Artinov teorem reciprociteta

Setup: • I_K^S slobodna abelova grupa generirana prostim idealima (konačnim) od $\mathcal{O}_K$ koji nisu u S

• $I_K := I_K^{\emptyset}$

• $\iota : K^* \to I_K$ ulaganje dano s

$a \mapsto a\mathcal{O}_K = \prod_i \mathfrak{p}_i^{e_i} \in I_K$ valuacije

• formalni produkt prostih ideala (konačnih i beskonačnih) od $\mathcal{O}_K$ ulaganje

zovemo **modulus** ... oznaka $\mathfrak{m}$

• $x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ znači:

a) za svaki konačan prost $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}$

vrijedi $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x-1) \geq k$ gdje je $\mathfrak{p}^k \| \mathfrak{m}$

b) za svaki realan beskonačan $v \mid \mathfrak{m}$

vrijedi $x_v > 0$ ulaganje $K \hookrightarrow \mathbb{R}$

- $I_K^m := I_K^{\{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K \text{ prosti} \,:\, \mathfrak{p} \mid m\}}$ S!!

- $K^m := \iota^{-1}(I_K^m) = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathcal{O}_K \mid \text{ord}_{\mathfrak{p}} a = \text{ord}_{\mathfrak{p}} b = 0 \ \forall \mathfrak{p} \in S \right\}$

- $K_1^m := \{ x \in K^m : x \equiv 1 \pmod{m} \}$

- $P_K^m := \iota(K_1^m) \subseteq I_K^m$ ray class group

glavni → ideali čiji su generatori $\equiv 1 \pmod{m}$

i $Cl_K^m = I_K^m / P_K^m$ "lako" se vidi da je konačna

Def. Kongruencijska podgrupa je podgrupa H^m od I_K^m koja sadrži P_K^m.

Teorem (Artinov teorem reciprociteta)

Neka je L/K abelovo proširenje polja alg. brojeva. Postoji modulus m djeljiv sa svim prostim idealima od $\mathcal{O}_K$ koji se ramificiraju u L i kongruencijska podgrupa H^m t.d.

$$1 \longrightarrow H^m \longrightarrow I_K^m \xrightarrow{\left(\frac{L/K}{\cdot}\right)} \text{Gal}(L/K) \longrightarrow 1.$$

Preciznije, $H^m = P_K^m \cdot \mathrm{Norm}_{L/K}(I_L^m)$.

Tada kažemo da je L class field od K

za kongruencijsku grupu klasa I_K^m / H^m.

Definiramo ==kondukter== proširenja kao

najmanji modulus za koji to vrijedi.

==Napomena==: Prosti ideali koji dijele kondukter

f su točno oni prosti ideali od $\mathcal{O}_K$ koji

se ramificiraju u L.

neće nam trebati

==Teorem:== Za svaku kongruencijsku podgrupu

$P_K^m \leq H^m \leq I_K^m$ postoji jedinstveno

proširenje L/K t.d. je L class field

od K za kongruencijsku grupu klasa

I_K^m / H^m.

Dirichlet-Hecke L-funkcije

Označimo s $\widehat{Cl_K^m}$ grupu karaktera $\chi \in \mathrm{Hom}(Cl_K^m, \mathbb{C}^\times)$. Na χ možemo gledati kao na multiplikativnu fju. na I_K^m čija jezgra sadrži P_K^m, odnosno kao na multiplikativnu funkciju na I_K ako definiramo $\chi(\mathfrak{a})=0$ za svaki ideal $\mathfrak{a}$ koji nije relativno prost s m.

Takve $\chi : I_K \to \mathbb{C}$ zovemo **generaliziranim Dirichletovim karakterima** ili karakterima klasa ideala. Definiramo **Dirichlet-Hecke L-funkciju**

apsolutno konvergira za $\mathrm{Re}\, s > 1$ ✓ i uniformno na $\mathrm{Re}\, s \geq 1+\delta$ $\forall \delta > 0$

$$L(m,s,\chi) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K \\ \text{ideali}}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{\mathrm{Norm}(\mathfrak{a})^{-s}}$$

Imamo Eulerov produkt za $\mathrm{Re}\, s > 1$

$$L(m, s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid m} \left(1 - N_m(\mathfrak{p})^{-s} \chi(\mathfrak{p})\right)^{-1}$$

trebalo bi i definirati i faktore za $\mathfrak{p} \mid m$

ali nam to nije važno

Primjer: za $m = 1$ i $\chi = \chi_0$ trivijalni (glavni) karakter

$$L(m, s, \chi_0) = \sum_{\mathfrak{a}} \mathrm{Norm}(\mathfrak{a})^{-s} = \zeta_K(s)$$

dobivamo Dedekindovu zeta funkciju.

Za razliku od Artinovih L-funkcija, ovdje je lakše razumjeti analitičko (meromorfno) proširenje.

Neka je $\quad \zeta(s, c) = \sum_{\mathfrak{a} \in c} \mathrm{Norm}(\mathfrak{a})^{-s}.$

klasa $c \in Cl_K^m$

Tada je $L(m, s, \chi) = \sum_{c \in \mathcal{C}\ell_K^m} \chi(c) \zeta(s, c)$

odnosno dovoljno je proučiti proširenje Dirichletovih redova $\zeta(s, c)$ za $c \in \mathcal{C}\ell_K^m$.

njih je konačno

Ono što nam treba je asimptotika skupa

$S(c, n) = |\{\alpha \in c : \operatorname{Norm}(\alpha) \leq n\}|$.

Ideje iz geometrije brojeva nam daju odgovor na to pitanje:

Propozicija: $S(c, n) = \kappa_m n + O(n^{1 - \frac{1}{N}})$

gdje je $N = [K : \mathbb{Q}]$,

$$\kappa_m = \frac{2^{r+s} \operatorname{reg}(m) \pi^s}{w_m \operatorname{Norm}(m) |\Delta_K|^{1/2}}$$

regulator od m

diskriminanta od Δ_K

r, s broj realnih odnosno kompleksnih ulaganja od K

broj korijena iz 1 u $\mathcal{O}_K^\times \cap K_1^m$

Trebat će nam slijedeća elementarna lema

Lema: Ako Dirichletov red $\sum \frac{a_n}{n^s}$ konvergira za neki $s = s_0$, tada konvergira za svaki s, $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$ i u toj poluravnini konvergira uniformno na kompaktima (pa definira holomorfnu funkciju). Štoviše, ako postoje konstante $C, \sigma > 0$ t.d.

$$|a_1 + \dots + a_k| \leq C k^{\sigma} \quad \text{za svaki } k \geq 1$$

onda red konvergira za $\operatorname{Re} s > \sigma$.

Sad ćemo primijeniti zadnja dva rezultata na $\zeta(s, c)$. Definiramo Dirich. red

$$f(s) = \zeta(s, c) - K_m \zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum a_n n^{-s}.$$

Riemannova zeta fja.

Tada je $\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| = \left| S(c,k) - x_m k \right|$

Propoziciji $\longrightarrow$ $= O\left(k^{1-\frac{1}{M}}\right)$

lema

pa je f analitička na $\operatorname{Re} s > 1 - \frac{1}{M}$.

Budući da $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ ima analitičko proširenje na $\mathbb{C}$ s jednostavnim polom u $s=1$ s reziduumom 1 slijedi da $\zeta(c,s)$ ima isto takvo proširenje na $\operatorname{Re} s > 1 - \frac{1}{M}$.

Za $\chi = \chi_0$ trivijalan

$$L(m,s,\chi_0) = \sum_{c \in \mathcal{C}_m} \zeta(s,c) \quad \text{pa} \quad L(m,s,\chi_0)$$

ima analitičko proširenje na $\operatorname{Re} s > 1 - \frac{1}{M}$ s jednostavnim polom u $s=1$ s reziduumom $|\mathcal{C}_m| x_m$.

Za $\chi \neq \chi_0$ $L(m,s,\chi)$ ima analitičko proširenje na $\operatorname{Re} s > 1 - \frac{1}{M}$ ali bez pola u $s=1$ jer je suma reziduuma $\sum_{c \in \mathcal{C}_m} \chi(c)$ jednaka 0.

Posebno, $\zeta_K(s)$ ima analitičko proširenje na $\mathrm{Re}\, s > 1 - \frac{1}{n}$ s jedn. polom u $s=1$ s rezid. $|Cl_K| \varkappa_1$

Još nam je preostao jedan korak – povezati Artinove L-funkcije s Dirichlet-Hecke L-funkcijama.

Teorem: Neka je L/K abelovo proširenje polja alg. brojeva, ρ (jednodimenzionalna) ireducibilna reprezentacija od $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ i $F = L^{\ker \rho}$. Prema Artinovom teoremu

pomoć u dokaz.

reciprociteta ρ inducira karakter $\chi \in \widehat{Cl_K^m}$ za neki m. Neka je f_χ konduktor od χ

to je minimalan $n \mid m$ t.d. dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} Cl_K^m \arrow[rr, "\chi"] \arrow[dr] & & S^1 \\ & Cl_K^n \arrow[ur, "\chi'"] & \end{tikzcd}$$

karakter je primitivan ako $m = f_\chi$.

i neka je $\tilde{\chi}$ pripadan primitivni karakter.

Tada je

$$L(L/K, \rho, s) = L(f, s, \tilde{\chi}).$$

Dokaz: Detalje ćemo ostaviti čitatelju za vježbu. Ideja je usporediti Eulerove faktore na $\mathfrak{p}$'ove koji se ne ramificiraju. Ključno je primijetiti da je

$$\tilde{\chi}(\mathfrak{p}) = \rho'\left(\left[\frac{F/K}{\mathfrak{p}}\right]\right) = \rho\left(\left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]\right)$$

gdje je ρ' reprezentacija od $Gal(F/K)$ inducirana s ρ jer $\ker \rho \supseteq Gal(L/F)$...

$\blacksquare$

Završetak dokaza:

L/K je proizvoljno Galoisovo proširenje (ne nužno abelovo)

Prisjetimo se, pokazali smo da za

$$F_c(s) = \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{m \geq 1}^{\infty} \Theta(\mathfrak{p}^m)(N_m \mathfrak{p})^{-s} \quad \text{za } \operatorname{Re} s > 1$$

fiksna klasa konjugacije

gdje je
$$\Theta(\mathfrak{p}^m) = \begin{cases} 1 & \text{ako } \left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]^m = C \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

vrijedi:

$g \in C$ je fiksiran

$E = L^{\langle g \rangle}$ ciklično proširenje

$$F_c(s) = \frac{|C|}{|G|} \sum_{\chi} \bar{\chi}(g) \log L(L/E, \chi, s)$$

χ su ireducibilni karakteri od $H = \langle g \rangle$

Kada $s \to 1^+$

$$F_c(s) = \sum_{\mathfrak{p}} \Theta(\mathfrak{p})(N_m \mathfrak{p})^{-s} + O(1)$$

ovo nas zanima!

dokažite!

dok s druge strane kad $s \to 1^+$

$$F_c(s) = \frac{|C|}{|G|} \log L(L/E, \chi_0, s) + O(1)$$

Zašto? Po prethodnom teoremu

svaka od Artinovih L-fja $L(L/E, \chi, s)$

je jednaka Dirichlet-Heckeovoj L-funkciji

$$L(f_\chi, s, \tilde{\chi}) \quad \text{(pogledaj teorem za oznake).}$$

Vrijedi kao i za Dirichletove L-funkc.

Propozicija: $L(m, 1, \chi) \neq 0$ za $\chi \neq \chi_0$.

Dokaz: Neka je L/K ray class field mod m.

u našem slučaju je L/K ciklički, ovo je jača tvrdnja

Tada je

$$(*) \qquad \zeta_L(s) = \zeta_K(s) \prod_{\chi \neq \chi_0} L(f_\chi, s, \tilde{\chi})$$

dokaz: d.z.

za $\mathrm{Re}\, s > 1$.

Hint: $\zeta_L(s) = \prod_\rho L(L/K, \rho, s)$ gdje ρ ide po ireduc. rep. od $Gal(L/K)$

∘ vrijedi i za neabelova L/K ali se u eksponentu javlja dimenzija reprezentacije - ovdje je 1

$(\zeta_L(s) = L(L/K, \rho_{\text{regularna}}, s) \dots)$

Svaku od $L(f_\chi, s, \tilde{\chi})$ možemo holomorfno proširiti na okolinu od $s=1$ (to već od prije znamo za $\zeta_K(s)$ i $\zeta_L(s)$) pa $(*)$ vrijedi i na toj okolini.

to je slijedilo iz analize fje. $\zeta(c, s)$ ...

ζ_L i ζ_K imaju jednostavan pol u $s=1$ pa niti jedna od $L(f_\chi, s, \tilde{\chi})$ za $\chi \neq \chi_0$ ne može imati nultočku u $s=1$. ⊠

Dakle, za $\chi \neq \chi_0$ $\log L(L/E, \chi, s) = O(1)$ kad $s \to 1^+$

$\Rightarrow$

$$\frac{\displaystyle\sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ \left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right] = C}} (N\mathfrak{m}\mathfrak{p})^{-s}}{\log L(L/E, \chi_0, s)} \xrightarrow{s \to 1^+} \frac{|C|}{|G|}$$

Nas zanima Dirichletova gustoća

$$\lim_{s \to 1^+} \frac{\displaystyle\sum_{\left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]=c} (Nm\,\mathfrak{p})^{-s}}{\displaystyle\sum_{\mathfrak{p}} (Nm\,\mathfrak{p})^{-s}}$$ no kako je

jer $\zeta_K(s)$ ima jednostrukom pol u $s=1$

$$\sum_{\mathfrak{p} \subset O_K} (Nm\,\mathfrak{p})^{-s} \sim \underbrace{\log \zeta_K(s)}_{= \sum_{\mathfrak{p}} (Nm\,\mathfrak{p})^{-s} + O(1)} \sim -\log(s-1)$$

$$\log \zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{p}} (Nm\,\mathfrak{p})^{-s} + O(1) \text{ kad } s \to 1^+$$

i budući da $L(L/E, \chi_0, s)$

također ima jednostrukom pol u $s=1$

(tj. $\log L(L/E, \chi_0, s) \sim -\log(s-1)$ kad $s \to 1^+$)

slijedi: da je Dirichletova gustoća jednaka $\dfrac{|C|}{|G|}$.

Čebotarev teorem o gustoći slijedi.