninom, pa se stereografskom projekcijom preslikava u pravac ili kružnicu.

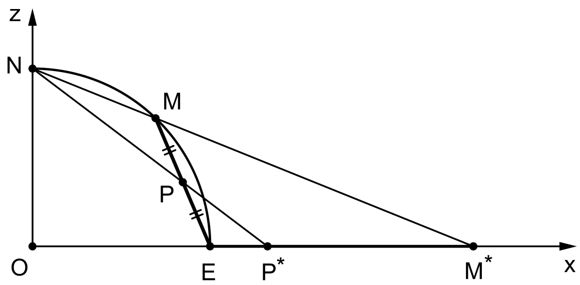


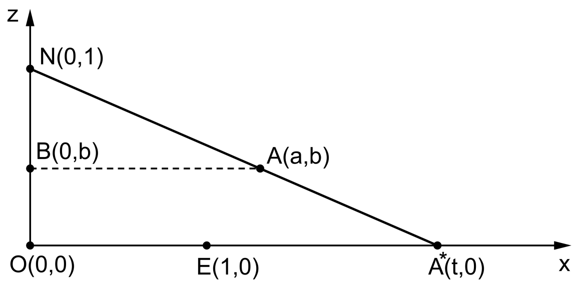
Korištenje stereografske projekcije kako bismo našli "pravu" centralnu projekciju, ilustrirano je na sljedećoj slici i osnova je dokaza važne tvrdnje u nastavku.



● (Pr 30.16) Dana je kružnica k i točka C unutar te kružnice. Postoji projektivna transformacija koja preslikava k u kružnicu, a C u središte slike kružnice k.

Dokaz. U koordinatnoj ravnini Oxz promotrimo točke $O(0,0)$, $N(0,1)$, $E(1,0)$. Za proizvoljnu točku M koja leži na luku $\widehat{NE}$ jedinične kružnice, označimo s P polovište dužine $\overline{EM}$, a s M^* i P^* redom sjecišta pravaca NM i NP s pravcem OE.





Dokažimo da je za proizvoljan realan broj $k > 2$ moguće odabrati točku M tako da je

$$M^*E : P^*E = k.$$

Neka je $A(a,b)$ proizvoljna točka u ravnini, $A^*(t,0)$ sjecište pravaca NA i OE, a $B(0,b)$ ortogonalna projekcija točke A na pravac ON. Tada je

$$t = \frac{A^*O}{ON} = \frac{AB}{BN} = \frac{a}{1-b}.$$

Dakle, ako su (x,z) koordinate točke M, onda točke P, M^*, P^* imaju koordinate

$$P\Big(\frac{x+1}{2}, \frac{z}{2}\Big), \quad M^*\Big(\frac{x}{1-z}, 0\Big), \quad P^*\Big(\frac{(x+1)/2}{1-(z/2)}, 0\Big),$$

pa je zato

$$M^*E : P^*E = \Big(\frac{x}{1-z} - 1\Big) : \Big(\frac{x+1}{2-z} - 1\Big) = \frac{x+z-1}{1-z} : \frac{x+z-1}{2-z} = \frac{2-z}{1-z}.$$

Očito je da jednadžba $\frac{2-z}{1-z} = k$ ima rješenje $z = \frac{k-2}{k-1}$ i za $k > 2$ je $0 < z < 1$, pa je tražena točka $M(\sqrt{1-z^2}, z)$.

Dokažimo sada glavnu tvrdnju. Ako je točka C već središte kružnice k, onda je tražena projektivna transformacija identiteta. Pretpostavimo zato da C nije središte. Označimo sa $\overline{ST}$ promjer od k koji prolazi točkom C i neka je, radi određenosti, $TC > CS$. Ako stavimo $k = TS : CS$, onda je $k > 2$, pa, prema prije dokazanom, možemo odabrati točku M na jediničnoj kružnici u ravnini Oxz tako da je $M^*E : P^*E = k = TS : CS$. Stoga pomoću afine transformacije možemo preslikati kružnicu k u kružnicu k' u ravnini Oxy kojoj je dužina $\overline{EM^*}$ promjer tako da su slike točaka S, T, C redom točke E, M^*, P^*.

Stereografska projekcija preslikava kružnicu k' u kružnicu k'' na jediničnoj sferi koja je simetrična s obzirom na ravninu Oxy, pa onda i s obzirom na pravac EM. Zato je $\overline{EM}$ promjer k'', a polovište P od $\overline{EM}$ je središte k''.

Neka je α ravnina koja sadrži kružnicu k''. Jasno je da centralna projekcija ravnine Oxy na ravninu α iz sjevernog pola jedinične sfere preslikava k' u k'' i točku P^* u središte P od k''. $\square$

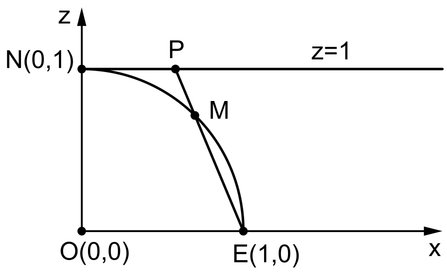
• (Pr 30.18) Dana je kružnica i njezina tetiva. Postoji projektivna transformacija koja preslikava danu kružnicu u kružnicu, a danu tetivu u promjer slike dane kružnice.

• Ako projektivna transformacija preslikava kružnicu u kružnicu i točku C u središte slike dane kružnice, onda je singularni pravac transformacije okomit na promjer kroz C.

Dokaz. Promjer $\overline{ST}$ koji prolazi kroz C preslikava se u promjer, pa se tangente u točkama S i T preslikavaju u tangente (zbog injektivnosti preslikavanja). No, dokazali smo prije da ako se paralelni pravci preslikavaju u paralelne pravce, singularni pravac mora biti s njima paralelan. $\square$

• (Pr 30.17) U ravnini su dana kružnica i pravac koji je ne siječe. Postoji projektivna transformacija koja danu kružnicu preslikava u kružnicu, a dani pravac u pravac u beskonačnosti.

Skica dokaza. U koordinatnoj ravnini Oxz promotrimo točke $O(0,0)$, $N(0,1)$ i $E(1,0)$. Za proizvoljnu točku M na luku $\widehat{\mathrm{NE}}$ jedinične kružnice, označimo s P sjecište dužine $\overline{EM}$ s pravcem $z=1$.

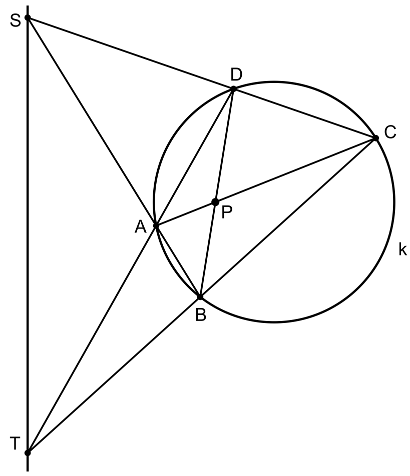


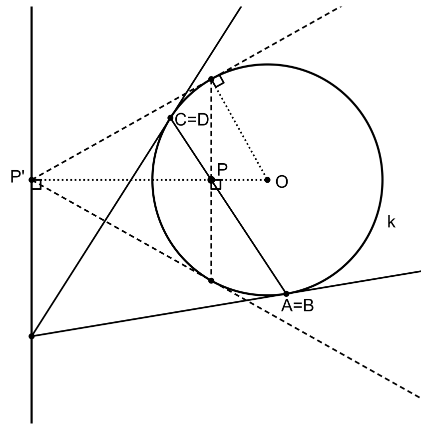
Pomičući točku M duž luka $\widehat{\mathrm{NE}}$, možemo postići da omjer $EM : MP$ bude jednak proizvoljnom pozitivnom broju. Zato pomoću afine transformacije možemo preslikati kružnicu k u kružnicu k' kojoj je $\overline{EM}$ promjer, a leži u ravnini α okomitoj na Oxz tako da se dani pravac l preslika u pravac koji prolazi točkom P i okomit je na Oxz. Kružnica k' leži na jediničnoj sferi sa središtem u ishodištu, pa stereografska projekcija preslikava k' u kružnicu k'' u ravnini Oxy. Stoga centralna projekcija ravnine α na ravninu Oxy sa središtem u N preslikava k' u k'' i l u beskonačni pravac. $\square$

• (Pr 30.19) Dane su kružnica k i točka P unutar nje. Sva projektivna preslikavanja koja k preslikavaju u kružnicu, a P u središte slike od k imaju isti singularni pravac.

Skica dokaza. Povučemo kroz točku P dvije proizvoljne tetive $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Neka su S i T sjecišta produžetaka nasuprotnih stranica četverokuta $ABCD$. Promotrimo proizvoljnu projektivnu transformaciju koja preslikava k u kružnicu, nazovimo je k', i P u središte k'. Jasno je da ova transformacija preslikava četverokut $ABCD$ u pravokutnik, pa pravac ST šalje u pravac u beskonačnosti. $\square$

Singularni pravac u prethodnoj tvrdnji naziva se *polara* točke P u odnosu na kružnicu k. Budući da je određen projektivnom transformacijom, jasno je da pravac ST u prethodnom dokazu ne ovisi o izboru tetiva $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Primjetimo da u graničnom slučaju, kad se B podudara s A i D podudara s C, pravci AB i CD postaju tangente na tu kružnicu koje se također sijeku na istom pravcu, pri čemu u slučaju kad je $\overline{AC}$ okomit na promjer kružnice k koji prolazi kroz P dobivamo klasičnu sliku iz uobičajene definicije polare točke unutar kružnice.





Definicija. Neka je dana kružnica k sa središtem u O. *Polarno preslikavanje* (engl. reciprocation) je zamjena točaka i pravaca na sljedeći način:

· Ako je P točka u konačnosti različita od O, *polara* od P je pravac p koji prolazi kroz P' i okomit je na PP' pri čemu je P' inverz od P s obzirom na k.

· Ako je p pravac u konačnosti koji ne prolazi kroz S, *pol* od p je inverz s obzirom na k nožišta okomice iz O na p.

· Ako je P točka u beskonačnosti, polara od P je pravac kroz O koji je okomit na svaki pravac kroz P. Obratno definiramo pol pravca kroz O.

· Ako je P točka O, polara od P je pravac u beskonačnosti. Obratno definiramo pol pravca u beskonačnosti.

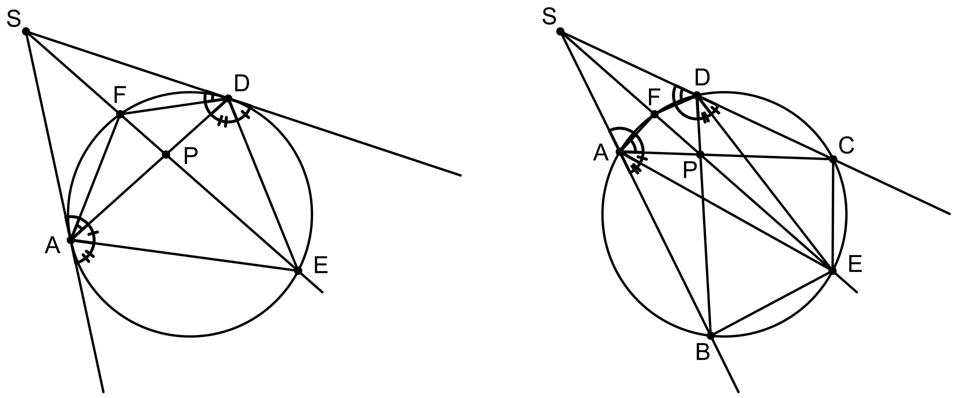
Vidimo da je p polara od P s obzirom na k ako i samo ako je P pol od p s obzirom na k. Zato koristimo uobičajeno označavanje po kojemu se točke označavaju velikim slovima, a njihove polare odgovarajućim malim slovima.

Evo i jedne karakterizacije pola i polare koja omogućuje njihovo definiranje i za ostale konike, a ne samo za kružnicu. No, mi se time nećemo baviti.

• Neka je P točka, a k kružnica na kojoj P ne leži. Pravac kroz P siječe k u točkama M i N. Neka je točka Q harmonijski konjugirana točki P s obzirom na M i N, tj. $(MNPQ) = -1$. Geometrijsko mjesto točaka Q je polara od P s obzirom na k (u slučaju kad je P unutar kružnice), odnosno dužina koja na toj polari leži (u slučaju kad je P van kružnice).

Zadatak 21. Dokažite da su definicija i tri karakterizacije polare (pomoću tetiva, pomoću tangenti, pomoću harmonijskih konjugata) ekvivalentne.

Uputa. Dokažite najprije da je polara točke P s obzirom na kružnicu k (sa središtem u O) zapravo slika kružnice kojoj je $\overline{OP}$ promjer po inverziji ravnine s obzirom na kružnicu k. Iz toga se lako dobiva karakterizacija polare pomoću tangenti. Sada pokažite ekvivalentnost karakterizacija pomoću tangenti, odnosno tetiva i pomoću harmonijskih konjugata. To nije teško ako iskoristite vezu između dvoomjera točaka i pravaca te jednakost mnogih kutova oko kružnice.



(EFPS)=(AE AF AP AS)=(DE DF DS DP)=(EFSP)=(EFPS)$^{-1}$

□

Polarno preslikavanje ima sljedeća svojstva:
- Svaka točka je pol svoje polare i svaki pravac je polara svoga pola.
- Vrijedi $P \in q \Leftrightarrow Q \in p$.
- Pol pravca AB je presjek polara a i b.
- Tri točke su kolinearne ako i samo ako su njihove polare kopunktalne (tj. prolaze istom točkom).

Koristeći polarno preslikavanje dobivamo važan princip dualnosti:

● (*Princip dualnosti*) Teorem projektivne geometrije ostaje vrijediti ako zamijenimo uloge točaka i pravaca.

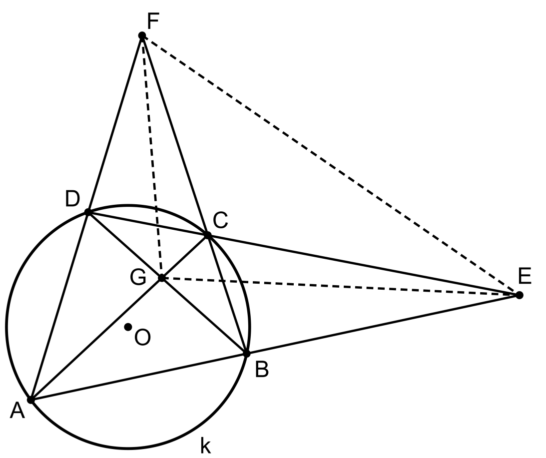
Pojasnimo malo ovaj princip: Neka je $\mathcal{C}$ projektivna konfiguracija točaka i pravaca u ravnini (to znači da gledamo samo kolinearnost i kopunktalnost). Izaberimo neku kružnicu te s obzirom na nju uzmemo polaru svake točke i pol svakog pravca iz $\mathcal{C}$. U novoj konfiguraciji sve prijašnje kolinearnosti postale su kopunktalnosti i obratno.

Provjerite da se koristeći princip dualnosti iz Desarguesovog teorema (zad. 13) dobiva njegov obrat, a iz Pappusovog teorema (zad. 14) takozvani *teorem o dvostruko perspektivnim trokutima* koji je reformulacija zadatka 15.

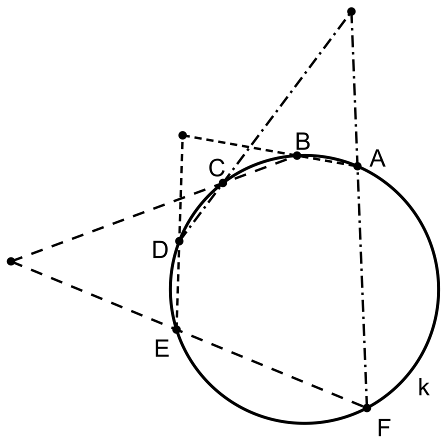
Za kraj, evo nekoliko zadataka. Postoji više načina na koji se svaki od zadataka može riješiti. U uputama se navode rješenja koja koriste neke od tvrdnji koje smo prije dokazali. Pokušajte naći i rješenja u kojima se koriste samo standardne metode iz srednjoškolske geometrije.

Zadatak 22. (Pr 30.36) Dokažite da spojnica točaka u kojima nasuprotne stranice tangencijalnog četverokuta dodiruju njemu upisanu kružnicu prolazi sjecištem dijagonala tog četverokuta.

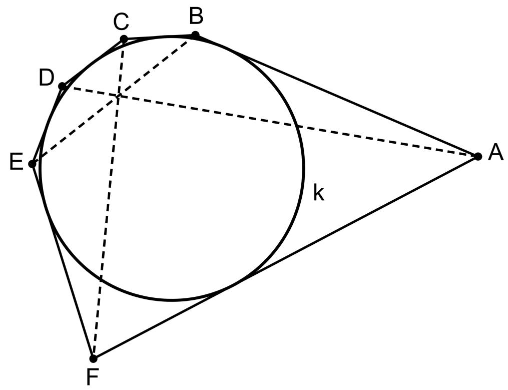
Zadatak 23. (*Brocardov teorem*) Četverokut $ABCD$ upisan je u kružnicu k sa središtem u O. Neka je $E \in AB \cap CD$, $F \in AD \cap BC$, $G \in AC \cap BD$. Dokažite da je O ortocentar trokuta EFG.



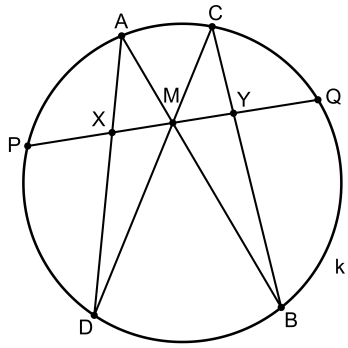
Zadatak 24. (Pr 30.43) (*Pascalov teorem*) Šesterokut $ABCDEF$ upisan je u kružnicu (tj. vrhovi mu leže na kružnici k). Dokažite da sjecišta AB i DE, BC i EF, CD i FA leže na istom pravcu.



Zadatak 25. (Pr 30.42) (*Brianchonov teorem*) Neka je $ABCDEF$ šesterokut opisan kružnici (tj. pravci na kojima leže stranice dodiruju kružnicu k). Dokažite da pravci AD, BE i CF prolaze istom točkom.



Zadatak 26. (Pr 30.44) (*Teorem o leptiru*) Neka je M polovište tetive $\overline{PQ}$ kružnice k; neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ proizvoljne tetive kroz M tako da su točke A i C s iste strane od AB; neka su X i Y sjecišta tetive $\overline{PQ}$ s pravcima AD i BC, respektivno. Dokažite da je M polovište dužine $\overline{XY}$.



Zadatak 27. (Pr 30.45) Točke A, B, C, D leže na kružnici, SA i SD su tangente na tu kružnicu, a P i Q su sjecišta AB i CD, AC i BD, tim redom. Dokažite da su točke P, Q, S kolinearne.

Zadatak 28. (Pr 30.59) Dokažite da korištenjem samo ravnala nije moguće podijeliti danu dužinu na dva jednaka dijela.

Zadatak 29. (Pr 30.60) Dokažite da korištenjem samo ravnala nije moguće konstruirati središte dane kružnice.

Uputa za zad. 22. Iskoristimo projektivnu transformaciju koja upisanu kružnicu preslikava u kružnicu k, a sjecište spojnica nasuprotnih dirališta u središte od k. Sada je lako vidjeti da je dobiveni četverokut simetričan s obzirom na središte od k, pa je paralelogram, a za njega tvrdnja zadatka vrijedi. S obzirom da projektivna transformacija čuva incidenciju, tvrdnja vrijedi i za početni četverokut. □

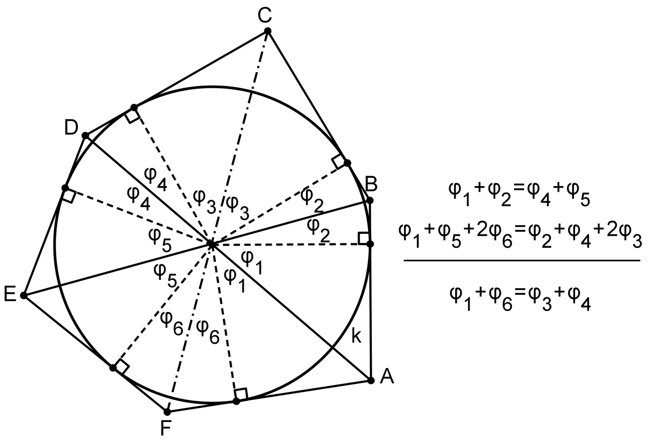
Uputa za zad. 23. Treba dokazati da je FG polara od E. Ako FG siječe AB i CD redom u X i Y, onda je prema zadatku 8, $(ABEX) = (DCEY) = -1$, pa je prema karakterizaciji polare koju smo dokazali u zadatku 21, FG polara od E s obzirom na k i zato je $OE \perp FG$. Analogno se pokaže za ostale dvije okomitosti. □

Uputa za zad. 24. 1. način. Primjenimo projektivnu transformaciju koja preslikava kružnicu k u kružnicu, a sjecišta pravaca AB i DE, BC i EF u točke u beskonačnosti (sjetimo se da smo dokazali da možemo odabrati singularni pravac). Sada iskoristimo $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ i kutove oko kružnice da bi pokazali $CD \parallel FA$.
2. način Definirajmo $P \in AB \cap DE$, $Q \in BC \cap EF$, $R \in CD \cap FA$. Neka je κ kružnica koja prolazi točkama C, F, R i neka produžetci dužina $\overline{BC}$ i $\overline{EF}$ sijeku ovu kružnicu ponovno u G i H, tim redom. Imamo

$$\angle CBE \stackrel{k}{=} \angle CFE \stackrel{\kappa}{=} 180^\circ - \angle CGH,$$

pa je $BE \parallel GH$ i analogno $ED \parallel HR$, $AB \parallel RG$. Trokuti $\triangle RGH$ i $\triangle PBE$ imaju paralelne stranice, pa su homotetični. Drugim riječima, pravci BG, EH, PR sijeku se u istoj točki, pa je točka $Q \in BG \cap EH$ kolinearna s P i R što smo i željeli dokazati. □

Uputa za zad. 25. 1. način. Primjenimo projektivnu transformaciju koja preslikava k u kružnicu, a sjecište AD i BE u njezino središte. Sada još treba pokazati da i CF prolazi središtem nove kružnice, a za to nam treba samo malo razmatranja o kutovima.



2. način. Neka je dan tangencijalni šesterokut kao u zadatku. Primjenimo polarno preslikavanje s obzirom na kružnicu k. Dobivamo tetivni šesterokut i primjenimo Pascalov teorem (v. prethodni zadatak). Kolinearnost presjeka produžetaka nasuprotnih stranica postaje, ako se vratimo na početnu konfiguraciju, kopunktalnost pravaca kroz nasuprotne vrhove. Dakle, Pascalov i Brianchonov teorem su dualni u smislu koji smo prije objašnjavali. □

Uputa za zad. 26. Različite dokaze ovog teorema pogledajte npr. na ovoj internetskoj stranici: http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml

U nastavku je projektivno rješenje. Pomoću projektivne transformacije preslikamo kružnicu k u k' i točku M u središte M' kružnice k'. Neka su slike točaka $P, Q, \ldots$ točke $P', Q', \ldots$. Tada su $\overline{P'Q'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$ promjeri od k'. Centralna simetrija s obzirom na M' preslikava X' u Y', tj. M' je polovište $\overline{X'Y'}$. Budući da je tetiva $\overline{PQ}$ okomita na promjer kroz M kružnice k, a taj promjer je prema prije dokazanom rezultatu okomit na singularan pravac transformacije, zaključujemo da je PQ paralelan sa singularnim pravcem, pa se omjeri duljina dužina koje leže na PQ čuvaju pri danoj projektivnoj transformaciji iz čega slijedi da je M polovište od $\overline{XY}$. □

Uputa za zad. 27. Projektivnom transformacijom preslikamo danu kružnicu u kružnicu tako da slika od $\overline{AD}$ bude njezin promjer. Slike točaka označimo s $'$. Točka S preslikava se u točku S' u beskonačnosti koja pripada svim pravcima okomitim na $A'D'$. Dužine $\overline{A'C'}$ i $\overline{B'D'}$ su visine $\triangle A'D'P'$, pa je Q' ortocentar tog trokuta iz čega slijedi da je $P'Q'$ okomit na $A'D'$, pa prolazi točkom S'. □

Uputa za zad. 28. Pretpostavimo da možemo izvršiti traženu konstrukciju, tj. možemo napisati algoritam (upute) čiji rezultat je polovište dane dužine. Izvedimo ovu konstrukciju i promotrimo projektivnu transformaciju koja fiksira krajeve dane dužine, a polovište preslikava u neku drugu točku. Ovo preslikavanje možemo izabrati tako da singularni pravac ne prolazi nijednom od točaka dobivenih tijekom pojedinih koraka konstrukcije.

Izvedimo naš zamišljeni postupak još jednom, ali ovaj puta svaki puta kada naiđemo na uputu "uzmi proizvoljnu točku/pravac" uzet ćemo sliku točke/pravca koju smo uzeli tijekom prve konstrukcije.

Budući da projektivna transformacija preslikava svaki pravac u pravac i presjek pravaca u presjek njihovih slika i jer je zbog izbora projektivne transformacije taj presjek uvijek točka u konačnosti, slijedi da u svakom koraku druge konstrukcije dobivamo sliku rezultata dobivenog u tom koraku u prvoj konstrukciji, pa na kraju ne dobivamo polovište dužine, nego njegovu sliku. Ova kontradikcija pokazuje da je naša početna pretpostavka bila kriva.

Dokazali smo zapravo sljedeću činjenicu:
Ako postoji projektivna transformacija koja preslikava svaki od objekata $A_1, \ldots, A_n$ u njega samog, a objekt B ne preslikava u samog sebe, onda je nemoguće samo korištenjem ravnala iz objekata $A_1, \ldots, A_n$ konstruirati objekt B. □

Uputa za zad. 29. Tvrdnja slijedi direktno iz napomene na kraju prethodnog rješenja i osnovne tvrdnje s vrha stranice 21. □