Teorem (Čebotarev density theorem)

Neka je L/K Galoisovo proširenje polja alg. brojeva i $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Neka je $\sigma \in G$ i C_σ klasa konjugacije od σ.

$$C_\sigma = \{\alpha^{-1}\sigma\alpha : \alpha \in G\}$$

Neka je $S = \left\{ \mathfrak{p} \text{ prost ideal u } K : \left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right] = C_\sigma \right\}$.

Frobeniusi su ekvidistribuirani po klasama konjugacije

Artinovo preslikavanje: za $\mathfrak{p}$ unramified to je klasa konjugacije Frobeniusa nad $\mathfrak{p}$

Tada je $\delta(S) = \dfrac{|C_\sigma|}{|G|}$.

Dirichletova gustoća skupa S:

$$\delta(S) := \lim_{s \to 1^+} \frac{\sum_{\mathfrak{p} \in S} \mathrm{Norm}(\mathfrak{p})^{-s}}{\sum_{\mathfrak{p}} \mathrm{Norm}(\mathfrak{p})^{-s}}$$

Prirodnije je promatrati **prirodnu gustoću**

$$\delta_{nat}(S) := \lim_{n\to\infty} \frac{\pi_K(S,n)}{\pi_K(n)}$$ gdje je

$$\pi_K(S,n) := \left| \{ \mathfrak{p} \in S : Norm(\mathfrak{p}) \le n \} \right|$$

odnosno $\pi_K(n) = | \{ \mathfrak{p} : Norm(\mathfrak{p}) \le n \} |$.

Teorem vrijedi i za prirodnu gustoću! ali je onda dokaz teži

Propozicija: Ako $\delta_{nat}(S)$ postoji onda postoji i $\delta(S)$ i ta dva broja su jednaka.

Napomena: Za $K = \mathbb{Q}$ i

$S = \{ p \text{ prost} : \text{prva decimalna znamenka od } p \text{ je } 1 \}$

vrijedi $\delta(S) = \log_{10} 2$ no

$\delta_{nat}(S)$ ne postoji!

Frobenius i class field theory

Definicija! (Artinov simbol)

Neka je L/K Galoisovo proširenje polja brojeva.

Za prost $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ (unramified u L/K) i bilo koji $\mathfrak{P} \subseteq \mathcal{O}_L$ t.d. $\mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_K = \mathfrak{p}$ (kažemo da je $\mathfrak{P}$ nad $\mathfrak{p}$)

Artinov simbol $\left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right]$ je jedinstven element $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ t.d.

veliko $\mathfrak{P}$

Frobenius

$$\sigma(\alpha) \equiv \alpha^{\mathrm{Norm}(\mathfrak{p})} \pmod{\mathfrak{P}} \quad \forall \alpha \in L$$

aps. norma $= [\mathcal{O}_K : \mathfrak{p}]$

$$\begin{array}{cc} L & \mathfrak{P} \\ | & | \\ K & \mathfrak{p} \end{array} \qquad \circlearrowleft D_{\mathfrak{P}}$$

dekompozicijska grupa

$\left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right]$ = element koji se preslika u Frobenius

$$0 \to I_{\mathfrak{P}} \to D_{\mathfrak{P}} \to \mathrm{Gal}\left({}^{\mathcal{O}_L/\mathfrak{P}} / {}_{\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}} \right) \to 0$$

inercijska podgrupa je trivijalna ako je $\mathfrak{p}$ unramified.

generiran s $x \mapsto x^{\mathrm{Norm}(\mathfrak{p})}$

Frobenius

Kako su sve dekompozicijske grupe nad p konjugirane, tako su svi elementi $\left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right]$ kad variramo $\mathfrak{P}$ nad p nalaze u istoj klasi konjugacije koju označavamo s $\left[\frac{L/K}{p}\right]$. Ako je L/K abelovo onda su klase jednočlane pa i element označavamo s $\left[\frac{L/K}{p}\right]$.

Dirichletov teorem kao specijalan slučaj Čebotarevog teorema

Neka su $a, n \in \mathbb{N}$, $(a,n)=1$, $K=\mathbb{Q}$ i $L=\mathbb{Q}(\zeta_n)$. Znamo $Gal(L/\mathbb{Q}) \cong \left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times$ izomorfizam:

$$a \in \left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times \longmapsto \begin{array}{l} \text{automorfizam od } L/K \\ \zeta_n \longmapsto \zeta_n^a \end{array}$$

Neka je $p \in \mathbb{Z}$, i neka je $\mathfrak{P} \subset O_L$ nad p t.d. $\sigma(\alpha) = \alpha^{Norm(p\mathbb{Z})} = \alpha^p \pmod{\mathfrak{P}}$.

Tada $\sigma(\zeta_n^k) = \zeta_n^{pk}$ za svaki k. (zašto?!)

Ako $p \nmid n$, onda se $p\mathbb{Z}$ ne ramificira u L pa je $\left[\frac{L/K}{p\mathbb{Z}}\right] = p \bmod n \in \left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times$

Kako je $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times$ abelova, klase su jednočlane pa je (Dirichl. ili prirodna) gustoća p-ova za koje je $\left[\frac{L/K}{p\mathbb{Z}}\right] = a$ jednaka $\frac{1}{\phi(n)}$!

$\Updownarrow$ $p \equiv n \pmod a$