ODABRANE TEME IZ ARITMETIČKE GEOMETRIJE: ČETVRTA ZADAĆA

1. Grupa klasa kao Tate-Shafarevicheva grupa

Neka je K polje algebarskih brojeva, $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ prsten cijelih u $\overline{K}$, za $v \in M_K$ neka je $\mathcal{O}_{\overline{K_v}}$ valuacijski prsten u $\overline{K_v}$. Neka je M_K skup konačnih mjesta (prostih ideala). Definirajmo Tate-Shafarevich groupu polja K

$$Sha(K) := \cap_{v \in M_K} Ker(H^1(K, \mathcal{O}_{\overline{K}}^\times) \to H^1(K_v, \mathcal{O}_{\overline{K_v}}^\times)).$$

Označimo s $Cl(K)$ grupu klasa od K. Označimo s $Pic(K) = Div(K)/Princ(K)$ Picardovu grupu polja K. Ovdje $Div(K)$ definiramo kao slobodnu abelovu grupu generiranu valuacijama $v \in M_K$. Divizor broja $x \in K$ (odnosno glavnog ideala (x)) je $\sum_v v(x)(v)$. Picardovu grupu definiramo kao grupu divizora modulo divizora glavnih ideala.

1. Pokažite da je $Cl(K) = Pic(K)$.
2. Pokažite da je dolje definirano preslikavanje $\Phi : Cl(K) \to Sha(K)$ dobro definirani homomorfizam. Za ideal I od $\mathcal{O}_K$, ideal $I\mathcal{O}_H$ je glavni gdje je H Hilbertovo polje od K. Postoji $x \in H^\times$ takav da je $I\mathcal{O}_H = x\mathcal{O}_H$. Definirajmo $\Phi(I)$ kao klasu pridruženu kociklusu $\sigma \mapsto \sigma(x)/x$.
3. Pokav zite da za svaki $f \in Sha(K)$ postoji konačno Galoisovo proširenje L/K i $x \in L^\times$ takav da je $f(\sigma) = \sigma(x)/x$ i $(x) = (x^\sigma)$ kao ideali u $\mathcal{O}_L$.
4. Pokažite da je dolje definirano preslikavanje $\Psi : Sha(K) \to Pic(K) \otimes \mathbb{Q}$ dobro definirani homomorfizam.

   Neka je $f \in Sha(K)$. Tada postoji (zbog 3.) konačno Galoisovo proširenje L/K i $x \in L^\times$ takvo da je $f(\sigma) = \sigma(x)/x$. Za svaki $v \in M_K$ za koji je $v(x) > 0$ za $w|v$ (razmišljajte u terminima ideala) su svi brojevi $w(x)$ jednaki nekom broju m_v (zašto?). Definirajmo $\psi(f) := \sum_v \frac{m_v}{e_{w/v}}(v)$, gdje je $e_{w,v}$ ramifikacijski indeks proširenja L_w/K_v.
5. Dokažite da se slika preslikavanja Ψ nalazi u $Pic(K) = Cl(K)$.
6. Dokažite da su Φ i Ψ međusobno inverzni, tj. da je $Cl(K) \cong Sha(K)$.