ODABRANE TEME IZ ARITMETIČKE GEOMETRIJE: TREĆA ZADAĆA

1. Galoisova kohomologija i algebarska teorija brojeva

1. Neka je L/K konačno Galoisovo proširenje. Dokažite da je $H^1(G_{L/K}, L^\times) = 1$. Pokažite da je u slučaju kada je L/K cikličko proširenje ovaj teorem ekvivalentan Hilbertovom teoremu 90 iz algebarske teorije brojeva koji kaže da za $\alpha \in L$, $N_{L/K}(\alpha) = 1$, postoji $\beta \in L$ takav da je $\alpha = \beta/\beta^\sigma$, gdje je $\sigma \in G_{L/K}$ generator Galoisove grupe. Uvjerite se da u sličaju $K = \mathbb{Q}$ i $L = \mathbb{Q}(i)$ teorem daje parametrizaciju jedinične kružnice. Jel se dobije nešto zanimljivo (u tom smjeru) za kubična proširenja?
2. Neka je L/K cikličko proširenje stupnja n, $(n, char K) = 1$ i neka K sadrži sve n-te korijene iz jedinice. Dokažite da postoji $\alpha \in K$ takav da je $L = K(\sqrt[n]{\alpha})$. Koristite prethodni zadatak.
3. Neka je L/K proširenje polja i neka je m prirodan broj. Dokažite da je $L^\times / L^{\times m} \cong H^1(G_L, \mu_m(\overline{K}))$, gdje μ_m označava grupu m-tih korijena iz jedinice. Kako izgleda izomorfizam? Uočite analogiju s eliptičkim krivuljama (μ_m je torzija preslikavanja $x \mapsto x^m, \ldots$)!