Sustavi linearnih jednadžbi

2. dio kolegija Numeričke metode financijske matematike

Nela Bosner

Sustavi linearnih jednadžbi
Nela Bosner
Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Primjer

- *Portfelj koji se sastoji od n različitih vrijednosnica može se opisati pomoću njihovih težina*

$$\omega_i = \frac{x_i S_i(0)}{V(0)}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

gdje je x_i broj dionica tipa i u portfelju, $S_i(0)$ je početna cijena vrijednosnice i, a $V(0)$ je količina koja je početno investirana u portfelj.

- *Definirajmo*

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Primjer (nastavak)

- *Iz definicije je vidljivo da je* $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$*, odnosno*

$$\mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega} = 1.$$

- *Pretpostavimo da povrat* i*-te vrijednosnice* R_i *ima očekivanje* $\mu_i = E(R_i)$*, i definirajmo*

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}.$$

- *Nadalje, kovarijancu između dva povrata označimo sa* $c_{ij} = Cov(R_i, R_j)$ *i definirajmo matricu kovarijance*

Primjer (nastavak)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}.$$

- *Dobro je poznato da je matrica kovarijance simetrična pozitivno definitna matrica, pa je prema tome regularna i inverz* $\mathbf{C}^{-1}$ *postoji.*
- *Očekivani povrat* $\mu_P = E(R_P)$ *i varijanca* $\sigma_P^2 = Var(R_P)$ *portfelja sa težinama* ω *dani su sa*

$$\begin{aligned} \mu_P &= \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\omega} \\ \sigma_P^2 &= \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Primjer (nastavak)

- *Portfelj sa najmanjom varijancom ima težine*

$$\boldsymbol{\omega}_{min} = \frac{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}}.$$

  - *Gornju tvrdnju možemo pokazati traženjem minimuma funkcije* $\omega^T \mathbf{C}\omega$ *uz uvjet* $\mathbf{e}^T\omega = 1$
  - *Definirajmo funkciju*

$$F(\omega, \lambda) = \omega^T \mathbf{C}\omega + \lambda(1 - \mathbf{e}^T\omega),$$

    gdje je λ *Lagrangeov multiplikator.*
  - *Budući da tražimo minimum, rješavamo jednadžbu*

$$\begin{aligned} \nabla_\omega F(\omega, \lambda) &= 0 \\ 2\mathbf{C}\omega - \lambda\mathbf{e} &= 0 \end{aligned}$$

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Primjer (nastavak)

- *Rješenje jednadžbe je*

$$\omega = \frac{\lambda}{2}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e},$$

  što je nužni uvijet za minimum.
- *Dalje to uvrštavamo u uvjet, i dobivamo*

$$\frac{\lambda}{2}\mathbf{e}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e} = 1,$$

  odakle slijedi rezultat.

- *Portfelj sa najmanjom varijancom i sa očekivanim povratom μ_P ima težine*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mu_p} = \frac{(\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu} - \mu_P \cdot \mathbf{e}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu})\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e} + (\mu_p \cdot \mathbf{e}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e} - \mathbf{e}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu})\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{e}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu} - (\mathbf{e}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}.$$

Primjer (nastavak)

- *Gornju tvrdnju možemo pokazati traženjem minimuma funkcije* $\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\omega}$ *uz uvjete* $\mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega} = 1$ *i* $\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\omega} = \mu_P$.
- *Definirajmo funkciju*

$$F(\boldsymbol{\omega}, \lambda_1, \lambda_2) = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\omega} + \lambda_1 (1 - \mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega}) + \lambda_2 (\mu_P - \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\omega}),$$

gdje su λ_1 *i* λ_2 *Lagrangeov multiplikatori.*

- *Budući da tražimo minimum, rješavamo jednadžbu*

$$\begin{aligned} \nabla_{\omega} F(\boldsymbol{\omega}, \lambda_1, \lambda_2) &= 0 \\ 2\mathbf{C}\boldsymbol{\omega} - \lambda_1 \mathbf{e} - \lambda_2 \boldsymbol{\mu} &= 0 \end{aligned}$$

- *Rješenje jednadžbe je*

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{C}^{-1} (\lambda_1 \mathbf{e} + \lambda_2 \boldsymbol{\mu}),$$

što je nužni uvijet za minimum.

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Primjer (nastavak)

- *Dalje to uvrštavamo u uvjete, i dobivamo*

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}}{2} + \lambda_2 \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{2} &= 1 \\ \lambda_1 \frac{\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}}{2} + \lambda_2 \frac{\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{2} &= \mu_P \end{aligned}$$

- *Zbog jednostavnosti, uvodimo oznake*

$$a = \mathbf{e}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}, \quad b = \mathbf{e}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}, \quad c = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\mu},$$

  jer je $\mathbf{C}$ *simetrična, pa je i* $\mathbf{C}^{-1}$ *simetrična.*
- *Jednadžbe za* λ_1 *i* λ_2 *su sada oblika*

$$\begin{aligned} a\lambda_1 + b\lambda_2 &= 2 \\ b\lambda_1 + c\lambda_2 &= 2\mu_P \end{aligned}$$

Primjer (nastavak)

- *Rješenje prethodnog sustava je*

$$\lambda_1 = \frac{2(c - b\mu_P)}{ac - b^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{2(a\mu_P - b)}{ac - b^2}.$$

- *Uvrštavanjem ovih vrijednosti za λ_1 i λ_2 u jednadžbu za $\boldsymbol{\omega}$*

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\lambda_1}{2}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e} + \frac{\lambda_2}{2}\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu},$$

dobivamo rezultat.

- *Zbog efikasnog računanja $\boldsymbol{\omega}_{\mu_p}$ možemo napisati u obliku*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{\mu_p} &= \frac{c\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e} - b\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{d} + \mu_P \frac{a\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu} - b\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}}{d} \\ &= \mathbf{g} + \mu_P \mathbf{h}\end{aligned}$$

gdje je $d = ac - b^2$.

Primjer (nastavak)

- *Riješimo konkretan problem za zadane očekivane povrate i za zadanu matricu kovarijance:*

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.03 \\ 0.05 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.02 & 0.01 \\ 0.02 & 0.15 & 0.03 \\ 0.01 & 0.03 & 0.18 \end{bmatrix}.$$

- *U ovom slučaju promatrat ćemo 51 različitu vrijednost od μ_P u rasponu od 0.03 do 0.08 uz korak* 0.001.
- *Za svaki μ_P iračunat ćemo odgovarajući $\boldsymbol{\omega}_{\mu_P}$ sa minimalnom varijancom i standardnu devijaciju $\sigma_{\mu_p} = \sqrt{\boldsymbol{\omega}_{\mu_P}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\omega}_{\mu_P}}$ tog portfelja.*

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Primjer (nastavak)

- *MATLAB funkcija koja rješava ovaj konkretan primjer nalazi se u M-fileu*

  `primjer_sustav_portfelj.m`

  na adresi

  `http://www.math.hr/~nela/nmfm.html`

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

- Primijetimo da je u ovom M-fileu izračunat inverz $\mathbf{C}^{-1}$ i zatim je on primijenjen 9 puta na vektor $\mathbf{e}$ ili $\boldsymbol{\mu}$.
- To je zapravo vrlo neefikasan način jer je ekvivalentan rješavanju linearnog sustava $\mathbf{C}X = I$ gdje je I $n \times n$ identiteta (sustav sa n različitih desnih strana).
- Još k tome imamo 9 množenja matrice s vektorom.
- S druge strane u našem primjeru pojavljuju se samo $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}$ i $\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}$ što je ekvivalentno sustavima s dvije različite desne strane

$$\mathbf{C}x = \mathbf{e}, \quad i \quad \mathbf{C}x = \boldsymbol{\mu}.$$

- Dakle potrebno je samo jedanput izračunati te vektore, spremiti ih, i onda ih upotrijebiti 9 puta.
- Vrlo rijetko se koristi samo inverz matrice. Puno češce se on množi s vektorom i onda imamo posla sa rješavanjem sustava linearnih jednadžbi.

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Primjer

- *Efikasna tržišna hipoteza predviđa da će se log povrati dionica ponašati kao bijeli šum.*
- *Zbog toga se log povrati jednostavno modeliraju ARMA (autoregressive moving avarage) procesima.*
- *ARMA proces $\{z_t\}$ stupnja (p, q), centriran oko nule, definira se diferencijskom stohastičkom jednadžbom*

$$z_t - \phi_1 z_{t-1} - \cdots - \phi_p z_{t-p} = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \cdots - \theta_q e_{t-q},$$

  gdje je $e_1, e_2, \ldots, e_t, \ldots$ bijeli šum.
- *Pod pretpostavkom normalno distribuirane greške, promatramo konačni segment ovog niza $z = [z_1, \ldots, z_n]^T$ koji ima multivarijatnu normalnu distribuciju sa očekivanjem nula i matricu kovarijance $\mathbf{C}_n$.*

Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Primjer (nastavak)

- *Budući da je ARMA proces stacionaran, matrica kovarijance* $\mathbf{C}_n = [c_{ij}]$ *zadovoljava*

$$c_{ij} = Cov(z_i, z_j) = \gamma(i-j) = \gamma(|i-j|),$$

gdje funkcija kovarijance $\gamma(k)$ *ovisi o parametrima modela* $\phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q$.

- *Takva matrica ima specijalnu strukturu – konstantne dijagonale, i zove se* ***Toeplitzova matrica***.
- *Za razne statističke analize, često je potrebno izračunati izraz*

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{y},$$

za neke vektore $\mathbf{x}$ *i* $\mathbf{y}$.

Primjer (nastavak)

- *Za slučaj kada je* $p = 0$*, pri čemu se onda radi o MA (moving avarage) procesu, tada je matrica kovarijance vrpčasta i* $\gamma(k) = 0$ *za* $k > q$*.*
- *Za rješavanje sustava sa takvom matricom može se npr. koristiti faktorizacija Choleskog za vrpčaste matrice, koja zahtijeva samo* $O(n(q+1))$ *operacija, što je obično puno manje od broja operacija za nestrukturirane pozitivno definitne matrice* $O(n^3)$*.*
- *Za spremanje matrice potrebno je zapamtiti samo* $q + 1$ *vrijednosti — velika ušteda.*

- Dakle, iz primjera vidimo da se u primjeni mogu pojaviti strukturirane matrice (sa puno nula) ili matrice velikih dimenzija.
- Za takve matrice Gaussove eliminacije ili faktorizacija Choleskog nisu najpogodnije metode.
- Problemi koji se javljaju kod rješavanja linearnih sustava Gaussovim eliminacijama su:
  - Elemente matrice sustava velikih dimenzija je problematično spremiti u memoriju, zbog ograničenosti radne memorije.
  - Vrijeme izvršavanja Gaussovih eliminacija nad matricama velikih dimenzija je neprihvatljivo dugo.
  - Za strukturirane matrice nepotrebno je spremati elemente koji su jednaki nula, pa se matrica sprema u posebnom formatu — problem je što Gaussove eliminacije mogu upropastiti tu specijalnu strukturu, i rezultat se ne može spremiti u istom formatu.

Iterativne metode

- Sustavi linearnih jednadžbi pojavljuje se kao posljedica rješavanja mnogih problema u financijama, fizici, kemiji, biologiji, strojarstvu, građevini ...
- **Problem:** Za regularnu matricu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i vektor $b \in \mathbb{R}^n$ naći $x \in \mathbb{R}^n$ takav da je

$$Ax = b.$$

- **Rješenje:** $x = A^{-1}b$
- Budući da su sustavi linearnih jednadžbi često rezultat aproksimacije početnog matematičkog modela jednostavnijim modelom, ne moramo nužno težiti pronalaženju egzaktnog rješenja.
- Umjesto toga želimo naći **dovoljno dobru** aproksimaciju $\tilde{x}$.
- U tim se slučajevima koriste iterativne metode.
- Željena točnost aproksimativnog rješenja postiže se zadavanjem odgovarajućeg kriterija zaustavljanja.

Algoritam (Iterativna metoda)

x_0 *zadan;*
$k = 0;$
while $\sim$*kriterij_zaustavljanja*
  $k = k + 1;$
  $x_k = f(x_{k-1});$
end
$x \approx x_k;$

Važno je da:

- za svaki k formula $f(x_{k-1})$ za računanje x_k je jednostavna
- x_k teži prema $x = A^{-1}b$ i za neki k (obično $k \ll n$) je x_k prihvatljiva aproksimacija za x
- konvergencija x_k prema x je što brža

Matrične norme

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

- Kod nekih iterativnih metoda za rješavanje sustava linearnih jednadžbi računanje kriterija zaustavljanja zahtijeva računanje matrične norme.
- S druge strane, matrične norme koriste se za mjerenja greški budući da se kod numeričkog rješavanja one uvijek pojavljuju zbog korištenja aritmetike konačne preciznosti.

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Definicija

Preslikavanje $\nu : \mathbb{C}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ je matrična norma na $\mathbb{C}^{m\times n}$ ako zadovoljava sljedeće uvjete:

1. $\nu(A) \geq 0$, *za svako* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$
2. $\nu(A) = 0$ *ako i samo ako je* $A = 0$
3. $\nu(\alpha A) = |\alpha|\nu(A)$, *za* $\alpha \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$
4. $\nu(A + B) \leq \nu(A) + \nu(B)$, *za sve* $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$

Nazivi uvjeta:

1.–2. $\rightarrow$ *pozitivna definitnost,*

3. $\rightarrow$ *homogenost,*

4. $\rightarrow$ *nejednakost trokuta.*

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Definicija

Neka su μ, ν i ρ matrične norme na $\mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbb{C}^{n\times k}$ i $\mathbb{C}^{m\times k}$ redom. One su konzistentne ako je

$$\rho(AB) \leq \mu(A)\nu(B),$$

za svaki izbor $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i $B \in \mathbb{C}^{n\times k}$.
Specijalno, matrična norma ν na $\mathbb{C}^{n\times n}$ je konzistentna ako je

$$\nu(AB) \leq \nu(A)\nu(B),$$

za sve $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Napomena

- *Gornja definicija obuhvaća i konzistentnost matrične i vektorske norme, jer prirodno identificiramo* $\mathbb{C}^{n\times 1}$ *i* $\mathbb{C}^n$.
- *Ako je* ν *konzistentna matrična norma na* $\mathbb{C}^{n\times n}$ *i* A_1, $A_2, \ldots, A_m \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *proizvoljne matrice, indukcijom se odmah vidi da je*

$$\nu(A_1 A_2 \cdots A_m) \leq \nu(A_1)\nu(A_2)\cdots\nu(A_m).$$

Specijalno, za svako $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *i* $m \in \mathbb{N}$ *je*

$$\nu(A^m) \leq \nu(A)^m.$$

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

- Standardna Euklidska vektorska norma ima jedno povoljno svojstvo, a to je:

$$\|Ux\|_2 = \|x\|_2, \quad x \in \mathbb{C}^n,\ U \in \mathbb{C}^{n\times n}\ U^*U = UU^* = I,$$

- Budući da je U unitarna matrica ovo svojstvo zove se **unitarna invarijantnost** vektorske norme, pri čemu djelovanje matrice U čuva udaljenosti.
- Takvo svojstvo može se definirati i za matrične norme.

Definicija

Norma ν na $\mathbb{C}^{m\times n}$ je unitarno invarijantna ako je:

$$\nu(U^*AV) = \nu(A),$$

za sve unitarne matrice $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i sve $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Teorem

Ako je ν konzistentna matrična norma na $\mathbb{C}^{n\times n}$, onda postoji vektorska norma $\|\ \|$ na $\mathbb{C}^n$ koja je konzistentna sa ν.

Dokaz.

- Za svaki izbor matrica $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ znamo da vrijedi $\nu(AB) \leq \nu(A)\nu(B)$.
- Tražimo normu $\|\ \| : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ takvu da je

$$\|Ax\| \leq \nu(A)\|x\|, \quad \text{za } \forall x = [x_i] \in \mathbb{C}^n.$$

- Neka je $a = [a_i] \in \mathbb{C}^n$, $a \neq 0$, tada je

$$xa^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 a_1 & \cdots & x_1 a_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n a_1 & \cdots & x_n a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Dokaz (nastavak).

Definirajmo sada

$$\|x\| = \nu(xa^T), \qquad \text{za } \forall x \in \mathbb{C}^n,$$

i provjerimo uvjete iz definicije norme.

1. $\|x\| = \nu(xa^T) \geq 0$ za $\forall x \in \mathbb{C}^n$ zbog pozitivne definitnosti matrične norme ν.
2.
   - $\|x\| = 0 \iff \nu(xa^T) = 0 \iff xa^T = 0$ zbog pozitivne definitnosti matrične norme ν.
   - Slijedi $x_i a_j = 0$ za $i, j = 1, \ldots, n$.
   - Jer je $a \neq 0$, postoji $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $a_{j_0} \neq 0$ pa je $x_i a_{j_0} = 0$ za $i = 1, \ldots, n$.
   - $\iff x = 0$.

$\square$

Dokaz (nastavak).

3. $\|\alpha x\| = \nu((\alpha x)a^T) = \nu(\alpha(xa^T)) = |\alpha|\nu(xa^T) = |\alpha|\|x\|$, za $\forall\alpha \in \mathbb{C}$ i $\forall x \in \mathbb{C}^n$ zbog homogenosti matrične norme ν.
4. $\|x + y\| = \nu((x + y)a^T) = \nu(xa^T + ya^T) \le \nu(xa^T) + \nu(ya^T) = \|x\| + \|y\|$ za $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ zbog nejednakosti trokuta matrične norme ν.

Dakle, $\|\ \|$ je vektorska norma.

- $\|Ax\| = \nu((Ax)a^T) = \nu(A(xa^T)) \le \nu(A)\nu(xa^T) = \nu(A)\|x\|$ zbog konzistentnosti matrične norme ν.

Konačno možemo zaključiti da je vektorska norma $\|\ \|$ konzistentna sa matričnom normom ν. $\square$

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Definicija

Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tada je sa

$$spr(A) = \rho(A) = \max\{|\lambda| \;:\; \lambda \in \sigma(A)\}$$

definiran spektralni radijus matrice A.

Teorem

Neka je ν konzistentna matrična norma na $\mathbb{C}^{n\times n}$. Tada za svaku matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ vrijedi

$$\rho(A) \leq \nu(A).$$

Dokaz.

- ν je konzistentna matrična norma pa postoji vektorska norma $\|\;\|$ na $\mathbb{C}^n$ koja je konzistentna sa ν.

Sustavi linearnih jednadžbi

Nela Bosner

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Dokaz (nastavak).

- Neka je $\lambda \in \sigma(A)$, tada postoji $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ takav da je $Ax = \lambda x$.
- Znamo da vrijedi sljedeće:
$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \\ \|Ax\| &\leq \nu(A) \|x\| \end{aligned}$$
- Dakle, imamo
$$|\lambda| \|x\| \leq \nu(A) \|x\|,$$
a kako je $x \neq 0$ slijedi da gornju nejednadžbu možemo podijeliti s $\|x\| > 0$, čime dobivamo
$$|\lambda| \leq \nu(A).$$
- Budući da prethodna nejednakost vrijedi za $\forall \lambda \in \sigma(A)$, vrijedi i za $\rho(A)$.

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Teorem

Za svaku matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konzistentna matrična norma $\nu_{A,\varepsilon}$ na $\mathbb{C}^{n\times n}$ takva da je

$$\nu_{A,\varepsilon}(A) \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Teorem

Neka je $\|\ \|$ proizvoljna norma na $\mathbb{C}^n$. Preslikavanje $\nu : \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$, definirano sa

$$\nu(A) = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

*za $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, je konzistentna matrična norma na $\mathbb{C}^{n\times n}$, konzistentna je sa $\|\ \|$, i zove se **operatorska norma na $\mathbb{C}^{n\times n}$, inducirana vektorskom normom $\|\ \|$**.*

Dokaz.

- ν je dobro definirana obzirom na max.
- Lako se provjere da su svi uvjeti definicije norme zadovoljeni.
- Provjeravamo konzistentnost matrične norme.

Za $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ imamo:

$$\begin{aligned}
\nu(AB) &= \max_{x\neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \max_{x\notin\mathcal{N}(B)} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \max_{x\notin\mathcal{N}(B)} \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}\frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\
&\leq \max_{x\notin\mathcal{N}(B)} \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \max_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq \max_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \max_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\
&= \nu(A)\nu(B)
\end{aligned}$$

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \nu(A)$$

$$\|Ax\| \leq \nu(A)\|x\|$$

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Napomena

Nužan uvijet da bi ν bila operatorska norma je

$$\nu(I) = \max_{\|x\|=1} \|Ix\| = \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1,$$

pri čemu je I identiteta.

Primjeri matričnih normi

Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Sljedeća preslikavanja definiraju konzistentne matrične norme na $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Primjer

$\| \ \|_F : \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{tr(A^*A)},$$

zove se ***Frobeniusova*** *ili* ***Euklidska norma****. (Na $\mathbb{C}^{n\times 1} \cong \mathbb{C}^n$ je $\| \ \|_F = \| \ \|_2$.)*

Primjer (nastavak)

- *Frobeniusova norma nije operatorska norma za $n > 1$ jer je*
$$\|I\|_F = \sqrt{n}.$$
- *Frobeniusova matrična norma $\| \ \|_F$ i euklidska vektorska norma $\| \ \|_2$ su konzistentne jer je za $x \in \mathbb{C}^n$*
$$\|Ax\|_F \leq \|A\|_F \|x\|_F = \|A\|_F \|x\|_2.$$
- *Frobeniusova norma $\| \ \|_F$ je unitarno invarijantna.*

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Primjer

$\| \ \|_2 : \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)},$$

zove se **spektralna norma**.

- *Spektralna matrična norma* $\| \ \|_2$ *je operatorska norma na* $\mathbb{C}^{n\times n}$ *inducirana vektorskom normom* $\| \ \|_2$

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

- *Maksimum se postiže u vektoru* $y^{(2)}$ *za kojeg vrijedi*

$$A^*Ay^{(2)} = \lambda_{max}(A^*A)y^{(2)}, \quad \|y^{(2)}\|_2 = 1,$$

Primjer (nastavak)

tj. $y^{(2)}$ je jednak jediničnom svojstvenom vektoru matrice A^*A koji odgovara najvećoj svojstvenoj vrijednosti $\lambda_{max}(A^*A)$, i tada je

$$\|Ay^{(2)}\|_2 = \|A\|_2.$$

- *Vrijedi konzistentnost s vektorskom normom, za $x \in \mathbb{C}^n$*

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2$$

- *Spektralna norma $\| \ \|_2$ je unitarno invarijantna.*

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Primjer

$\| \ \|_1 : \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

- *Matrična norma $\| \ \|_1$ je operatorska norma na $\mathbb{C}^{n\times n}$ inducirana vektorskom normom $\| \ \|_1$*

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$$

- *Maksimum se postiže u vektoru*

$$y^{(1)} = e_{j_0} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \\ \qquad\qquad\quad j_0 \end{array}$$

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Primjer (nastavak)

pri čemu je $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}| = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \|A\|_1,$$

i tada je

$$\|Ay^{(1)}\|_1 = \|A\|_1.$$

- *Vrijedi konzistentnost s vektorskom normom, za $x \in \mathbb{C}^n$*

$$\|Ax\|_1 \le \|A\|_1 \|x\|_1$$

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Primjer

$\| \ \|_\infty : \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

- *Matrična norma $\| \ \|_\infty$ je operatorska norma na $\mathbb{C}^{n\times n}$ inducirana vektorskom normom $\| \ \|_\infty$*

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty$$

- *Maksimum se postiže u vektoru*

$$y^{(\infty)}(j) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{a_{i_0 j}}{|a_{i_0 j}|}, & a_{i_0 j} \neq 0 \\ 1, & a_{i_0 j} = 0 \end{array} \right\}, j = 1, \dots, n,$$

Primjer (nastavak)

pri čemu je $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \|A\|_\infty,$$

i tada je

$$\|Ay^{(\infty)}\|_\infty = \|A\|_\infty.$$

- *Vrijedi konzistentnost s vektorskom normom, za $x \in \mathbb{C}^n$*

$$\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|x\|_\infty$$

Sve prikazane norme mogu se definirati i na $\mathbb{C}^{m\times n}$.

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Obzirom da je $\mathbb{C}^{m\times n} \cong \mathbb{C}^{mn}$ a na $\mathbb{C}^{mn}$ sve su vektorske norme ekvivalentne, to vrijedi i za matrične norme.

Napomena

Neka su $\| \ \|_p$ i $\| \ \|_q$ matrične norme na $\mathbb{C}^{m\times n}$, tada je za svaku matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$

$$\|A\|_p \leq \alpha_{pq}\|A\|_q,$$

pri čemu se jednakost dostiže, a konstante α_{pq} tabelirane su u sljedećoj tablici.

$\| \ \|_p$ \ $\| \ \|_q$	$\| \ \|_1$	$\| \ \|_2$	$\| \ \|_\infty$	$\| \ \|_F$
$\| \ \|_1$	1	$\sqrt{m}$	m	$\sqrt{m}$
$\| \ \|_2$	$\sqrt{n}$	1	$\sqrt{m}$	1
$\| \ \|_\infty$	n	$\sqrt{n}$	1	$\sqrt{n}$
$\| \ \|_F$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{rang(A)}$	$\sqrt{m}$	1

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Zadatak

Zadane su dvije matrice $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, pri čemu je

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{1}{i+j-1}, && \textit{Hilbertova matrica} \\ b_{ij} &= diag(1,2,3,4,5), && \textit{dijagonalna matrica} \end{aligned}$$

U MATLAB-u izračunajte norme $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$, $\|\ \|_\infty$ i $\|\ \|_F$, za te matrice, i uvjerite se da vrijede sljedeće tvrdnje:

- $\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p$, *pri čemu je* $p = 1, 2, \infty, F$.
- *Za vektor $x \in \mathbb{R}^5$ slučajnih brojeva vrijedi* $\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p$, *pri čemu je* $p = 1, 2, \infty$.
- *Za gore definirane vektore $y^{(p)}$ zaista vrijedi* $\|Ay^{(p)}\|_p = \|A\|_p$, *pri čemu je* $p = 1, 2, \infty$.

Zadatak (nastavak)

UPUTE:

- *Za generiranje matrica koristite*

```
A=hilb(5)
B=diag([1:5])
```

- *Za računanje matričnih i vektorskih normi koristite*

```
norm(A,1)
norm(A,2)
norm(A,inf)
norm(A,'fro')
```

- *za generiranje vektora x koristite*

```
x=rand(5,1)
```

- *za generiranje vektora $y^{(2)}$ koristite*

```
[u,d]=eig(A'*A)
y2=u(:,5)
```

Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Standardne iteracije

- Iterativnu metodu pokušavamo naći u obliku

$$x_{k+1} = Tx_k + c, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad x_0 \text{ zadan},$$

gdje je $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **matrica iteracije** i $c \in \mathbb{R}^n$.

- Jedan način odabira iterativne matrice T je taj da matricu sustava A rastavimo na

$$A = M - N, \qquad M \text{ regularna.}$$

- Tada se polazni linearni sustav transformira u

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b, \quad \text{tj.} \quad x = Tx + c$$

gdje je

$$T = M^{-1}N, \qquad c = M^{-1}b$$

- Rješenje sustava je onda fiksna točka iteracija

$$x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Konvergencija standardnih iteracija

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Teorem

Neka je $b \in \mathbb{R}^n$ i $A = M - N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna matrica. Ako je

- *M regularna matrica,*

tada niz iteracija $\{x_k, k \geq 0\}$ definiran sa

$$x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

konvergira prema $x = A^{-1}b$ za proizvoljnu početnu iteraciju x_0, ***ako i samo ako***

- *$\rho(M^{-1}N) < 1$ (spektralni radijus).*

Tvrdnja teorema vrijedi i ***ako*** *je $\|M^{-1}N\| < 1$ za bilo koju konzistentnu matričnu normu $\|\ \|$.*

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Dokaz.

- Definirajmo grešku u svakom koraku kao

$$e_k = x_k - x, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Tada za $x = A^{-1}b$ vrijedi

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= M^{-1}Nx_k + M^{-1}b \\ x &= M^{-1}Nx + M^{-1}b \\ x_{k+1} - x &= M^{-1}N(x_k - x) \\ e_{k+1} &= M^{-1}Ne_k = (M^{-1}N)^2 e_{k-1} = \cdots \\ &= (M^{-1}N)^{k+1} e_0. \end{aligned}$$

$\square$

Dokaz (nastavak).

- Prema jednom od prethodnih teorema o matričnim normama, za $0 < \varepsilon < 1 - \rho(M^{-1}N)$ postoji konzistentna matrična norma $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^{n\times n}$ takva da vrijedi:

$$\|M^{-1}N\| \leq \rho(M^{-1}N) + \varepsilon < 1,$$

odakle je

$$\|e_{k+1}\| \leq \|M^{-1}N\|^{k+1}\|e_0\| \longrightarrow 0, \text{ kad } k \to \infty.$$

- Znaći:

$$\lim_{k\to\infty} e_k = 0$$
$$\lim_{k\to\infty} x_k = x.$$

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Teorem

- *Neka vrijede pretpostavke za $T = M^{-1}N$ kao u prethodnom teoremu uz $\|T\| < 1$, gdje je $\|\cdot\|$ neka od normi $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ili $\|\cdot\|_\infty$.*
- *Pretpostavimo da tražimo aproksimaciju rješenja takvu da vrijedi*

$$\|x_k - x\| < \varepsilon,$$

gdje je $\|\ \|$ odgovarajuća vektorska norma koja inducira gornju operatorsku normu.

Za kriterij zaustavljanja dovoljno je tražiti da je

$$\frac{\|T\|^k}{1-\|T\|}\|x_1 - x_0\| < \varepsilon, \qquad tj, \qquad k > \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-\|T\|)}{\|x_1-x_0\|}\right)}{\ln(\|T\|)}.$$

Dokaz.

- Za $k, p \in \mathbb{N}_0$ promatrimo sljedeće:

$$
\begin{aligned}
&\|x_{k+p} - x_k\| = \\
=&\|x_{k+p} - x_{k+p-1} + x_{k+p-1} - x_{k+p-2} + \cdots + x_{k+1} - x_k\| \\
\leq&\|x_{k+p} - x_{k+p-1}\| + \|x_{k+p-1} - x_{k+p-2}\| + \cdots + \\
&+ \|x_{k+1} - x_k\| \\
=&\|T^{p-1}(x_{k+1} - x_k)\| + \|T^{p-2}(x_{k+1} - x_k)\| + \cdots + \\
&+ \|(x_{k+1} - x_k)\| \\
\leq&\left(\|T\|^{p-1} + \|T\|^{p-2} + \cdots + 1\right)\|x_{k+1} - x_k\| \\
\leq&\left(\|T\|^{p-1} + \|T\|^{p-2} + \cdots + 1\right)\|T\|^k\|x_1 - x_0\| \\
\leq&\frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|}\|x_1 - x_0\|.
\end{aligned}
$$

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Dokaz (nastavak).

- Kad pustimo da $p \to \infty$ dobivamo

$$\|x - x_k\| \le \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|}\|x_1 - x_0\|,$$

pa je dovoljno tražiti da je

$$\frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|}\|x_1 - x_0\| < \varepsilon,$$

odnosno

$$k > \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-\|T\|)}{\|x_1 - x_0\|}\right)}{\ln(\|T\|)}.$$

$\square$

Primjer

Zadan je sustav, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -9.7 \\ -14.8 \\ -0.2 \\ 5.2 \\ 9.7 \end{bmatrix}.$$

Trebamo odrediti rastav matrice A kao $A = M - N$ i odgovarajućom iterativnom metodom riješite sustav, tako da greška u svakoj nepoznanici bude manja od 10^{-3}.

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Primjer (nastavak)

- *Rastavimo matricu $A = M - N$ na sljedeći način:*

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.1 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Lako se može provjeriti da je*

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Primjer (nastavak)

i za $T = M^{-1}N$, $c = M^{-1}b$ vrijedi

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.02 & -0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 \\ -0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.02 \\ 0 & -0.02 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -1.94 \\ -1.02 \\ -0.04 \\ 1.04 \\ 1.98 \end{bmatrix}.$$

- *Za iteracije*

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

najprije trebamo provjeriti da li konvergiraju:

$$\rho(T) \leq \|T\|_\infty = 0.04 < 1,$$

Primjer (nastavak)

- *Dakle iteracije će prema prethodnim teoremima konvergirati.*
- *Sada još trebamo pronaći broj iteracija koji je potreban za postizanje aproksimacije rješenja, čija greška ima* $\|\cdot\|_\infty$ *normu manju od* $\varepsilon = 10^{-3}$.
- *Uzet ćemo da je* $x^{(0)} = 0$ *i onda je* $x^{(1)} = c$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\|T\|_\infty^k}{1-\|T\|_\infty}\|c\|_\infty &< 10^{-3} \\
\frac{0.04^k}{0.96}\cdot 1.98 &< 10^{-3} \\
0.04^k &< 4.85\cdot 10^{-4} \\
-3.2189k &< -7.6317 \\
k &> 2.3709,
\end{aligned}
$$

Primjer (nastavak)

- *Mora biti*

$$k = 3$$

- *Kada se izračunaju iteracije dobivamo:*

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x^{(1)} = \begin{bmatrix} -1.94 \\ -1.02 \\ -0.04 \\ 1.04 \\ 1.98 \end{bmatrix}, \; x^{(2)} = \begin{bmatrix} -2.0004 \\ -0.9992 \\ -0.0012 \\ 1.0004 \\ 2.0004 \end{bmatrix}, \; x^{(3)} = \begin{bmatrix} -2.000016 \\ -0.999992 \\ 0.000008 \\ 0.999992 \\ 1.999984 \end{bmatrix},$$

a egzaktno rješenje je

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Jacobijeva metoda

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rastavimo kao

$$A = L + D + R,$$

tako da su

$$\begin{array}{rcl} L & = & \text{donji trokut od } A \\ D & = & \text{dijagonala od } A \\ R & = & \text{gornji trokut od } A \end{array}$$

uz pretpostavku da A nema nula na dijagonali.

- Kod Jacobijeve metode je
$$M_J = D, \qquad N_J = -(L + R),$$
- ona je iterativna metoda oblika
$$x_{k+1} = T_J x_k + c_J, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
- za koju je
$$T_J = -D^{-1}(L + R), \qquad c_J = D^{-1}b.$$

Pogledamo li po komponentama računanje aproksimacije u $(k+1)$-oj iteraciji dobivamo

$$
\begin{aligned}
x_{k+1}(i) &= \sum_{j=1}^{n} T_J(i,j)\cdot x_k(j) + c_J(i)\\
&= -\sum_{j=1}^{i-1}\frac{A(i,j)}{A(i,i)}\cdot x_k(j) - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{A(i,j)}{A(i,i)}\cdot x_k(j) + \frac{b(i)}{A(i,i)}\\
&= \frac{1}{A(i,i)}\left[b(i) - \sum_{j=1}^{i-1}A(i,j)\cdot x_k(j) - \sum_{j=i+1}^{n}A(i,j)\cdot x_k(j)\right]
\end{aligned}
$$

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Algoritam (Jacobijeva metoda)

```
x0 zadan;
k = 0;
while ~kriterij_zaustavljanja
    k = k + 1;
    for i = 1 : n
        x1(i) = b(i);
        for j = 1 : i − 1
            x1(i) = x1(i) − A(i, j) ∗ x0(j);
        end
        for j = i + 1 : n
            x1(i) = x1(i) − A(i, j) ∗ x0(j);
        end
        x1(i) = x1(i)/A(i, i);
    end
    x0 = x1;
end
x ≈ x0;
```

Konvergencija Jacobijeve metode

Teorem

Ako je matrica sustava $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ strogo dijagonalno dominantna matrica, tj. ako vrijedi

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

tada Jacobijeva metoda konvergira za svaku početnu iteraciju.

Dokaz:

Vrijedi

$$\|T_J\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |(T_J)_{ij}| = \max_{i=1,\ldots,n} \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < 1,$$

pa jednom od prethodnih teorema, Jacobijeve iteracije konvergiraju za svaku početnu iteraciju. $\square$

Gauss–Seidelova metoda

Matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rastavimo isto kao kod Jacobijeve metode

$$A = L + D + R.$$

- Kod Gauss–Seidelova metode je

$$M_{GS} = D + L, \qquad N_{GS} = -R,$$

- ona je iterativna metoda oblika

$$x_{k+1} = T_{GS} x_k + c_{GS}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- za koju je

$$T_{GS} = -(D + L)^{-1} R, \qquad c_{GS} = (D + L)^{-1} b.$$

Najprije iteraciju napišemo u obliku

$$(D+L)x_{k+1} = -Rx_k + b.$$

Sada pogledamo komponente prethodnog računanja aproksimacije u $(k+1)$-oj iteraciji, i dobivamo

$$\sum_{j=1}^{i} A(i,j)\cdot x_{k+1}(j) = -\sum_{j=i+1}^{n} A(i,j)\cdot x_k(j) + b(i)$$

$$A(i,i)x_{k+1}(i) = -\sum_{j=1}^{i-1} A(i,j)x_{k+1}(j) - \sum_{j=i+1}^{n} A(i,j)x_k(j) + b(i)$$

Ako pretpostavimo da su u prethodnim koracima izračunate komponente $j = 1, \ldots, i-1$ od x_{k+1}, tada

$$x_{k+1}(i) = \frac{1}{A(i,i)}\left[b(i) - \sum_{j=1}^{i-1} A(i,j)\cdot x_{k+1}(j) - \sum_{j=i+1}^{n} A(i,j)\cdot x_k(j)\right]$$

Algoritam (Gauss–Seidelova metoda)

*x*0 *zadan;*
$k = 0$;
while ~*kriterij_zaustavljanja*
    $k = k + 1$;
    for $i = 1 : n$
        $x0(i) = b(i)$;
        for $j = 1 : i - 1$
            $x0(i) = x0(i) - A(i, j) * x0(j)$;
        end
        for $j = i + 1 : n$
            $x0(i) = x0(i) - A(i, j) * x0(j)$;
        end
        $x0(i) = x0(i)/A(i, i)$;
    end
end
$x \approx x0$;

Konvergencija Gauss–Seidelova metode

Sustavi linearnih jednadžbi

Nela Bosner

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Teorem

Ako je matrica sustava $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ strogo dijagonalno dominantna matrica, tada Gauss–Seidelova metoda konvergira za svaku početnu iteraciju.

Teorem

Ako je matrica sustava $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična pozitivno definitna matrica, tada Gauss–Seidelova metoda konvergira za svaku početnu iteraciju.

SOR metoda

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

- U iteracije se uvodi **parametar relaksacije** ω koji nastoji smanjiti spektralni radijus matrice iteracije i ubrzati konvergenciju.
- To se radi pomoću sljedećeg rastava:

$$A = \frac{1}{\omega} D + L + \frac{\omega - 1}{\omega} D + R.$$

- Kod SOR metode je

$$M_{SOR,\omega} = \frac{1}{\omega} D + L, \qquad N_{SOR,\omega} = \frac{1 - \omega}{\omega} D - R,$$

- ona je iterativna metoda oblika

$$x_{k+1} = T_{SOR,\omega} x_k + c_{SOR,\omega}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- za koju je

$$T_{SOR,\omega} = (D + \omega L)^{-1} [(1 - \omega) D - \omega R], \qquad c_{SOR,\omega} = \omega (D + \omega L)^{-1} b.$$

- Za $\omega = 1$ SOR se svodi na Gauss–Seidelovu metodu.

Na isti način kao i kod Gauss–Seidelove metode izvodimo računanje aproksimacije u $(k+1)$-oj iteraciji po komponentama, čime dobivamo

$$x_{k+1}(i) = (1-\omega)x_k(i) + \frac{\omega}{A(i,i)}\Bigg[b(i) - \\ - \sum_{j=1}^{i-1} A(i,j)\cdot x_{k+1}(j) - \sum_{j=i+1}^{n} A(i,j)\cdot x_k(j)\Bigg]$$

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Algoritam (SOR metoda)

```
x0, omega    zadani;
k = 0;
while ~kriterij_zaustavljanja
    k = k + 1;
    for i = 1 : n
        x0(i) = (1 − omega) ∗ x0(i);
        pom = b(i);
        for j = 1 : i − 1
            pom = pom − A(i, j) ∗ x0(j);
        end
        for j = i + 1 : n
            pom = pom − A(i, j) ∗ x0(j);
        end
        x0(i) = x0(i) + pom ∗ omega/A(i, i);
    end
end
x ≈ x0;
```

Konvergencija SOR metode

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Teorem

Ako je matrica sustava $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična pozitivno definitna matrica, tada SOR metoda konvergira za $\omega \in \langle 0, 2\rangle$ i za svaku početnu iteraciju.

Teorem

SOR metoda ne konvergira za $\omega < 0$ i $\omega \geq 2$.

Zadaci

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Zadatak

U MATLAB-u napišite M-file funkciju `sor()` *koja implementira SOR metodu za rješavanje linearnih sustava jednadžbi. Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *matricu sustava A i desnu stranu sustava b*
- *početnu iteraciju x_0*
- *toleranciju tol na relativnu normu reziduala*
- *parametar ω*

Kriterij zaustavljanja je $\|b - Ax_k\|_2 / \|b\|_2 \leq tol$, a za računanje norme koristite MATLAB-ovu funkciju `norm()`.

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Zadatak (nastavak)

Funkcija neka vraća

- *aproksimaciju rješenja* x_k
- *broj iteracija* k *potrebnih za dostizanje aproksimativnog rješenja tražene točnosti*
- *vektor duljine* $k+1$ *sa relativnim normama reziduala za svaku iteraciju* $i = 0, \ldots, k$

Zadatak

Napišite M-file funkciju `sor_konvergencija()` *koja za zadanu matricu A crta graf spektralnih radijusa matrice iteracija za SOR metodu* $T_{SOR,\omega}$.

- *Matrica A je jedini ulazni parametar.*
- *Funkcija neka generira* ω *iz ekvidistantne mreže na segmentu* $[0, 2]$ *s korakom* 0.01*, i za svaki* ω *računa* $\rho(T_{SOR,\omega})$.
- *Sve vrijednosti* ω *i odgovarajuće* $\rho(T_{SOR,\omega})$ *spremite u vektore* `omega` *i* `ro`*, koji će se koristiti za crtanje grafa s* ω *na x osi i* $\rho(T_{SOR,\omega})$ *na y osi.*

Graf će služiti za određivanje optimalnog ω.

Zadatak (nastavak)

Koristite MATLAB-ove funkcije funkcije

- `diag()`, `triu()` *i* `tril()` *za generiranje matrice iteracija* $T_{SOR,\omega}$
- `max(abs(eig(T)))` *za računanje spektralnog radijusa*
- `plot()` *za crtanje grafa*
- `axis()` *za određivanje granica na x i y osima grafa*
- `xlabel()` *i* `ylabel()` *za označavanje x i y osi*

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Zadatak

Riješite sustav $Ax = b$, pri čemu su

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 8 & 12 \\ -4 & 4 & -7 & 3 \\ 8 & -7 & 78 & 32 \\ 12 & 3 & 32 & 113 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 32 \\ -4 \\ 111 \\ 160 \end{bmatrix},$$

pomoću SOR metode.

- *U ovom slučaju uzmite $tol = 10^{-8}$.*
- *Nacrtajte graf spektralnih radijusa matrice iteracija za SOR metodu.*
- *Provjerite brzinu konvergencije za Gauss–Seidelovu metodu, i za SOR sa optimalnim ω.*
- *Nacrtajte grafove relativnih normi reziduala za iteracije obiju metoda pomoću MATLAB funkcije `semilogy()`.*

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Zadatak

Vratimo se ponovo na problem s portfeljom.

- *Neka su zadani vektor očekivanih povrata vrijednosnica i matrica kovarijance*

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.03 \\ 0.05 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.02 & 0.01 \\ 0.02 & 0.15 & 0.03 \\ 0.01 & 0.03 & 0.18 \end{bmatrix}.$$

- *Izračunajte težine portfelja sa najmanjom varijancom i sa očekivanim povratom $\mu_p = 0.05$, pomoću SOR metode sa optimalnim parametrom.*
- *U ovom slučaju uzmite tol $= 10^{-8}$.*
- *Izračunajte samo $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}$ i $\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}$ spremite ih u varijable i onda ih primijenite u izrazu za računanje težina.*

Zadatak (nastavak)

- *Nacrtajte graf spektralnih radijusa matrice iteracija za SOR metodu.*
- *Provjerite brzinu konvergencije za Gauss–Seidelovu metodu i za SOR sa optimalnim ω, za oba vektora desne strane sustava.*
- *Nacrtajte grafove relativnih normi reziduala za SOR metodu s optimalnim ω, za oba vektora desne strane sustava.*

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Iteracije iz Krylovljevih potprostora

Rezultat iz linearne algebre: svaka matrica poništava svoj karakteristični i minimalni polinom.

$$\kappa_A(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{n-1} A^{n-1} + a_n A^n = 0,$$

gdje je

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \kappa_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i.$$

- Kada je matrica regularna $\Rightarrow a_0 \neq 0$,

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_1 I + \cdots + a_{n-1} A^{n-2} + a_n A^{n-1}).$$

- Rješenje sustava $Ax = b$ možemo zapisati kao $x = A^{-1} b$,

$$x = -\frac{a_1}{a_0} b - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_0} A^{n-2} b - \frac{a_n}{a_0} A^{n-1} b,$$

- odnosno
$$x \in \operatorname{span}\{b, Ab, \ldots, A^{n-1}b\} = \mathcal{K}_n(A, b).$$
- Prostor $\mathcal{K}_n(A, b)$ zovemo **Krylovljevim prostorom** matrice A i inicijalnog vektora b.
- Ideja za iterativne metode rješavanja sustava linearnih jednadžbi: iteracije su aproksimacije rješenja iz Krylovljevih potprostora.

Jedna ideja za dobivanje takve iterativne metode je primjena metode **najbržeg silaska** na paraboloid
$$p(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x + c,$$
gdje je A **simetrična pozitivno definitna**.

- Rješenje problema $\min_x p(x)$ je dano sa $Ax = b$.
- Smjer najbržeg silaska u točki y je dan sa
$$-\nabla p(y) = b - Ay.$$

- Iteracije tada možemo definirati kao

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k (b - Ax_k) = x_k + \alpha_k r_k$$

  gdje je $r_k = b - Ax_k$ smjer najbržeg silaska u točci x_k na paraboloidu $p(x)$, a α_k je dinamički parametar koji se određuje iz nekih optimizirajućih uvjeta.
- Najprije definirajmo osnovne pojmove:

$$\begin{aligned}
x = A^{-1}b \quad & = \text{egzaktno rješenje} \\
x_0 \quad & = \text{početna aproksimacija} \\
e_k = x - x_k \quad & = \text{greška}, \qquad k = 0, 1, \ldots \\
r_k = b - Ax_k = Ae_k \quad & = \text{rezidual}, \qquad k = 0, 1, \ldots
\end{aligned}$$

$$r_{k+1} = b - Ax_k - \alpha_k Ar_k = r_k - \alpha_k Ar_k$$

- Pogledajmo sada u kojim potprostorima se nalaze ovakve iteracije.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= x_0 \\
x_1 &= x_0 + \alpha_0 r_0 \quad \in x_0 + \text{span}\{r_0\} \\
x_2 &= x_1 + \alpha_1 r_1 = x_0 + \alpha_0 r_0 + \alpha_1 (r_0 - \alpha_0 A r_0) = \\
&= x_0 + (\alpha_0 + \alpha_1) r_0 - \alpha_0 \alpha_1 A r_0 \\
&\in x_0 + \text{span}\{r_0, A r_0\} \\
&\vdots \\
x_k &= x_{k-1} + \alpha_{k-1} r_{k-1} \quad \in x_0 + \text{span}\{r_0, A r_0, \ldots, A^{k-1} r_0\}.
\end{aligned}
$$

- Dakle, općenito za $x_k = x_{k-1} + \alpha_{k-1} r_{k-1}$ vrijedi

$$x_k \in x_0 + \mathcal{K}_k(A, r_0), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

- Na koji način ćemo birati parametar α_k?

Metoda konjugiranih gradijenata

Sustavi linearnih jednadžbi
Nela Bosner
Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

- To je iterativna metode iz Krylovljevih potprostora, za rješavanje sustava $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b, x \in \mathbb{R}^n$, pri čemu je matrica sustava A *simetrična pozitivno definitna*:
  - $A^T = A$
  - $y^T A y > 0$ za svaki $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$
- Ideja odabira parametra α_k u k-toj iteraciji metode je ta da se minimizira neka norma greške $e_{k+1} = e_k - \alpha_k r_k$.
- Problem je što nam je greška jednako tako nepoznata kao i samo rješenje, pa norma $\|\cdot\|_2$ ne dolazi u obzir.
- Ono što možemo izračunati je rezidual.

  $r_{k+1} = Ae_{k+1} = r_k - \alpha_k A r_k$.
- Zato za simetričnu pozitivno definitnu matricu A ima smisla definirati *A-normu* $\|\cdot\|_A$

$$\|v\|_A = \sqrt{\langle v, v \rangle_A} = \sqrt{v^T A v}.$$

- Uvjerite se da je $\|\cdot\|_A$ zaista norma na $\mathbb{R}^n$.

- Definirajmo sada funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ kao

$$\begin{aligned} f(\alpha_k) =& e_{k+1}^T A e_{k+1} = \\ =& \alpha_k^2 r_k^T A r_k - 2\alpha_k r_k^T A e_k + e_k^T A e_k = \\ =& \alpha_k^2 r_k^T A r_k - 2\alpha_k r_k^T r_k + e_k^T A e_k. \end{aligned}$$

- Traženje minimuma funkcije $f(\alpha_k)$ je ekvivalentno traženju minimuma $\|e_{k+1}\|_A$.
- Funkcija $f(\alpha_k)$ je kvadratna funkcija po varijabli α_k, i parametar uz α_k^2 je $r_k^T A r_k \geq 0$, što znači da funkcija poprima minimum u tjemenu, koje je jedina nultočka derivacije funkcije f'.

$$0 = f'(\alpha_k) = 2\alpha_k r_k^T A r_k - 2 r_k^T r_k,$$

odakle slijedi da se minimalna A-norma greške e_{k+1} postiže za

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{r_k^T A r_k}.$$

- Zbog ovakvog odabira parametra α_k vrijedi da je r_{k+1} okomit na r_k, tj.

$$r_k^T r_{k+1} = r_k^T r_k - \alpha_k r_k^T A r_k = r_k^T r_k - \frac{r_k^T r_k}{r_k^T A r_k} r_k^T A r_k = 0.$$

- Važno je još primijetiti, da tako dugo dok nismo našli egzaktno rješenje ($r_k \neq 0$), α_k je strogo veći od nule.
- Zbog okomitosti r_{k+1} i r_k slijedi

$$\|e_k\|_A^2 = \|e_{k+1}\|_A^2 + \alpha_k^2 \|r_k\|_A^2 > \|e_{k+1}\|_A^2,$$

odakle se vidi da se A-norma greške smanjuje u svakom koraku.
- Ova metoda, zbog načina odabira parametra, zove se **metoda najbržeg silaska**.

Algoritam (Metoda najbržeg silaska)

x_0 *zadan;*
$r_0 = b - Ax_0;$
$k = 0;$
while *~kriterij_zaustavljanja*

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{r_k^T A r_k};$$
$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k;$$
$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A r_k;$$
$$k = k + 1;$$

end

Zadatak

Napišite funkciju `najbrzi_silazak()` *koja implementira metodu najbržeg silaska. Ulazni parametri neka su*

- *matrica A i vektor b*
- *početna iteracija x_0*
- *tolerancija tol*

a izlazni parametri neka su

- *aproksimacija rješenja x*
- *broj iteracija k potrebnih za dostizanje tražene točnosti*
- *vektor duljine $k+1$ sa relativnim normama reziduala za svaku iteraciju $i = 0, \ldots, k$*

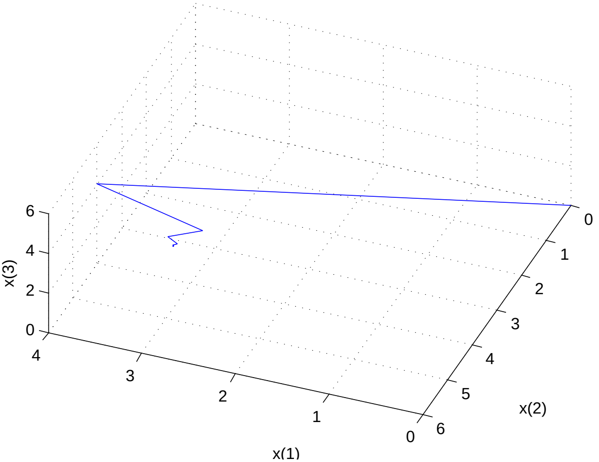
Kriterij zaustavljanja je $\|r_k\|_2 / \|b\|_2 \leq tol$, gdje je $r_k = b - Ax_k$.

Zadatak (nastavak)

- *Svoju funkciju primijenite na matricu* **C** *i vektor* **e** *iz zadatka o portfelju.*
- *Koliki je broj iteracija potreban za tol* $= 10^{-8}$ *i* $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$*?*

Međutim, ova metoda može dosta sporo konvergirati, jer se često događa da ona radi korake u smjeru kojim je neki raniji korak već prošao.

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci



Slika: Iteracije metode najbrzeg silaska za **C** i **e**.

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

- Da bi se izbjegla spora konvergencija, unaprijed odabiremo skup A-ortogonalnih vektora, odnosno smjerove traganja $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$.
- Dva vektora d_i i d_j su A-ortogonalna ili *konjugirana* ako vrijedi da je

$$\langle d_i, d_j \rangle_A = d_j^T A d_i = 0.$$

- Lagano se može provjeriti da su A-ortogonalni vektori linearno nezavisni.
- Znači u svakom koraku biramo točku

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

s minimalnom A-normom greške.
- Dakle, u svakom smjeru d_k napravit ćemo točno jedan korak, takav da ćemo poništiti komponentu vektora greške e_k u smjeru Ad_k.
- Nakon n koraka bit ćemo gotovi.

- U $(k+1)$-om korak e_{k+1} je jednak početnoj grešci kojoj su odstranjene sve komponente u smjerovima $Ad_0, \ldots, Ad_k$, odnosno
- e_{k+1} je A-ortogonalan na $d_0, \ldots, d_k$.
- A-ortogonalnost između e_{k+1} i d_k je ekvivalentna nalaženju točke minimuma duž smjera traganja d_k, kao i u metodi najbržeg silaska.
- Ponovo ćemo derivirati po α_k funkciju

$$g(\alpha_k) = e_{k+1}^T A e_{k+1}$$

i izjednačiti je s nulom, samo što je u tom slučaju r_{k+1} okomit na d_k.

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

- Ako opet uvrstimo da je $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A d_k$ i $e_{k+1} = e_k - \alpha_k d_k$

$$g(\alpha_k) = \alpha_k^2 d_k^T A d_k - 2\alpha_k d_k^T A e_k + e_k^T A e_k,$$

slijedi da je

$$g'(\alpha_k) = 2\alpha_k d_k^T A d_k - 2 d_k^T r_k$$

odakle ćemo dobit izraz za α_k

$$\alpha_k = \frac{d_k^T r_k}{d_k^T A d_k}.$$

- Ovako dobivena metoda naziva se **metoda konjugiranih smjerova.**

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Algoritam (Metoda konjugiranih smjerova)

x_0 *zadan;*
A-ortogonalni vektori $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$ *zadani;*
$r_0 = b - Ax_0;$
$k = 0;$
while $\sim$*kriterij_zaustavljanja*

$$\alpha_k = \frac{d_k^T r_k}{d_k^T A d_k};$$
$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k;$$
$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A d_k;$$
$$k = k + 1;$$

end

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Teorem

Za metodu konjugiranih smjerova vrijede sljedeća svojstva:

$$d_j^T A d_i = 0 \quad (i \neq j)$$

$$d_j^T r_i = d_j^T A e_i = 0 \quad (j < i)$$

$$d_i^T r_0 = d_i^T r_1 = \cdots = d_i^T r_i.$$

Skalar α_i može se zato napisati kao

$$\alpha_k = \frac{d_k^T r_0}{d_k^T A d_k}.$$

Teorem

Metoda konjugiranih smjerova je m-koračna metoda ($m \leq n$), u smislu da je u m-tom koraku aproksimacija x_m jednaka rješenju $x = A^{-1} b$.

- Preostaje nam još pronaći odgovarajuće vektore $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$.
- Skup A-ortogonalnih smjerova $\{d_i\}$ možemo dobiti primjenom Gramm–Schmidtove metode A-ortogonalizacije na niz linearno nezavisnih vektora $u_0,\ldots,u_{n-1}$ sa skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$.
- Dakle, A-ortogonalne vektore možemo dobiti kao

$$d_k = u_k + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{ki} d_i,$$

pri čemu su koeficijenti oblika

$$\beta_{ki} = -\frac{d_i^T A u_k}{d_i^T A d_i}.$$

- Konkretan odabir vektora $u_0,\ldots,u_{n-1}$ vodi nas do **metode konjugiranih gradijenata (CG).**

- Metoda konjugiranih gradijenata (CG) je, zapravo, metoda konjugiranih smjerova za $u_i = r_i$.
- Činjenica da su vektori r_i dobiveni metodom konjugiranih smjerova linearno nezavisni, može se provjeriti uz pomoć prethodnih teorema.
- Ponovo vrijedi

$$\mathrm{span}\{d_0, d_1, \ldots, d_{k-1}\} = \mathrm{span}\{r_0, r_1, \ldots, r_{k-1}\},$$

i budući da je r_k ortogonalan na prethodne smjerove traganja vrijedi

$$r_i^T r_j = 0, \qquad i \neq j.$$

- Promatramo sljedeći skalarni produkt

$$r_k^T r_{i+1} = r_k^T r_i - \alpha_i r_k^T A d_i,$$

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

- odakle vrijedi

$$d_i^T A r_k = \frac{1}{\alpha_i}(r_k^T r_i - r_k^T r_{i+1}).$$

Za $i < k - 1$ lijeva strana ove jednakosti je jednaka 0, pa su $\beta_{ki} = 0$ za $i = 0, 1, \ldots, k-2$, a za $\beta_k = \beta_{k,k-1}$ zbog izraza za α_{k-1} i prethodnih teorem vrijedi

$$\beta_k = -\frac{d_{k-1}^T A r_k}{d_{k-1}^T A d_{k-1}} = \frac{r_k^T r_k}{\alpha_{k-1} d_{k-1}^T A d_{k-1}}$$
$$= \frac{r_k^T r_k}{d_{k-1}^T r_{k-1}} = \frac{r_k^T r_k}{r_{k-1}^T r_{k-1}}$$

- Također, zbog istih teorema možemo i α_k napisati u ljepšem obliku
$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{d_k^T A d_k},$$
odakle se vidi, da ukoliko nismo našli egzaktno rješenje u k-tom koraku, α_k je pozitivan.
- Ovime smo u potpunosti definirali metodu konjugiranih gradijenata.

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Algoritam (Metoda konjugiranih gradijenata (CG))

x_0 *zadan;*
$d_0 = r_0 = b - Ax_0$;
$k = 0$;
while $\sim$*kriterij_zaustavljanja*

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{d_k^T A d_k};$$
$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k;$$
$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A d_k;$$
$$\beta_{k+1} = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k};$$
$$d_{k+1} = r_{k+1} + \beta_{k+1} d_k;$$
$$k = k + 1;$$

end

Napomena

- *Za primjenu metode konjugiranih gradijenata ne trebamo pristupati pojedinim elementima matrice.*
- *Dovoljno je znati djelovanje matrice na vektor $A \cdot y$ — često se zadaje kao funkcija od y.*

Konvergencija metode konjugiranih gradijenata

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Teorem

- *Greška e_k dobivena u k-tom koraku metode konjugiranih gradijenata ima najmanju A-normu na prostoru*

$$e_0 + span\{Ae_0, A^2e_0, \ldots, A^k e_0\}.$$

- *U svakom koraku CG algoritma, duljina vektora greške $e_k = x - x_k$ se reducira, pri čemu je $A^{-1}b = x = x_m$, za neki $m \leq n$.*

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Napomena

- *Budući da je $e_k \in e_0 + \mathrm{span}\{Ae_0, A^2e_0, \ldots, A^ke_0\}$, greška u k-tom koraku metode ima oblik*

$$e_k = e_0 + \sum_{i=1}^{k} \psi_i A^i e_0 = \left(I + \sum_{i=1}^{k} \psi_i A^i \right) e_0.$$

- *Koeficijenti ψ_i su u linearnoj vezi sa koeficijentima α_i i β_i, a metoda konjugiranih gradijenata bira ψ_j takve da oni minimiziraju $\|e_k\|_A$.*
- *Tada, izraz za grešku možemo izraziti kao*

$$e_k = p_k(A)e_0,$$

gdje je p_k polinom k-tog stupnja kod kojeg zahtijevamo da je $p_k(0) = 1$ (uvjet da je slobodni član $\psi_0 = 1$).

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Napomena (nastavak)

- *Kako je matrica A simetrična i pozitivno definitna, tada ju možemo zapisati kao produkt matrica $A = U\Lambda U^T$, pri čemu su za $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti od A i $U^T U = UU^T = I$.*
- *Onda za svaki k vrijedi*

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{k} = U\Lambda U^T U\Lambda U^T U \cdots U^T U\Lambda U^T = U\Lambda^k U^T.$$

- *Zbog toga vrijedi $p_k(A) = Up_k(\Lambda)U^T$.*
- *$A^{1/2}$ je hermitski drugi korijen od A pa vrijedi $A^{1/2} = U\Lambda^{1/2}U^T$ i $(A^{1/2})^2 = A$, tako da komutira sa A i sa $p_k(A)$.*

Napomena (nastavak)

- *Zbog toga slijedi*

$$
\begin{aligned}
\|e_k\|_A &= \min_{p_k \in \mathbb{P}_k, p_k(0)=1} \|p_k(A)e_0\|_A = \min_{p_k \in \mathbb{P}_k, p_k(0)=1} \sqrt{e_0^T p_k(A) A p_k(A) e_0} = \\
&= \min_{p_k \in \mathbb{P}_k, p_k(0)=1} \|A^{1/2} p_k(A) e_0\|_2 = \min_{p_k \in \mathbb{P}_k, p_k(0)=1} \|p_k(A) A^{1/2} e_0\|_2 \leq \\
&\leq \min_{p_k \in \mathbb{P}_k, p_k(0)=1} \|p_k(A)\|_2 \|A^{1/2} e_0\|_2 = \min_{p_k \in \mathbb{P}_k, p_k(0)=1} \|p_k(\Lambda)\|_2 \|e_0\|_A,
\end{aligned}
$$

- *Dakle, konačno možemo napisati*

$$
\|e_k\|_A \leq \min_{p_k \in \mathbb{P}_k, p_k(0)=1} \max_{i=1,\ldots,n} |p_k(\lambda_i)| \|e_0\|_A.
$$

- Za koji polinom sigurno znamo da će dati nulu u gornjoj ogradi greške?
- Za koji polinom p_k i kojeg stupnja k vrijedi da je $p_k(\lambda_i) = 0$ za $i = 1, \ldots, n$?

- Prvi takav polinom koji nam pada na pamet je karakteristični polinom $\kappa_A(x)$ koji je stupnja n,
  - zato je najveći broj iteracije kod koje ćemo sigurno doći do rješenja $x_k = x$ jednak $k = n$.
- Kada se može dogoditi da dostignemo rješenje $x_k = x$, za $k < n$?
  - Ili ekvivalentno, kada može postojati polinom p_k k-tog stupnja za $k < n$ takav da je $p_k(\lambda_i) = 0$ za $i = 1, \ldots, n$?
- Odgovor: kada je minimalni polinom $\mu_k(A)$ stupnja $k < n$.
  - A kada se to može dogoditi?
  - Kada matrica A ima višestruke svojstvene vrijednosti.
- Dakle, najveći broj iteracija koje moramo izvšiti da bismo došli do rješenja jednak je **stupnju minimalnog polinoma** matrice A.

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

- **Zaključak:**
  - Najveći broj iteracija koje moramo izvesti u egzaktnoj aritmetici da bismo došli do rješenja jednak je
  - **broju različitih svojstvenih vrijednosti matrice** A.
- Matrice za koje metoda konjugiranih gradijenata brže konvergira su
  - matrice koje imaju puno višestrukih svojstvenih vrijednosti ili
  - koje imaju nakupine vrlo bliskih svojstvenih vrijednosti jer za njih polinom niskog stupnja može davati male vrijednosti.
- Sljedeći korolar je posljedica prethodnog rezultata i on
  - je slabiji rezultat od prethodnog, i
  - ima jaču ulogu u aritmetici konačne preciznosti na računalu kad su u račun uključene i greške.

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Korolar

Primijenjiva ocjena dana je sa

$$\|e_k\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa_2(A)} - 1}{\sqrt{\kappa_2(A)} + 1} \right)^k \|e_0\|_A.$$

pri čemu je $\kappa(A)_2 = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ *broj uvjetovanosti matrice A.*

- Posljedica ovog korolara je da na računalu možemo očekivati sporiju konvergenciju od one u egzaktnoj aritmetici za loše uvjetovane matrice.

Zadaci

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Zadatak

Napišite funkciju `cg()` *koja implementira metodu konjugiranih gradijenata. Ulazni parametri neka su*

- *matrica A i vektor b*
- *početna iteracija x_0*
- *tolerancija tol*

a izlazni parametri neka su

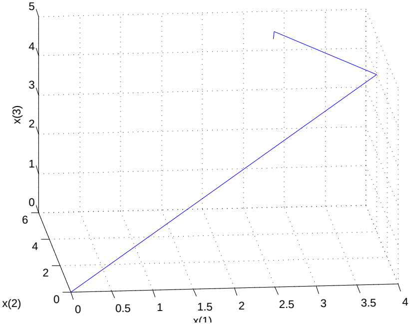
- *aproksimacija rješenja x*
- *broj iteracija k potrebnih za dostizanje tražene točnosti*
- *vektor duljine $k+1$ sa relativnim normama reziduala za svaku iteraciju $i = 0, \ldots, k$*

Kriterij zaustavljanja je $\|r_k\|_2 / \|b\|_2 \leq tol$, gdje je r_k baš onaj iz rekurzije za rezidual u metodi (ne računati $b - Ax_k$).

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Zadatak (nastavak)

- *Svoju funkciju* cg *primijenite na matricu* $\mathbf{C}$ *i vektor* $\mathbf{e}$ *iz zadatka o portfelju.*
- *Koliki je broj iteracija potreban za tol* $= 10^{-8}$ *?*



Slika: Iteracije metode konjugiranih gradijenata za $\mathbf{C}$ i $\mathbf{e}$.

Zadatak

Matrica sustava u ovom zadatku je simetrična pozitivno definitna 100×100 *matrica, sa svojstvenim vrijednostima* $\lambda(A) \in \{1, 4, 9, \ldots, 10000\}$ *(*$\kappa(A) = 10^4$*), a dobivena je*

- *kao produkt* $A = Q \Lambda Q^T$*,*
- *pri čemu je* Λ *dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti,*
- *a* Q *slučajna ortogonalna matrica.*

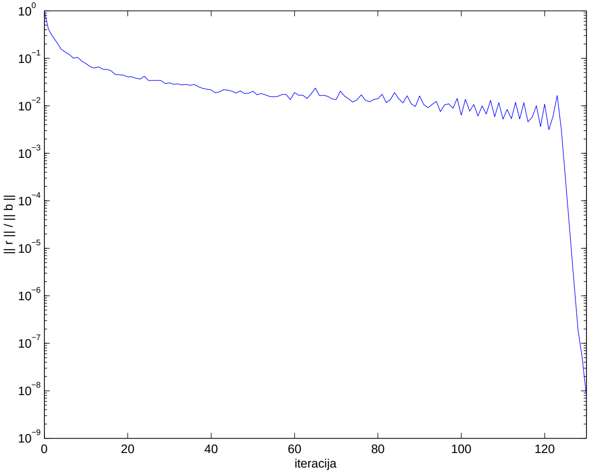
Za generiranje matrice Q *koristite MATLAB-ove funkcije* `X=rand(100)` *i* `[Q,R]=qr(X)`*.*

- *Za početnu iteraciju uzet ćemo* $x_0 = [0\ 0\ \ldots\ 0]^T$*,*
- *a za desnu stranu sustava,* b *je određen tako da rješenje sustava bude jednako* $x = [1\ 1\ \ldots\ 1]^T$*, odnosno da je* $b = A \cdot x$*.*

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Zadatak (nastavak)

Napišite M-file koji rješava ovaj sustav pomoću metode konjugiranih gradijenata, u svakom koraku k kontrolirajte relativnu normu reziduala $\|r_k\|_2/\|b\|_2$ *i na kraju nacrtajte njen graf. Iteriranje se treba zaustaviti kada je ona manja od* $tol = 10^{-8}$.



Slika: Relativne norme reziduala u svakoj iteraciji metode konjugiranih gradijenata, za matricu A iz prethodnog zadatka.

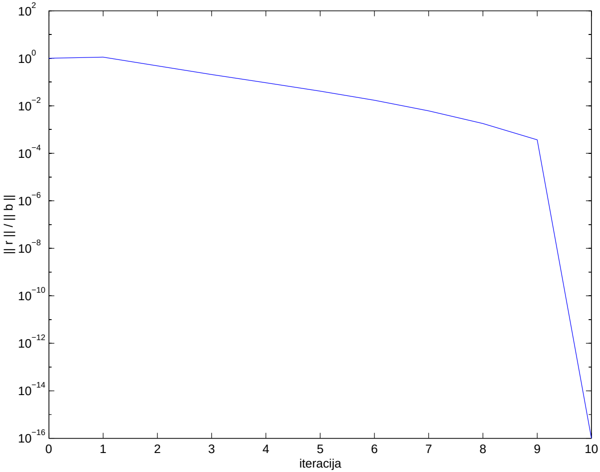
Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

Zadatak

Situacija u ovom zadatku je slična prethodnom, samo što pozitivno definitna matrica A ima deset različitih svojstvenih vrijednosti, svaka od njih kratnosti 10. Dakle,

- $A = Q\Lambda Q^T$,
- *gdje je* Λ *dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti* $\lambda(A) \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ ($\kappa(A) = 10$),
- *a* Q *slučajna ortogonalna matrica.*

b *i* x_0 *se određuju kao u prethodnom zadatku. Napišite M-file koji rješava ovaj sustav pomoću metode konjugiranih gradijenata, u svakom koraku* k *kontrolirajte relativnu normu reziduala* $\|r_k\|_2/\|b\|_2$ *i na kraju nacrtajte njen graf te ga usporedite s grafom iz prethodnog zadatka. Iteriranje se treba zaustaviti kada je ona manja od* $tol = 10^{-8}$.



Slika: Relativne norme reziduala u svakoj iteraciji metode konjugiranih gradijenata, za matricu A iz prethodnog zadatka.

Sustavi linearnih jednadžbi
Iterativne metode
Matrične norme
Standardne iteracije
Jacobijeva metoda
Gauss–Seidelova metoda
SOR metoda
Zadaci
Iteracije iz Krylovljevih potprostora
Metoda konjugiranih gradijenata
Zadaci

- U prvom primjeru je metoda napravila preko $130 > 100$ koraka. To se dogodilo zbog
  - grešaka zaokruživanja,
  - malo veće uvjetovanosti $\kappa_2(A) = 10^4$, ali ne prevelike,
  - i zbog toga što se izgubilo svojstvo ortogonalnosti reziduala r_k.
- U drugom primjeru smo dobili točno 10 koraka koliko se i tvrdi u teoremu, a i matrica je dobro uvjetovana $\kappa_2(A) = 10$.