Teorem 6.10. (Integralni Cauchyjev kriterij)

Neka je $f : [1, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ neprekidna i padajuća fja. na $[1, +\infty\rangle$.

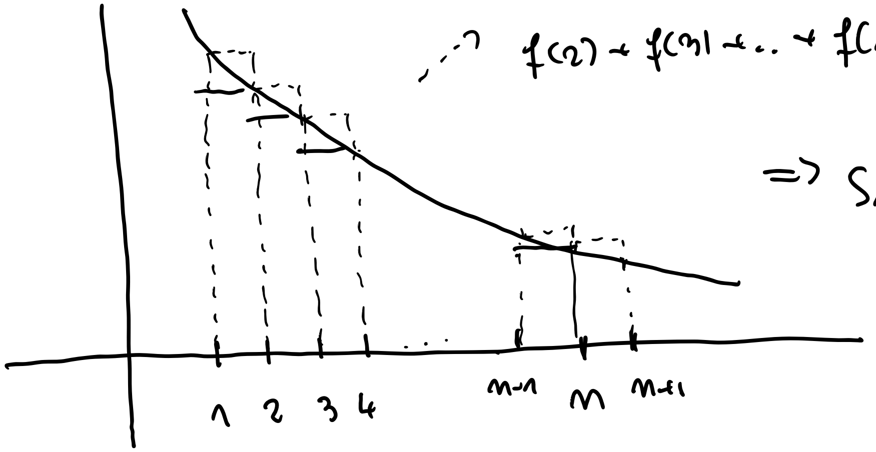
1. Red $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergira ako i samo ako integral

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ konvergira.}$$

2. Ako red konvergira onda vrijedi

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

Dokaz:



površine "malih" pravokutnika:

$f(2) + f(3) + \dots + f(n) = S_n - f(1)$

$\Rightarrow S_n - f(1) \le \int_1^n f(x)\,dx$

površina "velikih" pravokutnika:

$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$

$$(*) \quad \boxed{\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le \overbrace{S_n}^{f(1)+f(2)+\dots+f(n)}} \le f(1) + \int_1^n f(x)\,dx$$

1\. $\Rightarrow$ $\sum f(n)$ konvergira $\Leftrightarrow$ $(S_n)_n$ je konvergentan.

$\int_1^N f(x)\,dx \le S_{N-1}$ niz je ograničen

$\Rightarrow \int_1^N f(x)\,dx$ ograničen ✓

Želimo dokazati da je $\lim_{M\to+\infty} \int_1^M f(x)\,dx$ postoji.

Budući da je $f(x)$ pozitivna, dovoljno je pokazati da je niz $\int_1^N f(x)\,dx$ za $N \in \mathbb{N}$ ograničen (d.z.).

$\Leftarrow$ pretp. $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergira $\Rightarrow$ niz $\int_1^{N} f(x)\,dx$ konvergira pa je i ograničen

Vrijedi $\quad S_{N-n} \le f(n) + \int_1^{N} f(x)\,dx$. Želimo dokazati da je $(S_n)_n$ konvergentan.

Znamo da je S_n rastući, pa je dovoljno dokazati da je ograničen.

Slijedi iz . Ako sa M označimo neku gornju među niza $\int_1^{N} f(x)\,dx$,

onda vrijedi $\quad S_{N-n} \le f(n) + M \quad \checkmark$.

2. $$\int_1^{m+1} f(x)\,dx \le S_m \le f(n) + \int_1^{m} f(x)\,dx \quad / \, m \to \infty$$

$$\Downarrow$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \le \underbrace{S}_{=\sum_{m=1}^{\infty} f(m)} \le f(n) + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \checkmark .$$

Primjer 6.14. Fja. $f(x)=\frac{1}{x^p}$ je neprekidna i padajuća na $[1,+\infty\rangle$.

Po Teoremu 5.17. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$ konvergira za $p>1$ i divergira za $p\leq 1$.

Tada i red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ konvergira za $p>1$ i divergira za $p\leq 1$.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ je konvergentan.

Primjer 6.15. Ispitaj konvergenciju reda

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$ za $p>1$. Fja. $f:[2,+\infty\rangle\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x\ln^p x}$

je neprekidna i padajuća. Vrijedi

$$F(x)=\int_2^x\frac{dt}{t\ln^p t}=\left|\begin{array}{l} y=\ln t\\ dy=\frac{dt}{t}\end{array}\right|=\int_{\ln 2}^{\ln x}\frac{dy}{y^p}=-\frac{1}{p-1}y^{1-p}\Big|_{\ln 2}^{\ln x}$$

$$F(x) = -\frac{1}{p-1}\,\frac{1}{\ln^{p-1} x} + \frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{\ln^{p-1} 2} \quad \text{pa je}$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{\ln^{p-1} 2}.$$ Dakle, red $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{p} n}$ konvergira

za $p>1$.

Primjer:

$$\sum_{n=1}^{m}\ln n \qquad f(x)=\ln x$$

$$\Downarrow$$

$$\int_1^m \ln t\,dt \le \sum_{n=1}^{m}\ln n \le \int_1^{m+1}\ln t\,dt$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \|$$

$$\ln(m+1)(m+1)-(m+1)$$

$$\|$$

$$\boxed{m(\ln m-1) \le \sum_{n=1}^{m}\ln n \le (m+1)(\ln(m+1)-1)}$$