Artinove L-funkcije: (i malo teorije reprezentacija)

Oznake: G konačna grupa
$H < G$
$V/_{\mathbb{C}}$ vekt. prostor, $\dim V < +\infty$

$\rho : G \to GL(V)$ homomorfizam = reprezentacija
(umjesto $\rho(g)v$ pišemo gv)

$\chi_\rho : G \to \mathbb{C}^\times$, $\chi(g) = Tr(\rho(g))$

karakter pridružen repr. ρ

karakter jednoznačno određuje reprezentaciju

ireducibilnost reprezentacije, Maschkeov teorem,

regularna reprezentacija,...

svaka reprezentacija se može prikazati kao konačna direktna suma ireducibilnih.

d.z.
kako izgledaju klase konjugacije grupe S_n?

Fja. $\phi : G \to \mathbb{C}^\times$ koja je konstantna

na klasama konjugacije od G

(G djeluje na G konjugiranjem - orbite

djelovanja se zovu klase konjugacije)

se zove funkcija klase. Oznaka $Cl(G)$.

Budući da je $\mathrm{Tr}(\rho(g^{-1}hg)) = \mathrm{Tr}(\rho(g)^{-1}\rho(h)\rho(g))$

$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \Longrightarrow$

$$= \mathrm{Tr}(\rho(h)\rho(g)\rho(g)^{-1})$$

$$= \mathrm{Tr}(\rho(h))$$

slijedi da su karakteri funkcije klase.

Skalarni produkt (Hermitsko sparivanje) na $C\ell(G)$:

$$(\phi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) \overline{\psi(g)}.$$

Teorem: Karakteri ireducibilnih reprezentacija čine ortonormirana baza za $C\ell(G)$.

relacije ortogonalnosti

Karakteri reprezentacija će nam biti zamjena za Dirichletove karaktere u slučaju kada $Gal(L/K)$ nije abelova.

Definicija: Neka je L/K Galoisovo proširenje polja alg. brojeva i ρ reprezentacija od $G = Gal(L/K)$. Artinova L-fja. je

$$L(L/K, \rho, s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{P_{\mathfrak{P}}(Nm(\mathfrak{p})^{-s})}$$

budući da je ρ jednoznačno određena svojim karakterom nekad ćemo pisati $L(L/K, \chi_\rho, s)$

aps. norma $= [\mathcal{O}_K : \mathfrak{p}]$

gdje produkt ide po svih prostim $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ i $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ je prost ideal $\subset \mathcal{O}_L$ iznad $\mathfrak{p}$.

bilo koji.

- za $\mathfrak{p}$ unramified $P_{\mathfrak{P}}(t) = \det\left[I - t\rho(Frob_{\mathfrak{P}})\right]$

karakteristični polinom Frobeniusa $\rho(Frob\, \mathfrak{P})$

- ako se $\mathfrak{p}$ ramificira definicija je malo kompliciranija

definiramo: $W_{\mathfrak{P}} = V^{I_{\mathfrak{P}}}$ je repr. od

$$\phi_{\mathfrak{p}} \in D_{\mathfrak{p}} / I_{\mathfrak{p}} \cong Gal(\ell_{\mathfrak{P}} / k_{\mathfrak{p}})$$

generat.

U tom slučaju $P_p(t) = \det(1 - t\bar{\rho}(\phi_p))$.

Veza s Dirichletovom L-funkcijom:

Neka je $L = \mathbb{Q}(\zeta_m)$, $K = \mathbb{Q}$ i

$$\chi : \underset{\substack{\parallel \\ G}}{\mathrm{Gal}(L/K)} \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times} \to \mathbb{C}^{\times} \quad \underset{\substack{\parallel \\ \text{1-dim reprezentacija}}}{\text{karakter}}$$

Tada je $P_p(t) = 1 - \chi(p)\, t$ (jer $p \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}$ $\overset{\sim}{\to}$ odgovara Frobenius $\mathrm{Frob}_p \in \mathrm{Gal}(L/K)$)

$$\Rightarrow L(\chi, s) = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p) p^{-s}}$$

Što je s konvergencijom?

Propozicija: $L(L/K, \rho, s)$ konvergira apsolutno i uniformno za $\mathrm{Re}\, s \geq 1 + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow L(L/K, \rho, s)$ definira holomorf. fju. na $\mathrm{Re}\, s > 1$.

Što je s analitičkim proširenjima?

Artinova slutnja: $L(L/K, \rho, s)$ za ne-trivijalnu ireducibilnu repr. ρ ima analitičko proširenje do cijelog $\mathbb{C}$.

ovo će nam biti važno.

dokazana je za:

a) jednodimenzionalne reprezentacije

b) dvodim. u nekim slučajevima

- Brauerov teorem (o induciranim karakterima) implicira da su sve Artinove L-funkcije produkti odnosno kvocijenti Hecke-ovih L-funkcija (to su Artinove L-funkcije pridružene 1dim reprezentacijama) pa su zato meromorfne na $\mathbb{C}$.

Logaritam i logaritamska derivacija

Artinovih L-funkcija

Neka je ϕ karakter pridružen reprezentaciji ρ (tj. $\phi = \mathrm{Tr}(\rho)$). Tada

$$\bullet\ \log L(L/K, \phi, s) = \sum_{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi_K(\mathfrak{p}^m)}{m} (N\mathfrak{p})^{-ms}$$

$$\| \quad L(L/K, \rho, s)$$

malo je log problematičan. što to znači?

$$\bullet\ -\frac{L'}{L}(L/K, \phi, s) = \sum_{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_K(\mathfrak{p}^m) \log(N\mathfrak{p}) (N\mathfrak{p})^{-ms}$$

bolji, ali zahtjevniji, je raditi s logaritamskom derivacijom.

gdje je $\phi_K(\mathfrak{p}^m) := \frac{1}{I_\mathfrak{p}} \sum_{\alpha \in I_\mathfrak{P}} \phi\left(\left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right]^m \alpha\right)$

nije toliko bitno

Za $\mathfrak{p}$ koji se ne ramificira u L/K

$$\phi_K(\mathfrak{p}^m) = \phi\left(\left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]^m\right) = \text{trag Frobeniusa} \ldots$$

ovo je bitno!

Od kuda te formule? Pretp. da je p unram.

Tada je

$$-\log\left(\det\left(I-(Nm\,p)^{-s}\rho\left(\left[\tfrac{L/K}{p}\right]\right)\right)\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\phi(p^m)}{(Nm\,p)^{ms}}\,.$$ Zašto?

$$\log\det(I-f)=\operatorname{tr}\log(I-f)$$

$$=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tr} f^k}{k}$$

slijedi iz: $\det A=\exp(\operatorname{tr}(\log A))$ $B=\log A$

odnosno iz $\det(\exp(B))=\exp(\operatorname{Tr}(B))$

(gdje su A i B operatori)

- ako se B može dijagonalizirati onda tvrdnja očito vrijedi
- takve matrice su "guste" pa tvrdnja vrijedi zbog neprekidnosti od det, exp i Tr,

U analogiji s dokazom Dirichletovog teorema zanima nas

$$\sum_{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K} \frac{\phi_K(\mathfrak{p})}{(N\mathfrak{m}\mathfrak{p})^s} \quad \text{kad } s \to 1 .$$

$$\left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right] = C$$

Tu sumu želim prikazati kao linearnu kombinaciju $\log L(L/K, \phi, s)$ (odnosno $L(L/K, \rho, s)$) gdje ϕ ide po karakterima ireducibilnih reprezent.

Fiksirajmo klasu konjugacije C i neki $g \in C$.

Definirajmo $f_C : G \to \mathbb{C}$

$$f_C(x) = \sum_{\phi} \bar{\phi}(g)\, \phi$$

suma po svim ired. karakterima.

Iz relacija ortogonalnosti karaktera slijedi:

$$f_C(\tau) = \begin{cases} \frac{|G|}{|C|} & \text{ako je } \tau \in C \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

zašto? d.z. hint: ako su retci matrice ortonormirani onda isto vrijedi i za stupce.

Tada

slično (bolje?) ako zamijenim $\log L$

$\Downarrow \quad s \quad -\frac{L'}{L} \ldots$

$$F_C(s) = -\frac{|C|}{|G|} \sum_{\phi} \bar{\phi}(g) \log L(L/K, \phi, s)$$

za $\operatorname{Re} s > 1$ ima Dirichletov red

$$F_C(s) = \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{m=1}^{\infty} \theta(\mathfrak{p}^m)(N_m \mathfrak{p})^{-ms}$$

gdje je $\theta(\mathfrak{p}^m) = \begin{cases} 1 & \text{ako } \left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]^m = C \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$.

Pokazat ćemo da je $\sum_{\mathfrak{p}} \theta(\mathfrak{p})(N_m \mathfrak{p})^{-s}$

glavni član sume što nam je i bio cilj.

Problem! Kao što smo spomenuli kod Artinove slutnje, Artinove L-funkcije $L(L/K, \phi, s)$ za općenite ireducibilne karaktere nemaju (odnosno ne znamo dokazati da imaju) dobra analitička svojstva. Srećom, problem ćemo riješiti redukcijom na abelov slučaj.

Trebat će nam pojam inducirane reprezentacije, odnosno induciranog karaktera.

Inducirane reprezentacije i njihovi karakteri

Neka je G konačna grupa i $H < G$.

Neka je (π, V) reprezentacija od H i neka su $g_1, \dots, g_n$ reprezentanti lijevih koseta G/H gdje je $n = [G:H]$. Tada inducirana reprezentacija $\mathrm{Ind}_H^G \pi$

ovo će biti repr. od G

najlakše možemo opisati kao

$$W = \bigoplus_{i=1}^{n} g_i V$$

gdje je $g_i V$ vektorski prostor izom. s V čiji elemente formalno zapisujemo kao $g_i v$ za $v \in V$. Element $g \in G$ djeluje na $g_i V$ na sljedeći način:

$$g g_i = g_j h \text{ za neki } g_j \text{ i } h \in H.$$

Tada $g(g_i v) := g_j (h v)$ gdje je

$$h v = \pi(h) v.$$

djelovanje od H preko π

Što je s karakterom induciranom reprezentacijom?

Frobeniusova formula: Ako je χ karakter reprezentacije π onda je ψ karakter od $\mathrm{Ind}_H^G \pi$ dan s

$$\psi(g) = \sum_{g_i \in G/H} \hat{\chi}(g_i^{-1} g g_i) \quad \text{gdje je}$$

$$\hat{\chi}(k) = \begin{cases} \chi(k) & \text{ako je } k \in H \\ 0 & \text{inače} \end{cases}.$$

Pišemo još $\psi = \mathrm{Ind}_H^G \chi$.

Redukcija na jednodimenzionalne karaktere

Za klasu C i $g \in C$ definiramo podgrupu $H = \langle \sigma \rangle < G$. Neka je $E = L^H$. Sa χ ćemo označavati ireducibilne karaktere od H (kako je H ciklička, oni su jednodimenzionalni).

Propozicija:

$$F_C(s) = -\frac{|C|}{|G|} \sum_{\chi} \bar{\chi}(g) \log L(L/E, \chi, s)$$

sumiramo po svim ired. karakt. od H

Dokaz: Neka je $\tau : H \to \mathbb{C}$ funkcija klase (na H) definiramo s

$$\tau(h) = \begin{cases} |H| & \text{za } h = g \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

klase konjugacije abelove grupe su jednočlane

Kao i ranije imamo

$$\tau = \sum_{\chi} \bar{\chi}(g) \chi .$$

Izračunajmo $\mathrm{Ind}_H^G \tau$.

Prema Frobeniusovoj formuli (koja vrijedi općenito i za funkcije klase jer su one linearne kombinacije ireducibilnih karaktera)

$$\mathrm{Ind}_H^G \tau(\alpha) = \sum_{g_i \in G/H} \hat{\tau}(g_i^{-1} \alpha g_i), \quad \forall \alpha \in G$$

gdje je $\hat{\tau}(\beta) = \begin{cases} |H| & \text{ako je } \beta = g \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$.

Očito, ako $\alpha \notin C$ onda $\mathrm{Ind}_H^G(\alpha) = 0$.

Ako je $\alpha \in C$, onda postoji $\tilde{g} \in G$ t.d. $\tilde{g}^{-1} \alpha \tilde{g} = g$. Takav $\tilde{g}$ je jednoznačno određen do na centralizator od g u G, oznaka $C_G(g)$, tj. $\forall g' \in \tilde{g}\, C_G(g)$ vrijedi $g'^{-1} \alpha g' = g$. Jasno, $H < C_G(g)$, pa je broj koseta g_i za koje je $g_i^{-1} \alpha g_i = g$ jednak $[C_G(g) : H]$

pa je $\mathrm{Ind}_H^G \tau(\alpha) = |H| \cdot \dfrac{|C_G(g)|}{|H|} = |C_G(g)|$, Kako je $|C_G(g)| \cdot |C| = |G|$

slijedi da je $\mathrm{Ind}_H^G \tau = f_C$. Posebno

$$\mathrm{Ind}_H^G \Big(\underbrace{\sum_\chi \bar{\chi}(g) \chi}_{\tau} \Big) = \sum_\phi \bar{\phi}(g) \phi$$

$$\| $$

$$\sum_\chi \bar{\chi}(g) \, \mathrm{Ind}_H^G \chi$$

tako da za

Re $s > 1$ imamo

$$F_C(s) = -\frac{|C|}{|G|} \sum_\chi \bar{\chi}(g) \log L(L/K, \mathrm{Ind}_H^G \chi, s)$$

Lema: $L(L/K, \mathrm{Ind}_H^G \chi, s) = L(L/E, \chi, s)$

pa tvrdnja propozicije slijedi.

zašto ovo vrijedi?

Dokaz leme i faktorizacija Dedekindove zeta funkcije kao Artinova originalna motivacija

Sjetimo se, u dokazu Dirichletovog teorema nam je bila važna faktorizacija

$$\zeta_L(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) \cdot \prod_{\chi \neq \chi_0} L(\chi, s)$$

gdje je $L = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ i produkt ide po svim Dirichletovim karakterima od $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Artinova prvotna motivacija za uvođenje Artinovih L-fja. je bila želja za generalizacijom te faktorizacije na proizvoljna Galoisova proširenja L/K.

Teorem (Artin) (implicira Lemu)

Neka su $L \supset M \supset K$ polja alg. brojeva

i $G = Gal(L/K)$, $H = Gal(L/M)$; $H < G$.

Tada za svaku fju. klasa na H, χ,

vrijedi
$$L(L/M, \chi, s) = L(L/_K, \operatorname{Ind}_H^G \chi, s).$$

Dokaz: Dovoljno je dokazati tvrdnju za karaktere

(zašto?).

karakteri ($\chi_1 + \chi_2$ je karakter repr. $\pi_1 \oplus \pi_2$)

vrijedi: $L(L/K, \chi_1 + \chi_2, s) = L(L/K, \chi_1, s) \cdot L(L/K, \chi_2, s)$

Ovo je zapravo definicija od $L(L/M, \chi, s)$ za

proizvoljnu funkciju klasa $\chi = \sum a_i \chi_i$; $a_i \in \mathbb{C}$

Naime, $L(L/K, \chi, s) := \prod L(L/K, \chi_i, s)^{a_i}$

Zanimljivo jedino ako su $a_i \in \mathbb{Z}$.

Neka je W reprezentacija od H s karakterom χ.

Dokazat ćemo da se Eulerovi faktori L-funkcij

$\begin{array}{c} L \\ | \\ M \\ | \\ K \end{array}$

podudaraju na prostim idealima $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ koji se ne ramificiraju u L. Neka je $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_g$ faktorizacija u M.

Za svaki i neka je $\mathfrak{P}_i \subset \mathcal{O}_L$ prost ideal nad $\mathfrak{q}_i$. Neka je G_i dekompozicijska podgrupa od $\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p}$ (tj. $G_i < \mathrm{Gal}(L/K)$ ...)

Neka je $\varphi \in G_1$ Frobenius (od $\mathfrak{P}_1/\mathfrak{p}$).

Tada po definiciji   dakle problem se svodi na analizu karakt. polinoma Frobeniusa

$$L_\mathfrak{p}(L/K, \mathrm{Ind}_H^G W, s) = \det\left(1 - \varphi N\mathfrak{p}^{-s} ; \mathrm{Ind}_H^G W\right)^{-1}$$

malo smo neprecizni: $\varphi \in G$ identificiramo s autom. na vekt. prostoru

Uočimo

$$\det(1-\varphi t ; \mathrm{Ind}_H^G W) = \det(1-\varphi t ; \mathrm{Res}^G_{G_1} \mathrm{Ind}_H^G W)$$

restrikcija reprezentacije

jer je $\varphi \in G_1$.

Trebat će nam poznati teorem:

Teorem (Mackey's Theorem) Neka je G grupa i H, K njene podgrupe. Neka je W rep. od H. Neka je $H^s = sHs^{-1}$. Tada možemo prirodno definirati reprezentaciju sW od H^s (tj. $(shs^{-1}) \cdot sw = s(h \cdot w)$)

elemente ovog vekt. prostora identificiramo s $s \cdot w$ za sve $w \in W$

djelovanje od H na W

očito su reprezentacije $W \circlearrowleft H$ i $sW \circlearrowleft H^s$ ekvivalentne uz identifik. $W \leftrightarrow sW$ $(w \mapsto sw)$

Vrijedi:

$$\mathrm{Res}^G_K \mathrm{Ind}^G_H W = \bigoplus_{s \in K \backslash G / H} \mathrm{Ind}^K_{H^s \cap K} \mathrm{Res}^{H^s}_{H^s \cap K} sW$$

Dokaz: Po definiciji $V := \mathrm{Ind}_H^G W$ je

direktna suma $\displaystyle\bigoplus_{s \in G/H} sW$. Neka je

$x \in K \backslash G / H$ i neka je $V(x)$ potprostor od V

generiran s sW za sve $s \in KxH$.

Tada je V direktna suma $V(x)$-ova

i po definiciji $V(x)$ je invarijantan na K.

Preostaje još dokazati da je $V(x)$ K-izomorfan

s $\mathrm{Ind}_{H^x \cap K}^{K} \left(\mathrm{Res}_{H^x \cap K}^{H^x} xW \right)$.

$$\cong$$

$$\bigoplus_{s \in K / H^x \cap K} s(xW)$$

Kada je

$k_1 x W = k_2 x W$ gdje su $k_1, k_2 \in K$?

Onda kada je $k_1 \in k_2 H^x \cap K$ jer

$H^x (xW) = xW \Rightarrow$ tvrdnja slijedi.

∎

Natrag na dokaz Artinovog teorema:

karakt. polinom — Frobenius $\pi(\varphi)$

$$\det\left(1-\varphi t \,;\, \operatorname{Res}^G_{G_1} \operatorname{Ind}^G_H W\right)$$

dekomp. podgrupa

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ M \\ | \\ K \end{array} \qquad \begin{array}{l} G = Gal(L/K) \\ H = Gal(L/M) \\ W \text{ rep. od } H \end{array}$$

Za Mackeyjev teorem nam treba opis skupa $G_1 \backslash G / H$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_L & & \mathfrak{P}_1 \;\dots\; \\ | & & \diagdown \; | \; \diagup \\ \mathcal{O}_K & & \mathfrak{p} \end{array}$$

G djeluje tranzitivno na na $\mathfrak{P}_i$-ovima, G_1 stabilizira $\mathfrak{P}_1$ $\Rightarrow$ $G_1 \backslash G$ je u bijekciji s $\mathfrak{P}_i$-ovima, preciznije

$$g \in G_1 \backslash G \longleftrightarrow g^{-1}\mathfrak{P}_1$$

djelovanje zdesna

S druge strane H djeluje (tranzitivno) na $\mathfrak{q}_i$-ovima (ideali nad $\mathfrak{p}$ u $\mathcal{O}_M$) pa

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_M & & \mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_g \\ | & & \diagdown \; \diagup \\ \mathcal{O}_K & & \mathfrak{p} \end{array}$$

dva elementa $g_1, g_2 \in G_1 \backslash G$ identificiramo u $G_1 \backslash G / H$ ako preslikaju $\mathfrak{q}_1$ u isti ideal.

Preciznije, ako odaberemo $\tau_i \in G$ t.d. $\tau_i^{-1} q_1 = q_i$, onda je $\{\tau_i\}_{i=1,\dots,g}$ skup reprezentanata $G_1 \backslash G / H$.

(Ideale $\mathfrak{P}_i$ možemo odabrati tako da je $\tau_i^{-1} \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_i$..)

Vrijedi:

$$L_{\mathfrak{p}}(L/K, \mathrm{Ind}_H^G W, s) = \det\Big(1 - \varphi N\mathfrak{p}^{-s}; \bigoplus_{i=1}^{g} \mathrm{Ind}_{G_1 \cap \tau_i H \tau_i^{-1}}^{G_1} \tau_i W\Big)^{-1}$$

$$= \prod_{i=1}^{g} \det\Big(1 - \varphi N\mathfrak{p}^{-s}; \mathrm{Ind}_{G_1 \cap \tau_i H \tau_i^{-1}}^{G_1} \tau_i W\Big)^{-1}$$

Konjugiranjem svake zagrade s τ_i^{-1} (karakteristični polinom se ne mijenja) dobivamo

$$L_{\mathfrak{p}}(L/K, \mathrm{Ind}_H^G W, s) = \prod_{i=1}^{g} \det\Big(1 - \tau_i^{-1} \varphi \tau_i N\mathfrak{p}^{-s}; \mathrm{Ind}_{\tau_i^{-1} G_1 \tau_i \cap H}^{\tau_i^{-1} G_1 \tau_i} W\Big)^{-1}$$

$$= \prod_{i=1}^{g} \det\left(1 - \varphi_i N p^{-s} ; \operatorname{Ind}_{H_i}^{G_i} W\right)^{-1}$$

Frob. u G_i

$H_i = G_i \cap H$ = dekomp. grupa od q_i

Promotrimo sada lokalni faktor od

$$L_{q_i}(L/M, W, s) = \det\left(1 - \varphi_i^{f_i} N p^{-s f_i}, W\right)^{-1}.$$

f_i je inercijski stupanj od q_i

Dovoljno je dokazati da je jednak

$$\det\left(1 - \varphi_i N p^{-s} ; \operatorname{Ind}_{H_i}^{G_i} W\right)^{-1}.$$

Zašto? a) $N q_i = N p^{f_i}$ (def. inercij. stupnja)

b) $\varphi_i^{f_i}$ je Frobenius "od" q_i

tj. $\varphi_i \in G_i \Rightarrow \varphi_i^{f_i} \in H_i$.

Tražena jednakost je specijalan slučaj teorema (koji dokazujemo) za proširenje $L^{G_i} \subseteq L^{H_i} \subseteq L$ (sve što smo do sada napravili se može shvatiti kao redukcija na ovaj slučaj).

Ovaj specijalan slučaj ćemo sada "na prste" dokazati:

Neka je $\mathfrak{P}_i$ prost ideal u L^{G_i}

$\Rightarrow$ tada je on (potpuno) inertan u proširenju L/L^{G_i}

pa Frobenius φ_i generira cijelu Galoisovu grupu G_i (tada je $\varphi_i^{f_i}$ generator od H_i).

Odaberemo bazu za W i neka je

A matrica za od $\varphi_i^{f_i}$ u toj bazi

(odnosno preciznije A je matrica operatora kojim $\varphi_i^{f_i}$ djeluje na toj bazi).

Vrijedi $\mathrm{Ind}_{H_i}^{G_i} W = W \oplus \varphi_i W \oplus \dots \oplus \varphi_i^{f_i - 1} W$

pa u očitoj bazi blok matrica operatora φ_i

izgleda ovako:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ A & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

φ_i "djeluje" na $\varphi_i^{f_i-1} W$ "kao što" $\varphi_i^{f_i}$ djeluje na W!

pa ako s $p_i(t) = \det(I - \varphi_i \cdot t)$

označimo njen karakt. polinom

determ. izračunamo tako da $i+n$-ti stupac pomnožim s t i oduzmem od i-tog

dobijem

$p_i(N_p^{-s}) =$

$$\det(I - t \cdot A)\,(N_p^{-f_i s})$$

$$\| $$

$$\det(I - \varphi_i^{f_i} N_p^{-s f_i}; W)$$