Theta funkcije

Q: Na koliko načina se broj može prikazati kao suma 4 kvadrata?

Def. $r(n,k) = \#\{v \in \mathbb{Z}^k : n = v_1^2 + \dots + v_k^2\}$

$$\Theta(\tau, k) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n,k)\, q^n \; ; \quad q = e^{2\pi i \tau}$$

funkcija izvodnica – konvergira apsolutno za $\tau \in \mathbb{H}$

Vrijedi: $\Theta(\tau, k_1)\,\Theta(\tau, k_2) = \Theta(\tau, k_1 + k_2)$

$\Rightarrow \quad \Theta(\tau, k) = \Theta^k$ gdje je

$$\Theta(\tau) = \Theta(\tau, 1) = \sum_{d \in \mathbb{Z}} q^{d^2}$$

Možemo li odrediti fju.

$$\Theta(\tau, 4) = \Theta(\tau)^4 \quad ?$$

Fourierova transformacija

Za $\ell \in \mathbb{N}$ neka je

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\ell) = \Big\{ f : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{C} : f \text{ izmjerljiva } \text{ i } \int_{x \in \mathbb{R}^\ell} |f(x)|\,dx < \infty \Big\}.$$

Za $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\ell)$ definiramo Fourierova transf.

$$\hat{f}(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^\ell} f(y)\, e^{-2\pi i \langle y, x \rangle}\, dy.$$

standardni skalarni produkt

Definirajmo

$$\vartheta(\tau, \ell) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^\ell} e^{\pi i |n|^2 \tau} \quad \text{za } \tau \in \mathbb{H}.$$

Red konvergira apsolutno i lokalno uniformno pa definira holomorfna fja.

Za $\tau = it$, $t>0$ i Gaussian $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$ imamo

$$\theta(it, \ell) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^\ell} f(n t^{1/2}).$$

Propozicija (osnovna svojstva Four. transf.)

a) $\hat{f}(x) = f(x)$ za proizvoljan ℓ

b) Za $\ell \in \mathbb{N}$, $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\ell)$ i $r \in \mathbb{R}$

vrijedi $\widehat{h(rx)} = r^{-\ell}\, \hat{h}(x/r)$

Dokaz: d.z.

Za modularnost theta funkcij trebat će

nam Poissonova formula sumacije.

Neka je $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\ell)$ takav da suma

$\sum_{d \in \mathbb{Z}^\ell} h(x+d)$ konvergira apsolutno i lokalno

uniformno te je još uz to h ∞ puta

diferencijabilna.

Tada je

Fourierov razvoj $\left(= \sum_{m \in \mathbb{Z}^\ell} a_m e^{2\pi i \langle m, x \rangle}\right)$

$$(*) \quad \sum_{d \in \mathbb{Z}^\ell} h(x+d) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^\ell} \hat{h}(m) e^{2\pi i \langle m, x \rangle}$$

periodička u odnosu na $\mathbb{Z}^\ell$

zašto je $a_m = \hat{h}(m)$?

kako izračunati Fourierov koeficijent? pomnoži fju s $e^{-2\pi i \langle m, x \rangle}$ i integriraj

($e^{2\pi i \langle m, x \rangle}$ su međusobno okomiti karakteri)

Iz Propozicije slijedi $(t > 0)$

$$\widehat{f(x t^{1/2})} = t^{-\ell/2} f(x t^{-1/2})$$

pa ako u $(*)$ uvrstimo $h(x) = f(x t^{-1/2})$ i $x = 0$ dobit ćemo

f je Gaussian

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^\ell} f(n t^{-1/2}) = t^{\ell/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^\ell} f(n t^{1/2})$$

odnosno
$$u(i/t, \ell) = t^{\ell/2} u(it, \ell) \quad \text{za } t>0$$

Slijedi da je holomorfna fja.
$$u(-1/\tau, \ell) - (-i\tau)^{\ell/2} u(\tau, \ell), \quad \tau \in \mathbb{H}$$

jednaka nuli za svaki $\tau = it$, $t>0$ pa iz

teorema o jedinstvenosti analitičkih funkcija

slijedi da je ona jednaka nuli $\forall \tau \in \mathbb{H}$ tj.

$$u(-1/\tau, \ell) = (-i\tau)^{\ell/2} u(\tau, \ell), \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

Za $\vartheta(\tau) = u(\tau, 1)$ imamo

$$\vartheta\left(\frac{\tau}{4\tau+1}\right) = \dots = \sqrt{4\tau+1}\, \vartheta(\tau)$$

$$\Rightarrow \quad \vartheta\left(\frac{\tau}{4\tau+1}, 4\right) = (4\tau+1)^2 \vartheta(\tau, 4)$$

$\vartheta(\tau, 4) = \vartheta(\tau)^4$

$$\Rightarrow \quad \vartheta(\tau, 4) \in M_2(\tilde{\Gamma}) \text{ gdje je } \tilde{\Gamma}$$

generirana s $\pm I, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Može se pokazati da je

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma_0(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : 4 \mid c \right\}.$$

dovoljno je pokazati da $\tilde{\Gamma}$ i $\Gamma_0(4)$

imaju istu sliku u $SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ a to se

provjeri na "prste"

$$0 \to \Gamma(n) \to SL_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{mod } n \text{ redukcija}} SL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0$$

$$\Gamma(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mod } n \right\}$$

Dakle vrijedi:

Teorem: $\Theta(\tau, 4) \in M_2(\Gamma_0(4))$

Što možemo reći o prostoru $M_2(\Gamma_0(4))$?

Pokazat ćemo prvo da je $\dim M_2(\Gamma_0(4)) \leq 2$,

a za to će nam trebati generalizacija formule

valencije na $\Gamma_0(4)$.

Korolar: Neka je $f(z)$ ne-nul meromorfna modularna forma težine k za neku podgrupu $\tilde{\Gamma} < \Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$. Tada

paži

vrijedi

$$\sum_{c \in C(\tilde{\Gamma})} V_c(f) + \sum_{P \in \mathbb{H}/\tilde{\Gamma}} \frac{V_P(f)}{n_{\tilde{\Gamma}}(P)} = \frac{k[\Gamma : \tilde{\Gamma}]}{12}$$

broj elemenata iz $\tilde{\Gamma}$ koji fiksiraju P

$C(\tilde{\Gamma})$ = kaspovi od $\mathbb{H}/\tilde{\Gamma}$ (ili $X_{\tilde{\Gamma}}$)

$\tilde{\Gamma}$ ↺

po definiciji to su orbite djelovanja $\tilde{\Gamma}$ na $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$

gdje $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} q = \frac{aq+b}{cq+d}$ i $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \infty = \frac{a}{c}$

$q \in \mathbb{Q}$

Dokaz: Ideja primijeniti formulu valencije za Γ na $g(z) = \prod_{\gamma \in \Gamma/\tilde{\Gamma}} f|_k \gamma$. Očito je po konstrukciji $g(z) \in M_{k \cdot [\Gamma : \tilde{\Gamma}]}(\Gamma)$ (jer djelovanje s $|_{k[\Gamma:\tilde{\Gamma}]}\alpha$ permutira reprezentante $\gamma \in \Gamma/\tilde{\Gamma}$ pa onda i fiksira $g(z)$.)

Iz formule valencija za Γ dobivamo

$$v_\infty(g) + \sum_{p \in \mathbb{H}/\Gamma} \frac{v_p(g)}{n_\Gamma(p)} = \frac{k[\Gamma:\tilde\Gamma]}{12}$$

Za $z \in \mathbb{H}$ vrijedi:

$$v_z(g) = v_z\left(\prod_{\gamma\in\Gamma/\tilde\Gamma} f|_\gamma\right) = \sum_{\gamma\in\Gamma/\tilde\Gamma} v_z(f|_\gamma)$$

$$= \sum_{\gamma \in \Gamma\backslash\tilde\Gamma} v_{\gamma z}(f).$$

Geometrijski:

$$\begin{array}{ccc} X_{\tilde\Gamma} & = & \overline{\mathbb{H}/\tilde\Gamma} \\ \pi\downarrow & & \downarrow \\ X_\Gamma & = & \overline{\mathbb{H}/\Gamma} \end{array}$$

$\gamma_i \in \Gamma/\tilde\Gamma$, $i = 1, \dots, r = [\Gamma:\tilde\Gamma]$

$$\begin{array}{ccc} \gamma_1 z & \dots & \gamma_r z \\ & \searrow\ \swarrow & \\ & z & \end{array}$$

stupanj preslikavanja je $[\Gamma:\tilde\Gamma]$

broj praslika je jednak: $\frac{[\Gamma:\tilde\Gamma]}{n_\Gamma(z)} \cdot n_{\tilde\Gamma}(z)$

zaštr.

pa je $$\sum_{\gamma\in\Gamma/\tilde\Gamma} v_{\gamma z}(f) = \sum_{\substack{p\in\mathbb{H}/\tilde\Gamma \\ \pi(p)=z}} v_p(f) \cdot \frac{n_\Gamma(z)}{n_{\tilde\Gamma}(z)}$$

Slično se i za kaspove pokaže da je

$v_\infty(g) = \sum_{c \in C(\tilde{\Gamma})} v_c(f)$ pa tvrdnja slijedi.

kako se definira $v_c(f)$?

pažnja! prilikom cijepanja kaspa mijenja se "širina kaspa" (cusp width) pa se q-razvoj računa u odnosu na $q^{\frac{1}{M}}$ za neki $M \in \mathbb{N}$ ...

Korolar 2: $\dim M_k(\tilde{\Gamma}) \leq \frac{k[\Gamma:\tilde{\Gamma}]}{12} + 1$

Dokaz: Kad bi dimenzija bila veća onda bi preko Gaussove eliminacije mogli konstruirati element iz $M_k(\tilde{\Gamma})$ koji bi npr. u kaspu $i\infty$ imao red poništavanja barem $\frac{k[\Gamma:\tilde{\Gamma}]}{12} + 1$ što je u kontradikciji s formulom valencija. ∎

Izračunajmo $[\Gamma : \Gamma_0(4)]$?

pažnja: $-I \in \Gamma_0(4)$

Slika mod 4 redukcije $\Gamma_0(4) \longrightarrow SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$

je podgrupa koja se sastoji od elemenata

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & * \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ - reda } 8$$

Kako je $\# SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = 48 \Rightarrow$

$$[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(4)] = 6 = [PSL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(4)/_{\pm I}]$$

jer $-I \in SL_2(\mathbb{Z}) \cap \Gamma_0(4)$

$\Rightarrow$ $\dim M_2(\Gamma_0(4)) \le 2$

Sad nam još preostaje konstruirati bazu.

Propozicija: Neka je $N>1$ prirodan broj. Vrijedi:

$$G_{2,N}(\tau)\in M_2(\Gamma_0(N))$$

Dokaz: Neka je $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$.

Vrijedi: $\begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$

$$G_2(\gamma\tau)=(Nc\tau+d)^2G_2(\tau)-2\pi i Nc(Nc\tau+d)$$

i

$\begin{pmatrix} a & Nb \\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2\mathbb{Z}$

$$G_2(N\gamma\tau)=G_2\left(\frac{a(N\tau)+Nb}{Nc\tau+d}\right)=(Nc\tau+d)^2G_2(N\tau)-2\pi i c(cN\tau+d)$$

pa vidimo da je $G_{2,N}(\tau)$ slabomodularna u odnosu na $\Gamma_0(N)$. Holomorfnost je očita pa tvrdnja slijedi.

Budući da je $\Gamma_0(2) < \Gamma_0(4)$

$\Rightarrow M_2(\Gamma_0(2)) \subset M_2(\Gamma_0(4))$

$\Rightarrow G_{2,2}(\tau), G_{2,4}(\tau) \in M_2(\Gamma_0(4))$.

Iz q-razvoja se vidi da su linearno nezavisni $\Rightarrow M_2(\Gamma_0(4)) = 2$

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{3}{\pi^2} G_{2,2}(\tau) &= 1 + 24 \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{d \mid n \\ 2 \nmid d}} d \Big) q^n \\ -\frac{1}{\pi^2} G_{2,4}(\tau) &= 1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{d \mid n \\ 4 \nmid d}} d \Big) q^n \end{aligned}}$$

Dakle, $\Theta(\tau,4) = 1 + 8q + \dots$ je linearna kombinacija $-\frac{3}{\pi^2} G_{2,2}(\tau)$ i $-\frac{1}{\pi^2} G_{2,4}(\tau)$.

Usporedbom koef. slijedi $\Theta(\tau,4) = -\frac{1}{\pi^2} G_{2,4}(\tau)$

pa $r(n,4) = 8 \sum_{d \mid n,\, 4 \nmid d} d$.