ODABRANE TEME IZ TEORIJE BROJEVA: TREĆA ZADAĆA

1. Sage - theta funkcije

1. Uvjerite se da je theta funkcija pridružena rešetci E_8 jednaka Eisensteinovom redu $E_4(\tau)$. Iz toga zaključite da je broj vektora $v \in E_8$ za koje je $|v|^2 = 2m$ jednak $240\sigma_3(m)$.
2. Za cijeli brojeve n i $k > 1$, označimo sa

$$r_{2k}(n) = \#\{(v_1, \dots, v_{2k}) \in \mathbb{Z}^8 | v_1^2 + \cdots v_{2k}^2 = n\}.$$

Tada je

$$f_k(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} r_{2k}(n) q^n \in M_k(\Gamma_0(4)).$$

Za dani k napišite program koji će prikazati f_k kao linearnu kombinaciju elemenata baze prostora $M_k(\Gamma_0(4))$.

2. Fourierova transformacija

1. Izračunajte Fourierovu transformaciju funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := (4\pi x^2 - 1)e^{-\pi x^2}.$$

2*. Označimo sa K_R zatvoreni krug oko ishodišta radiusa $R > 0$. Pretpostavimo da je poznata sljedeća ocjena Fourierove transformacije karakteristične funkcije jediničnog kruga:

$$|\hat{\chi_{K_1}}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-3/2} \text{ za svaki } \xi \in \mathbb{R}^2,$$

za neku konstantu $C \in \langle 0, +\infty \rangle$. Dokažite sljedeću ocjenu broja cjelobrojnih točaka koje se nalaze u K_R:

$$\#(\mathbb{Z}^2 \cap K_R) = R^2\pi + O(R^{2/3}), \text{ kad } R \to +\infty.$$

*U*puta: Koristite Poissonovu formulu sumacije.

Rok za predaju zadaće je četvrtak 22.12.2016. Zadatak sa zvjezdicom ne trebate riješiti.