Diskretna Fourierova transformacija

6. dio kolegija Numeričke metode financijske matematike

Nela Bosner

Diskretna Fourierova transformacija

Primjer

- *Primjena diskretne Fourierove transformacije u statističkoj analizi vremenskih nizova ostvaruje se u računanju periodograma $I_N(f)$, koji mjeri koliko određena frekvencija f utječe na varijaciju vremenskog niza $\{y_t\}$.*
- *Periodogram se obično definira kao*

$$I_N(f) = \frac{N}{2}[A(f)^2 + B(f)^2],$$

gdje su $A(f)$ i $B(f)$ aproksimacije periodičkih komponenti niza $\{y_t, t = 0, \ldots, N-1\}$,

$$A(f) = \frac{2}{N}\sum_{t=0}^{N-1} y_t \cos(2\pi f t), \quad B(f) = \frac{2}{N}\sum_{t=0}^{N-1} y_t \sin(2\pi f t).$$

Primjer (nastavak)

- *Iako je periodogram definiran za sve frekvencije $f \in [0, \frac{1}{2}]$, u većini primjena on će se izvrednjavati samo u nekoliko izabranih frekvencija.*
- *Ako odaberemo Fourijerove frekvencije $f_j = \frac{j}{N}$, tada možemo koristiti diskretnu Fourijerovu transformaciju za računanje $I_N(f_j)$:*

$$
\begin{aligned}
a_j &= \sum_{t=0}^{N-1} y_t e^{-\frac{2\pi \iota jt}{N}} \\
&= \sum_{t=0}^{N-1} y_t \left[\cos\left(\frac{2\pi jt}{N}\right) - \iota \sin\left(\frac{2\pi jt}{N}\right)\right] \\
&= \frac{N}{2}\left[A\left(\frac{j}{N}\right) - \iota B\left(\frac{j}{N}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Primjer (nastavak)

- *Odavde slijedi da je*

$$I_N\left(\frac{j}{N}\right) = \frac{2}{N}|a_j|^2,$$

gdje je $\iota = \sqrt{-1}$.

Trigonometrijska interpolacija

- Trigonometrijska interpolacija koristi kombinacije trigonometrijskih funkcija $\cos(hx)$ i $\sin(hx)$ za cijeli broj h.
- Mi ćemo promatrati linearne interpolacije oblika

$$\psi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{M}(A_h \cos(hx) + B_h \sin(hx)), \quad \text{ili}$$

$$\psi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{M-1}(A_h \cos(hx) + B_h \sin(hx)) + \frac{A_M}{2}\cos(Mx),$$

  za $N = 2M + 1$ odnosno $N = 2M$ interpolacijskih točaka (x_k, f_k), $k = 0, \ldots, N - 1$.
- Interpolacija ovog oblika pogodna je za podatke koji su periodični sa poznatom periodom, a u ovom slučaju to je 2π.

- Zbog pojednostavljenja računa uvodimo kompleksne brojeve i koristimo De Moivreovu formulu
$$e^{\iota kx} = \cos(kx) + \iota \sin(kx),$$
za $\iota = \sqrt{-1}$.
- Posebno su važne uniformne particije segmenta $[0, 2\pi]$
$$x_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$
- Za takve particije, trigonometrijski interpolacijski problem može se transformirati u problem pronalaženja **faznog polinoma** reda N (sa N koeficijenata)
$$p(x) = \beta_0 + \beta_1 e^{\iota x} + \beta_2 e^{2\iota x} + \cdots + \beta_{N-1} e^{(N-1)\iota x},$$
sa kompleksnim koeficijentima β_j takvima da je
$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

- Zaista, zbog periodičnosti s periodom 2π vrijedi

$$e^{-h\iota x_k} = e^{-\frac{2\pi\iota hk}{N}} = e^{\frac{2\pi\iota(N-h)k}{N}} = e^{(N-h)\iota x_k},$$

  i zbog toga je

$$\cos(hx_k) = \frac{e^{h\iota x_k} + e^{-h\iota x_k}}{2} = \frac{e^{h\iota x_k} + e^{(N-h)\iota x_k}}{2},$$
$$\sin(hx_k) = \frac{e^{h\iota x_k} - e^{-h\iota x_k}}{2\iota} = \frac{e^{h\iota x_k} - e^{(N-h)\iota x_k}}{2\iota}.$$

- Uvrštavanjem ovih izraza u trigonometrijski polinom $\psi(x)$, i grupiranjem izraza sa istom potencijom od $e^{\iota x_k}$ dobit ćemo fazni polinom $p(x)$ sa koeficijentima β_j, $j = 0, \dots, N-1$.
- β_j možemo izraziti preko koeficijenata A_h i B_h na sljedeći način:

(a) Ako je N neparan, tada je $N = 2M + 1$ i vrijedi

$$
\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{A_0}{2} \\
\beta_j &= \frac{1}{2}(A_j - \iota B_j), & j &= 1, \ldots, M \\
\beta_{N-j} &= \frac{1}{2}(A_j + \iota B_j), & j &= 1, \ldots, M \\
A_0 &= 2\beta_0 \\
A_h &= \beta_h + \beta_{N-h}, & h &= 1, \ldots, M \\
B_h &= \iota(\beta_h - \beta_{N-h}), & h &= 1, \ldots, M
\end{aligned}
$$

(b) Ako je N paran, tada je $N = 2M$ i vrijedi

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{A_0}{2} \\
\beta_j &= \frac{1}{2}(A_j - \iota B_j), && j = 1, \ldots, M-1 \\
\beta_{N-j} &= \frac{1}{2}(A_j + \iota B_j), && j = 1, \ldots, M-1 \\
\beta_M &= \frac{A_M}{2} \\
A_0 &= 2\beta_0 \\
A_h &= \beta_h + \beta_{N-h}, && h = 1, \ldots, M-1 \\
B_h &= \iota(\beta_h - \beta_{N-h}), && h = 1, \ldots, M-1 \\
A_M &= 2\beta_M
\end{aligned}$$

- Trigonometrijski polinom $\psi(x)$ i njen fazni polinom $p(x)$ poklapaju se u točkama $x_k = 2\pi k/N$

$$f_k = \psi(x_k) = p(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

- Međutim, $\psi(x) = p(x)$ ne mora vrijediti za točke $x \neq x_k$.
- Interpolacijski problemi sa $\psi(x)$ i $p(x)$ ekvivalentni su samo za točke x_k, i u tom slučaju znamo izračunati koeficijente jedne funkcije preko koeficijenata druge.
- S druge strane, fazni polinom $p(x)$ je strukturalno jednostavniji od $\psi(x)$.
- Uvodimo sljedeće pokrate:

$$\omega = e^{\iota x}, \quad \omega_k = e^{\iota x_k} = e^{\frac{2k\pi\iota}{N}},$$

$$P(\omega) = \beta_0 + \beta_1\omega + \cdots + \beta_{N-1}\omega^{N-1}.$$

- Budući da je
$$\omega_j \neq \omega_k, \quad \text{za } j \neq k,\ 0 \leq j, k \leq N-1,$$
polazni problem smo sveli na standardnu polinomijalnu interpolaciju:
    - Nađi kompleksan algebarski polinom P stupnja manjeg od N uz uvjet
$$P(\omega_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$
- Iz jedinstvenosti polinomijalne interpolacije, odmah dobivamo sljedeći teorem.

Teorem

Za izbor interpolacijskih točaka (x_k, f_k), $k = 0, \ldots, N-1$, *gdje je* $f_k \in \mathbb{C}$ *i* $x_k = 2\pi k/N$, *postoji jedinstveni fazni polinom*

$$p(x) = \beta_0 + \beta_1 e^{\iota x} + \beta_2 e^{2\iota x} + \cdots + \beta_{N-1} e^{(N-1)\iota x}$$

za koji je

$$p(x_k) = f_k$$

za $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

- Sada želimo naći eksplicitne izraze za β_j za što će nam trebati sljedeći rezultati.
- Najprije, primijetimo da je za $0 \leq j, h \leq N-1$

$$\omega_h^j = \omega_j^h, \quad \omega_h^{-j} = \overline{\omega_h^j}.$$

Teorem

Za $0 \leq j, h \leq N-1$ *vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^j \omega_k^{-h} = \begin{cases} N, & za\ j = h, \\ 0, & za\ j \neq h. \end{cases}$$

Dokaz.

- Prvo, zbog prethodnih primjedbi vrijedi sljedeće

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^j \omega_k^{-h} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^{j-h} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_{j-h}^k.$$

- Za $0 \leq j, h \leq N-1$ je $-(N-1) \leq j-h \leq N-1$.
- $\omega_{j-h} = e^{\frac{2(j-h)\pi\iota}{N}}$ je onda N-ti korijen jedinice, jer je

$$\begin{aligned}\omega_{j-h}^N &= e^{\frac{2N(j-h)\pi\iota}{N}} = e^{2(j-h)\pi\iota} \\ &= \cos(2(j-h)\pi) + \iota \sin(2(j-h)\pi) = 1.\end{aligned}$$

- ω_{j-h} je stoga korijen polinoma

$$\omega^N - 1 = (\omega - 1)(\omega^{N-1} + \omega^{N-2} + \cdots + \omega + 1).$$

Dokaz (nastavak).

- Odavde slijedi da je
  (a) ili $\omega_{j-h} = 1$ za $j = h$, pa je

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^j \omega_k^{-h} = \sum_{k=0}^{N-1} 1^k = N,$$

  (b) ili za $j \neq h$

$$\omega_{j-h}^{N-1} + \omega_{j-h}^{N-2} + \cdots + \omega_{j-h} + 1 = 0,$$

  pa je

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^j \omega_k^{-h} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_{j-h}^k = 0.$$

$\square$

Korolar

Za trigonometrijske funkcije, na mreži točaka $x_k = \frac{2\pi k}{N}$, *za* $k = 0, \ldots, N-1$ *vrijede sljedeće relacije ortogonalnosti*

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin(jx_k)\sin(hx_k) = \begin{cases} 0, & za\ j \neq h\ i\ j = h = 0, \\ \frac{N}{2}, & za\ j = h \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \cos(jx_k)\cos(hx_k) = \begin{cases} 0, & za\ j \neq h, \\ \frac{N}{2}, & za\ j = h \neq 0, \\ N, & za\ j = h = 0, \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin(jx_k)\cos(hx_k) = 0,$$

uz uvjet da je $j + h \leq N - 1$.

Dokaz.

- Kako je

$$\begin{aligned}\omega_k &= e^{\iota x_k} = \cos(x_k) + \iota\sin(x_k),\\ \omega_k^j &= e^{\iota j x_k} = \cos(jx_k) + \iota\sin(jx_k),\end{aligned}$$

onda slijedi

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1}\omega_k^j\omega_k^{-h} &= \sum_{k=0}^{N-1}(\cos(jx_k)+\iota\sin(jx_k))(\cos(hx_k)-\iota\sin(hx_k))\\ &= \sum_{k=0}^{N-1}(\cos(jx_k)\cos(hx_k)+\sin(jx_k)\sin(hx_k))+\\ &\quad+\iota\sum_{k=0}^{N-1}(\sin(jx_k)\cos(hx_k)-\cos(jx_k)\sin(hx_k))\\ &= \begin{cases} N, & \text{za } j = h,\\ 0, & \text{za } j \neq h.\end{cases}\end{aligned}$$

Dokaz (nastavak).

- Dakle, izjednačavanjem realnih i imaginarnih djelova prethodne jednakosti možemo zaključiti

$$\sum_{k=0}^{N-1}(\cos(jx_k)\cos(hx_k)+\sin(jx_k)\sin(hx_k))=\begin{cases} N, & \text{za } j=h,\\ 0, & \text{za } j\neq h,\end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}(\sin(jx_k)\cos(hx_k)-\cos(jx_k)\sin(hx_k))=0.$$

- Dalje, iz adicionih formula slijedi

$$\sum_{k=0}^{N-1}\cos((j-h)x_k)=\sum_{k=0}^{N-1}\cos(\ell x_k)=\begin{cases} N, & \text{za } j=h,\ \ell=0\\ 0, & \text{za } j\neq h,\ \ell\neq 0,\end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sin((j-h)x_k)=\sum_{k=0}^{N-1}\sin(\ell x_k)=0,$$

za $-(N-1)\leq \ell \leq N-1$.

Dokaz (nastavak).

- Sada redom možemo pokazati:

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sin(jx_k)\sin(hx_k) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\cos((j-h)x_k) - \sum_{k=0}^{N-1}\cos((j+h)x_k)\right)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(N-N)=0, & \text{za } j=h=0,\\ \frac{1}{2}(N-0)=\frac{N}{2}, & \text{za } j=h\neq 0,\\ \frac{1}{2}(0-0)=0, & \text{za } j\neq h,\end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\cos(jx_k)\cos(hx_k) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\cos((j-h)x_k) + \sum_{k=0}^{N-1}\cos((j+h)x_k)\right)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(N+N)=N, & \text{za } j=h=0,\\ \frac{1}{2}(N+0)=\frac{N}{2}, & \text{za } j=h\neq 0,\\ \frac{1}{2}(0+0)=0, & \text{za } j\neq h,\end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sin(jx_k)\cos(hx_k) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\sin((j-h)x_k) + \sum_{k=0}^{N-1}\sin((j+h)x_k)\right)$$
$$= \frac{1}{2}(0+0) = 0.$$

- Ovim korolarom smo pokazali da trigonometrijske funkcije $\{\cos(hx), \sin(hx)\}$ predstavljaju realnu ortogonalnu familiju funkcija, sa posebnim diskretnim skalarnim produktom definiranim na mreži $\{x_k\}$.
- Sada ćemo se ponovo vratiti na kompleksan problem zadan faznim polinomom.
- Ako u vektorskom prostoru $\mathbb{C}^N$ svih N-torki $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{N-1})$, $u_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \ldots, N-1$ koristimo standardni skalarni produkt

$$\langle u, v\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \bar{v}_k,$$

tada prethodni teorem tvrdi da posebni N-vektori

$$w^{(h)} = (1, \omega_1^h, \ldots, \omega_{N-1}^h), \quad h = 0, \ldots, N-1,$$

čine ortogonalnu bazu za $\mathbb{C}^N$, takvu da je

$$\langle w^{(j)}, w^{(h)} \rangle = \begin{cases} N, & \text{za } j = h, \\ 0, & \text{za } j \neq h. \end{cases}$$

- Primijetimo da ovi vektori imaju duljinu

$$\|w^{(h)}\|_2 = \sqrt{\langle w^{(h)}, w^{(h)} \rangle} = \sqrt{N}.$$

- Iz ortogonalnosti vektora $w^{(h)}$ slijedi sljedeći teorem.

Teorem

Fazni polinom $p(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j e^{j\iota x}$ *zadovoljava*

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, N-1,$$

za kompleksne brojeve f_k *i* $x_k = \frac{2\pi k}{N}$ *ako i samo ako*

$$\beta_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \omega_k^{-j} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi \iota jk}{N}}, \quad j = 0, \ldots, N-1.$$

Dokaz.

Budući da je $f_k = p_k$, N-vektor $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ zadovoljava

$$f = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j w^{(j)},$$

tako da je

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k \omega_k^{-h} = \langle f, w^{(h)} \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j \langle w^{(j)}, w^{(h)} \rangle = N\beta_h.$$

$\square$

Korolar

Trigonometrijski polinomi

$$\psi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{M} (A_h \cos(hx) + B_h \sin(hx)),$$

$$\psi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{M-1} (A_h \cos(hx) + B_h \sin(hx)) + \frac{A_M}{2} \cos(Mx),$$

gdje je $N = 2M + 1$ *odnosno* $N = 2M$*, zadovoljavaju*

$$\psi(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

za $x_k = \frac{2\pi k}{N}$ *ako i samo ako su koeficijenti od* $\psi(x)$ *dani sa*

Korolar (nastavak)

$$A_h = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos(hx_k) = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos\left(\frac{2\pi hk}{N}\right),$$

$$B_h = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin(hx_k) = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin\left(\frac{2\pi hk}{N}\right).$$

Dokaz.

Ovaj korolar može se dokazati na dva načina.

1. Preko izraza

$$A_h = \beta_h + \beta_{N-h}, \quad B_h = \imath(\beta_h - \beta_{N-h}),$$

i prethodnog teorema.

Dokaz (nastavak).

2. Koristeći ortogonalnost trigonometrijskih funkcija.

N=2M+1 Za $0 \leq h, j \leq M$, vrijedi $(j+h) \leq 2M < N$, i

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos(hx_k) = &\frac{A_0}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\cos(hx_k)+\\ &+\sum_{j=1}^{M} A_j \sum_{k=0}^{N-1}\cos(hx_k)\cos(jx_k)+\\ &+\sum_{j=1}^{M} B_j \sum_{k=0}^{N-1}\cos(hx_k)\sin(jx_k)\\ =&\begin{cases}\frac{A_0}{2}\cdot N, & \text{za } h=0,\\ A_h\cdot\frac{N}{2}, & \text{za } h\neq 0.\end{cases}\end{aligned}$$

$\square$

Dokaz (nastavak).

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin(hx_k) =& \frac{A_0}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\sin(hx_k)+ \\
&+\sum_{j=1}^{M} A_j \sum_{k=0}^{N-1}\sin(hx_k)\cos(jx_k)+ \\
&+\sum_{j=1}^{M} B_j \sum_{k=0}^{N-1}\sin(hx_k)\sin(jx_k) \\
=& \begin{cases} 0, & \text{za } h=0, \\ B_h\cdot\frac{N}{2}, & \text{za } h\neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

$\square$

Dokaz (nastavak).

N=2M Za $0 \leq h, j \leq M-1$, vrijedi $(j+h) \leq 2M-2 < N$, i

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos(hx_k) = & \frac{A_0}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \cos(hx_k) + \\
& + \sum_{j=1}^{M-1} A_j \sum_{k=0}^{N-1} \cos(hx_k) \cos(jx_k) + \\
& + \sum_{j=1}^{M-1} B_j \sum_{k=0}^{N-1} \cos(hx_k) \sin(jx_k) + \\
& + \frac{A_M}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \cos(hx_k) \cos(Mx_k) \\
= & \begin{cases} \frac{A_0}{2} \cdot N, & \text{za } h = 0, \\ A_h \cdot \frac{N}{2}, & \text{za } h \neq 0,\ h \neq M \\ \frac{A_M}{2} \cdot N, & \text{za } h = M. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dokaz (nastavak).

Zadnja tvrdnja se vidi iz $2Mx_k = N\frac{2\pi k}{N} = 2\pi k$ i iz sljedećeg izraza:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} \cos(Mx_k)\cos(Mx_k) =& \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \cos((M-M)x_k) + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \cos(2Mx_k) \\
=& \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} \cos(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi k)\right) \\
=& \frac{1}{2}(N+N) = N.
\end{aligned}$$

$\square$

Dokaz (nastavak).

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin(hx_k) = & \frac{A_0}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sin(hx_k) + \\
& + \sum_{j=1}^{M-1} A_j \sum_{k=0}^{N-1} \sin(hx_k) \cos(jx_k) + \\
& + \sum_{j=1}^{M-1} B_j \sum_{k=0}^{N-1} \sin(hx_k) \sin(jx_k) + \\
& + \frac{A_M}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sin(hx_k) \cos(Mx_k) \\
= & \begin{cases} 0, & \text{za } h = 0, \\ B_h \cdot \frac{N}{2}, & \text{za } h \neq 0, \; h \neq M \\ 0, & \text{za } h = M. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Definicija

- *Preslikavanje* $\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ *definirano sa* $\beta = \mathcal{F}(f)$ *kao*

$$f = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}) \mapsto \beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{N-1}),$$

  pri čemu su β_j $j = 0, \ldots, N-1$ *definirani kao u prethodnom teoremu, zove se diskretna Fourierova transformacija (DFT).*

- *Njen inverz* $\beta \mapsto f = \mathcal{F}^{-1}(\beta)$ *zove se Fourierova sinteza, i predstavlja izvrednjavanje faznog polinoma* $p(x)$ *u ekvidistantnim točkama* $x_k = \frac{2\pi k}{N}$, $k = 0, \ldots, N-1$,

$$f_k = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j e^{\frac{2\pi \imath jk}{N}} = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j \omega_k^j.$$

- Budući da je $\bar{f}_k = \sum_{j=0}^{N-1} \bar{\beta}_j \omega_k^{-j}$, preslikavanje $\mathcal{F}^{-1}$ može se izraziti preko $\mathcal{F}$ kao

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\beta) = N\overline{\mathcal{F}(\bar{\beta})}.$$

- Zbog toga se algoritam za računanje diskretne Fourierove transformacije $\mathcal{F}$ može upotrijebiti i za Fourierovu sintezu.

- Za fazne polinome $q(x)$ reda s, gdje je $s \leq N-1$ općenito ne postoji mogućnost da svi reziduali

$$f_k - q(x_k), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

budu jednaki 0, pa se stoga radi o **problemu najmanjih kvadrata**.

- U tu svrhu definiramo s-segmente

$$p_s(x) = \beta_0 + \beta_1 e^{\iota x} + \cdots + \beta_{s-1} e^{(s-1)\iota x},$$

interpolacijskog polinoma $p(x)$, koji će predstavljati najbolje aproksimacije.

Teorem

s-segment $p_s(x)$, $0 \leq s < N$, interpolacijskog faznog polinoma $p(x)$ minimizira sumu kvadrata

$$S(q) = \sum_{k=0}^{N-1} |f_k - q(x_k)|^2$$

po svim faznim polinomima

$$q(x) = \gamma_0 + \gamma_1 e^{\iota x} + \cdots + \gamma_{s-1} e^{(s-1)\iota x}.$$

Fazni polinom $p_s(x)$ je na jedinstveni način određen ovim svojstvom minimizacije

$$S(p_s) = \min_q S(q),$$

i predstavlja rješenje problema najmanjih kvadrata.

Dokaz.

- Definirajmo N-vektore

$$p_s = (p_s(x_0), \ldots, p_s(x_{N-1})), \quad q = (q(x_0), \ldots, q(x_{N-1})).$$

- $S(a)$ može biti napisan kao skalarni produkt

$$S(q) = \langle f - q, f - q \rangle.$$

- Prema prethodnom teoremu je $N\beta_j = \langle f, w^{(j)} \rangle$ za $j = 0, \ldots, N - 1$.
- Zbog toga je za $j \leq s - 1$

$$\langle f - p_s, w^{(j)} \rangle = \langle f - \sum_{h=0}^{s-1} \beta_h w^{(h)}, w^{(j)} \rangle = N\beta_j - N\beta_j = 0,$$

Dokaz (nastavak).

i

$$\langle f - p_s, p_s - q \rangle = \sum_{j=0}^{s-1} \overline{(\beta_j - \gamma_j)} \langle f - p_s, w^{(j)} \rangle = 0.$$

- Sada možemo zaključiti

$$\begin{aligned} S(q) =& \langle f - q, f - q \rangle \\ =& \langle (f - p_s) + (p_s - q), (f - p_s) + (p_s - q) \rangle \\ =& \langle f - p_s, f - p_s \rangle + \langle p_s - q, p_s - q \rangle \\ \geq& \langle f - p_s, f - p_s \rangle = S(p_s). \end{aligned}$$

- Jednakost vrijedi samo ako je $\|p_s - q\|_2^2 = \langle p_s - q, p_s - q \rangle = 0$, tj. ako je $p_s = q$.

Dokaz (nastavak).

- Tada su fazni polinomi $p_s(x)$ i $q(x)$ identični prema teoremu o jedinstvenosti interpolacijskog faznog polinoma (za $f_k = 0$, $k = 0, \ldots, s$).

$\square$

Brza Fourierova transformacija (FFT)

- Interpolacija točaka (x_k, f_k), $k = 0, 1, \ldots, N-1$, gdje je $x_k = \frac{2\pi k}{N}$, pomoću faznog polinoma $p(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j e^{j\iota x}$, vodi ka računanju izraza

$$\beta_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi\iota jk}{N}}, \quad j = 0, \ldots, N-1.$$

- Izravno računanje izraza za β_j zahtijeva $\mathcal{O}(N^2)$ množenja, što za veliki N predstavlja problem.
- Cooley i Tukey su 1965. godine otkrili brzi algoritam za izvrednjavanje β_j, koji zahtijeva samo $\mathcal{O}(N \log N)$ množenja.
- Taj algoritam se naziva **brza Fourierova transformacija** (*fast Fourier transformation — FFT*).
- FFT se bazira na cjelobrojnoj faktorizaciji broja N, pri čemu se onda polazni problema razbija na manje potprobleme nižeg stupnja.

- Spomenute dekompozicije polaznog problema izvode se rekurzivno.
- Ovaj pristup najbolje funkcionira za

$$N = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Od sada pa na dalje mi ćemo pretpostavljati da je $N = 2^n$, iako se FFT algoritam može poopćiti i za $N = N_1 N_2 \cdots N_n$, $N_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$.
- Pretpostavimo da je $N = 2M$, i promotrimo dva interpolacijska fazna polinoma $q(x)$ i $r(x)$ reda $M = N/2$, definirana sa

$$q(x_{2h}) = f_{2h}, \quad r(x_{2h}) = f_{2h+1}, \quad h = 0, \ldots, M-1.$$

- Fazni polinom $q(x)$ interpolira sve točke x_k sa parnim indeksom.

- Polinom
$$\hat{r}(x) = r\left(x - \frac{2\pi}{N}\right) = r\left(x - \frac{\pi}{M}\right)$$
interpolira sve točke x_k sa neparnim indeksom:
$$\hat{r}(x_{2h+1}) = r\left(\frac{2\pi(2h+1)}{N} - \frac{2\pi}{N}\right) = r\left(\frac{2\pi(2h)}{N}\right) = r(x_{2h}) = f_{2h+1}.$$
- Budući da vrijedi
$$e^{Mix_k} = e^{\frac{2\pi\iota MK}{N}} = e^{\pi\iota k} = \begin{cases} +1, & \text{za } k \text{ paran,} \\ -1, & \text{za } k \text{ neparan.} \end{cases}$$
interpolacijski polinom $p(x)$ sada možemo izraziti preko faznih polinoma nižeg reda $q(x)$ i $r(x)$ kao
$$p(x) = q(x)\left(\frac{1+e^{M\iota x}}{2}\right) + r\left(x - \frac{\pi}{M}\right)\left(\frac{1-e^{M\iota x}}{2}\right).$$

- Zaista, $p(x)$ je tada reda $2M = N$ i

$$
\begin{aligned}
p(x_{2h}) =& q(x_{2h})\left(\frac{1+1}{2}\right) + r\left(x_{2h} - \frac{\pi}{M}\right)\left(\frac{1-1}{2}\right) \\
=& q(x_{2h}) = f_{2h}, \\
p(x_{2h+1}) =& q(x_{2h+1})\left(\frac{1-1}{2}\right) + r\left(x_{2h+1} - \frac{\pi}{M}\right)\left(\frac{1+1}{2}\right) \\
=& \, r(x_{2h}) = f_{2h+1}.
\end{aligned}
$$

- Ovime smo dobili osnovu za n-koračnu rekurziju.
- Za $m \leq n$, neka je

$$
M = 2^{m-1}, \quad \text{i} \quad R = 2^{n-m}.
$$

- U koraku označenom sa m moramo odrediti R faznih polinoma reda $2M = 2^m$

$$p_r^{(m)} = \beta_{r,0}^{(m)} + \beta_{r,1}^{(m)} e^{\iota x} + \cdots + \beta_{r,2M-1}^{(m)} e^{(2M-1)\iota x}, \ r = 0, \ldots, R-1,$$

  iz $2R$ faznih polinoma reda M $p_r^{(m-1)}$, $r = 0, \ldots, 2R-1$ pomoću rekurzije

$$2p_r^{(m)}(x) = p_r^{(m-1)}(x)(1+e^{M\iota x}) + p_{R+r}^{(m-1)}\left(x - \frac{\pi}{M}\right)(1-e^{M\iota x}).$$

- Uvrstimo li u gornju jednakost izraze za $p_r^{(m)}(x)$, $p_r^{(m-1)}(x)$ i $p_{R+r}^{(m-1)}\left(x - \frac{\pi}{M}\right)$ dobit ćemo sljedeće

$$\begin{aligned}
&2\beta_{r,0}^{(m)} + 2\beta_{r,1}^{(m)} e^{\iota x} + \cdots + 2\beta_{r,2M-1}^{(m)} e^{(2M-1)\iota x} = \\
&= \left(\beta_{r,0}^{(m-1)} + \beta_{r,1}^{(m-1)} e^{\iota x} + \cdots + \beta_{r,M-1}^{(m-1)} e^{(M-1)\iota x}\right)(1 + e^{M\iota x}) + \\
&\quad + \left(\beta_{R+r,0}^{(m-1)} + \beta_{R+r,1}^{(m-1)} e^{\iota x} e^{-\frac{2\pi\iota}{2M}} + \cdots + \beta_{R+r,M-1}^{(m-1)} e^{(M-1)\iota x} e^{-\frac{(M-1)2\pi\iota}{2M}}\right) \cdot \\
&\quad \cdot (1 - e^{M\iota x})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2\beta_{r,0}^{(m)} + 2\beta_{r,1}^{(m)} e^{\iota x} + \cdots + 2\beta_{r,2M-1}^{(m)} e^{(2M-1)\iota x} = \\
&= \left(\beta_{r,0}^{(m-1)} + \beta_{R+r,0}^{(m-1)}\right) + \left(\beta_{r,1}^{(m-1)} + \beta_{R+r,1}^{(m-1)} e^{-\frac{2\pi\iota}{2M}}\right) e^{\iota x} + \cdots + \\
&\quad + \left(\beta_{r,M-1}^{(m-1)} + \beta_{R+r,M-1}^{(m-1)} e^{-\frac{(M-1)2\pi\iota}{2M}}\right) e^{(M-1)\iota x} + \\
&\quad + \left(\beta_{r,0}^{(m-1)} - \beta_{R+r,0}^{(m-1)}\right) e^{M\iota x} + \left(\beta_{r,1}^{(m-1)} - \beta_{R+r,1}^{(m-1)} e^{-\frac{2\pi\iota}{2M}}\right) e^{(M+1)\iota x} + \cdots + \\
&\quad + \left(\beta_{r,M-1}^{(m-1)} - \beta_{R+r,M-1}^{(m-1)} e^{-\frac{(M-1)2\pi\iota}{2M}}\right) e^{(2M-1)\iota x}
\end{aligned}$$

- Iz prethodne jednakost možemo dobiti rekurziju za koeficijente gornjih faznih polinoma:

$$\begin{aligned}
2\beta_{r,j}^{(m)} &= \beta_{r,j}^{(m-1)} + \beta_{R+r,j}^{(m-1)} \varepsilon_m^j \\
2\beta_{r,M+j}^{(m)} &= \beta_{r,j}^{(m-1)} - \beta_{R+r,j}^{(m-1)} \varepsilon_m^j
\end{aligned}$$

$$r = 0, \ldots, R-1, \quad j = 0, \ldots, M-1, \quad m = 0, \ldots, n,$$

gdje je

$$\varepsilon_m = e^{-\frac{2\pi\iota}{2^m}}, \quad m = 0, \ldots, n-1.$$

- Početna iteracija rekurzije je

$$\beta_{k,0}^{(0)} = f_k, \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

- Rekurzija završava sa

$$\beta_j = \beta_{0,j}^{(n)}, \quad j = 0, \ldots, N-1.$$

- Pojavljuje se sada problem kako smjestiti parametre $\beta_{r,j}^{(m)}$ u jednodimenzionalno polje b.
- Tražimo pogodno preslikavanje $(m, r, j) \mapsto \kappa(m, r, j)$, pri čemu je $\kappa(m, r, j) \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, takvo da je

$$b(\kappa(m, r, j)) = \beta_{r,j}^{(m)}.$$

- Ako uzmemo najjednostavniji izbor
$$\kappa(m,r,j) = 2^m r + j, \quad m=0,\ldots,n,\ r=0,\ldots,2^{n-m}-1,\ j=0,\ldots,2^m-1.$$
- Prednost ovakvog preslikavanja je ta da je konačni rezultat automatski u pravilnom poretku.
- Nedostatak je što nam treba pomoćno polje c za spremanje $\beta_{r,j}^{(m-1)}$ iz prethodne iteracije.
- Ako želimo uštediti na memoriji, onda preslikvanje κ moramo definirati tako da nam je dovoljno samo jedno polje i to b.
- To se može postići tako da svaki par parametara $\beta_{r,j}^{(m)}$, $\beta_{r,M+j}^{(m)}$ zauzme ista mjesta kao i par $\beta_{r,j}^{(m-1)}$, $\beta_{R+r,j}^{(m-1)}$ iz kojeg se prethodni par i dobiva.
- U ovom slučaju će se, međutim, komponente vektora b ispermutirati i odgovarajuće preslikavanje nije više tako jednostavno.

- Neka je $\tau = \tau(m, r, j)$ preslikavanje sa svojstvima

$$\begin{aligned} b(\tau(m, r, j)) =& \beta_{r,j}^{(m)}, \\ \tau(m, r, j) =& \tau(m-1, r, j), \\ \tau(m, r, j+2^{m-1}) =& \tau(m-1, r+2^{n-m}, j), \end{aligned}$$

$$m = 1, \ldots, n, \ \ r = 0, \ldots, 2^{n-m}-1, \ \ j = 0, \ldots, 2^{m-1}-1,$$

i

$$\tau(n, 0, j) = j, \quad j = 0, \ldots, N-1.$$

- Zadnji uvjet znači da će konačni rezultat sa β_j biti u pravilnom poretku, tj.

$$b(j) = \beta_j.$$

- Prethodni uvjeti definiraju preslikavanje τ rekurzivno, i preostaje nam odrediti ga eksplicitno.

- Najprije promotrimo sljedeće: neka je

$$t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot 2^{n-1}, \quad \alpha_j \in \{0, 1\},$$

  binarni zapis prirodnog broja t, $0 \leq t < 2^n$.
- Tada preslikavanje

$$\rho(t) = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} \cdot 2 + \cdots + \alpha_0 \cdot 2^{n-1}$$

  definira permutaciju binarnih znamenki brojeva $t = 0, \ldots, 2^{n-1}$, koja uređuje znamenke u obrnutom redoslijedu.
- Za ovo preslikavanje vrijedi $\rho(\rho(t)) = t$.

Lema

Eksplicitni izraz za preslikavanje τ glasi

$$\tau(m,r,j) = \rho(r) + j,$$

za sve $m = 0,\ldots,n$, $r = 0,\ldots,2^{n-m}-1$, $j = 0,\ldots,2^m-1$.

Dokaz.

- Ako je

$$t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot 2^{n-1}, \quad \alpha_j \in \{0,1\},$$

tada iz uvjeta za preslikavanje τ slijedi

$$t = \tau(n,0,t) = \begin{cases} \tau(n-1,0,t), & \text{ako je } t < 2^{n-1}, \\ \tau(n-1,1,t-2^{n-1}), & \text{ako je } t \geq 2^{n-1}. \end{cases}$$

Dokaz (nastavak).

- Odavde možemo zaključiti

$$t = \tau(n,0,t) = \begin{cases} \tau(n-1,0,t), & \text{ako je } \alpha_{n-1} = 0, \\ \tau(n-1,1,t-2^{n-1}), & \text{ako je } \alpha_{n-1} = 1. \end{cases}$$

- Dakle,

$$\begin{aligned} t =& \tau(n,0,t) \\ =& \tau(n-1,\alpha_{n-1},\alpha_0 + \cdots + \alpha_{n-2} \cdot 2^{n-2}). \end{aligned}$$

- Ovaj postupak možemo rekurzivno nastaviti i za $m = n-1, n-2, \ldots, 0$, pa dobivamo

$$\begin{aligned} t =& \tau(n,0,t) \\ =& \tau(m,\alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_m \cdot 2^{n-m-1}, \alpha_0 + \cdots + \alpha_{m-1} \cdot 2^{m-1}). \end{aligned}$$

Dokaz (nastavak).

- Iz prethodnih razmatranja možemo zaključiti da je
$$t = \tau(m, r, j),$$
gdje je
$$r = \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_m \cdot 2^{n-m-1},$$
i
$$j = \alpha_0 + \cdots + \alpha_{m-1} \cdot 2^{m-1}.$$
- S druge strane je
$$\begin{aligned}\rho(r) =& \rho(\alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_m \cdot 2^{n-m-1} + 0 \cdot 2^{n-m} + \cdots + 0 \cdot 2^{n-1}) \\ =& 0 + \cdots + 0 \cdot 2^{n-1-(n-m)} + \alpha_m \cdot 2^{n-1-(n-m-1)} + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot 2^{n-1} \\ =& \alpha_m \cdot 2^m + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot 2^{n-1}.\end{aligned}$$

$\square$

Dokaz (nastavak).

- Znači da $t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot 2^{n-1}$ možemo izraziti kao

$$\begin{aligned} t =& (\alpha_0 + \cdots + \alpha_{m-1} \cdot 2^{m-1}) + (\alpha_m \cdot 2^m + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot 2^{n-1}) \\ =& j + \rho(r). \end{aligned}$$

$\square$

- Zbog svojstva da je $\rho(\rho(r)) = r$, ako definiramo $q = \rho(r)$, tada je

$$q = \alpha_m \cdot 2^m + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot 2^{n-1} = 2^m \cdot (\alpha_m + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot 2^{n-m-1}),$$

odnosno q je višekratnik od 2^m, i $0 \leq q < 2^n$.

- Dakle,

$$\tau(m, \rho(q), j) = q + j,$$

gdje je $0 \leq j < 2^m$.

- Ako je $0 \leq j < 2^{m-1}$ tada

$$\begin{aligned} t_1 =& \tau(m, \rho(q), j) = \tau(m-1, \rho(q), j) = q + j, \\ t_2 =& \tau(m, \rho(q), j + 2^{m-1}) = \tau(m-1, \rho(q) + 2^{n-m}, j) \\ =& q + j + 2^{m-1} \end{aligned}$$

označavaju pozicije unutar polja b parametara koji sudjeluju u FFT rekurziji.

- Ovu zadnju jednakost možemo potvrditi ako provjerimo

$$\begin{aligned} \rho(\rho(q) + 2^{n-m}) =& \rho(\alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_m \cdot 2^{n-m-1} + 2^{n-m}) \\ =& 2^{n-1-(n-m)} + \alpha_m \cdot 2^m + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot 2^{n-1} \\ =& 2^{m-1} + q. \end{aligned}$$

- Ovime smo razradili osnovu rekurzivnog FFT algoritma.
- Polje b ćemo inicijalizirati za $m = 0$ sa

$$b(\tau(0,k,0)) = b(\rho(k)) = f_k, \quad k = 0,\dots,N-1.$$

- Ovu početnu permutaciju možemo izvesti i za $j = \rho(k)$ pa je

$$b(j) = b(\rho(\rho(j))) = f_{\rho(j)},$$

  tako da idemo redom po komponentama od polja b.
- Nadalje, izbrisat ćemo faktor 2 koji se pojavljuje u rekurziji za $\beta_{r,j}^{(m)}$ zbog štednje u operacijama, zato na kraju moramo još izvršiti sljedeću operaciju

$$\beta_j = \frac{1}{N} b(j), \quad j = 0,\dots,N-1.$$

Algoritam (Cooley–Tukeyev FFT algoritam)

for $j = 0 : 2^n - 1$
    $b(j) = f_{\rho(j)};$
end
for $m = 1 : n$
    for $j = 0 : 2^{m-1} - 1$
        $e = e^{-\frac{2\pi j \iota}{2^m}};$
        for $q = 0 : 2^m : 2^n - 1$
            $u = b(q+j); \quad v = b(q+j+2^{m-1}) \cdot e;$
            $b(q+j) = u + v;$
            $b(q+j+2^{m-1}) = u - v;$
        end
    end
end
for $j = 0 : 2^n - 1$
    $b(j) = b(j)/N;$
end

Zadaci

Zadatak

Napišite M-file funkciju `rho()` *koja obrće znamenke binarnog prikaza broja* x. *Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *broj* x
- *broj binarnih znamenki u zapisu* n

Koristite sljedeće MATLAB-ove funkcije

`dec2bin()`	*za prebacivanje prirodnog broja u string sa binarnim zapisom*
`fliplr()`	*za obrtanje znakova u stringu*
`bin2dec()`	*za prebacivanje stringa sa binarnim zapisom u prirodni broj*

Zadatak

Napišite M-file funkciju `FFT()` *koja implementira FFT algoritam. Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *polje f duljine $N = 2^n$ koje sadrži interpolacijske vrijednosti f_k*
- *broj n*

Funkcija neka vraća

- *polje b duljine N koje sadrži koeficijente faznog polinoma β_j*

Zadatak

Napišite M-file funkciju `trig_FFT()` *koja implementira FFT algoritam i vraća koeficijente trigonometrijskog polinoma* $\psi(x)$ *za* $N = 2M$*. Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *polje* f *duljine* $N = 2^n$ *koje sadrži interpolacijske vrijednosti* f_k
- *broj* n

Funkcija neka vraća

- *polje* A *duljine* $M + 1$ *koje sadrži koeficijente* A_h
- *polje* B *duljine* M *koje sadrži koeficijente* B_h

Napomena

Točnost vašeg FFT algoritma možete provjeriti tako da dobiveni fazni polinom izvrijednite u točkama x_k i usporedite sa f_k. Izvrednjavanje faznog polinoma $y = p(x)$ u točci x možete napraviti pomoću varijante Hornerove sheme:

Algoritam (Hornerova shema za fazni polinom)

$\varepsilon = e^{\iota x}$;
$y = \beta_{N-1}$;
for $j = N - 2 : -1 : 0$
  $y = y \cdot \varepsilon + \beta_j$;
end

Zadatak

Neka je

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{4}},$$

i neka je $n = 4$, *tako da je* $N = 16$. *Za* $x_k = \frac{2\pi k}{16}$ *definiramo* $f_k = f(x_k)$.

- *Primijenite svoj FFT algoritam na ovaj primjer, i izračunajte koeficijente interpolacijskog faznog polinoma* $p(x)$.
- *Izračunajte i koeficijente trigonometrijskog polinoma* $\psi(x)$.
- *Izvrijednite fazni polinom u točkama* x_k:

$$y_k = Re(p(x_k))$$

pomoću Hornerove sheme.

Zadatak

- *Izračunajte maksimalnu grešku*

$$e = \max_k |f_k - y_k|.$$

- *Nacrtajte graf funkcije f na segmentu* $[0, 6]$ *u plavoj boji, i crveni kružićima nacrtajte točke* (x_k, y_k), $k = 0, \ldots N - 1$.

Domaća zadaća

Zadajte si neku funkciju $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$*, i* $n \geq 4$*. Definirajte* $N = 2^n$, $x_k = \frac{2k\pi}{N}$*, i* $f_k = f(x_k)$ *za* $k = 0, 1 \ldots, N-1$*.*

1. *Točke* (x_k, f_k), $k = 0, 1 \ldots, N-1$ *interpolirajte prirodnim kubičnim splajnom. Na jednoj slici nacrtajte graf funkcije* f *i interpolacijskog splajna. Pravilno označite legendu.*
2. *Točke* (x_k, f_k), $k = 0, 1 \ldots, N-1$ *aproksimirajte po dijelovima linearnom funkcijom pomoću diskretne metode najmanjih kvadrata, pri čemu čvorove* $t_j, j = 0, \ldots, d$*, za* $d + 1 < N$ *izaberite tako da matrica* A *ima puni stupčani rang. Na jednoj slici nacrtajte točke* (x_k, f_k) *i graf dobivene po dijelovima linearne funkcije. Pravilno označite legendu.*

Domaća zadaća (nastavak)

3. *Funkciju f aproksimirajte po dijelovima linearnom funkcijom pomoću neprekidne metode najmanjih kvadrata, pri čemu uzmite iste čvorove t_j, $j = 0, \ldots, d$ kao u prethodnom zadatku. Na jednoj slici nacrtajte graf funkcije f i dobivene po dijelovima linearne funkcije. Pravilno označite legendu.*
4. *Točke (x_k, f_k), $k = 0, 1 \ldots, N-1$ interpolirajte faznim polinomom*

$$p(x) = \beta_0 + \beta_1 e^{\iota x} + \beta_2 e^{2\iota x} + \cdots + \beta_{N-1} e^{(N-1)\iota x},$$

pri čemu koeficijente β_j, $j = 0, \ldots, N-1$ izračunajte FFT algoritmom. Na jednoj slici nacrtajte graf funkcije f i točke $(x_k, p(x_k))$. Pravilno označite legendu.

Domaća zadaća (nastavak)

- ***Programski dio zadaće***
  Svaki student mora sam napisati sve gore upotrebljene funkcije, i mora ih znati objasniti nastavniku. Ukoliko se utvrdi da student nije sam napravio svoje zadatke neće dobiti minimani broj bodova iz zadaće!
- ***Pismeni dio zadaće***
  Svaki student će predati nastavniku isprintane slike koje se traže u zadacima, zajedno sa podacima:
  - *funkcija f*
  - *brojevi n ,N, d*
  - *polja* $[x_k]$, $[f_k]$, $[t_j]$
  - *maksimalnu grešku u čvorovima kod interpolacija*