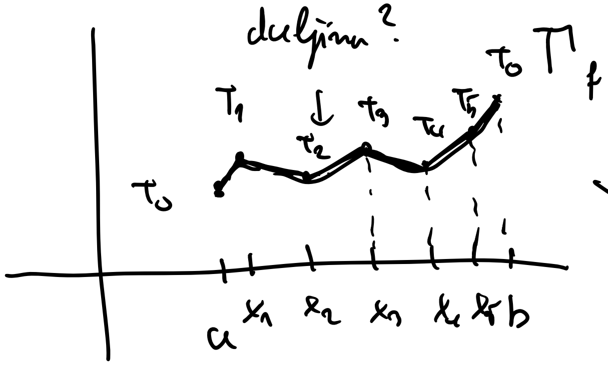
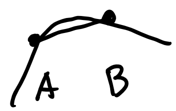
5.7. Duljina ravninske krivulje



prelj. da je f dif. na $[a,b]$.

Računa duljina krivulje grafa fje. f na segmentu $[a,b]$.

Neka je $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ subdivizija tog segmenta. Označimo sa $T_k=(x_k, f(x_k))$ za $k=0,\dots,n$ pripadne točke na grafu.



$|AB| \leq$ duljine krivulje.

Duljina krivulje između točaka T_{k-1} i T_k aproksimiramo s

$$L_k = d(T_{k-1},T_k) = \sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2}$$

$$= (x_k-x_{k-1})\sqrt{1+\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\right)^2}$$

Iz Lagrangeovog tm. slijedi:

$$\exists\, t_k\in[x_{k-1},x_k] \text{ t.d. } \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} = f'(t_k) \text{ za } k=1,\dots,n.$$

Budući da je udaljenost $L_k = d(T_{k-1}, T_k)$ manja ili jednaka duljini krivulje između te dvije točke, slijedi da je

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}\,(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+(f'(t_k))^2}\,(x_k - x_{k-1}) \leq L_n \leadsto \text{duljina krivulje graf. fje.}$$

integralna suma za funk. $g(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$, $\forall x \in [a,b]$.

<u>Def.</u> Duljinu krivulje definiramo kao donji Riemannov integral fje. g.

Ako je $g(x)$ integrabilna, onda je

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$\blacksquare$

6. Redovi

6.1. Definicija reda

<u>Def. 6.1.</u> Neka je $(a_n)_n$ niz realnih brojeva.

Nizu $(a_n)_n$ pridružujemo niz (s_n) def. s:

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$\vdots$

Red je uređeni par $((a_n)_n, (s_n)_n)$ nizova $(a_n)_n$ i $(s_n)_n$. Element a_n zovemo n-ti član reda, a s_n je n-ta <u>parcijalna suma</u> reda. Oznake za red su

$\sum a_n$, $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ili $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$.

6.2. Definicija konvergencije reda

Def. 6.2. Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da je <u>konvergentan</u>, ako je niz $(s_n)_n$ parcijalnih suma reda konvergentan. Limes tog niza zovemo sumom reda i označavamo s

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Red je divergentan ako je niz (s_n) divergentan.

Za niz kompleksnih brojeva $(a_n)_n = (\alpha_n + \beta_n i)_n$ možemo promotriti tri reda; $\sum a_n$, $\sum \alpha_n$ i $\sum \beta_n$ s parc. sumama $s_n = a_1 + \dots + a_n$, $\sigma_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ i $\tau_n = \beta_1 + \dots + \beta_n$. Budući da je $s_n = \sigma_n + i\tau_n$ niz $(s_n)_n$ je konvergentan ako i samo ako konvergiraju nizovi $(\sigma_n)_n$ i $(\tau_n)_n$.

Tada vrijedi $\lim S_n = \lim \sigma_n + i \lim \tau_n$ odnosno

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n .$$

Primjer 6.4. Pokažimo da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira i nađimo njegovu sumu. Uočimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, pa imamo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim S_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 .$$

Teorem 6.1. Nužan uvjet konvergencije reda

Ako red $\sum a_n$ konvergira, onda niz $(a_n)_n$ konvergira k nuli.

$$\sum a_n \text{ konverg.} \Rightarrow \lim a_n = 0.$$

Dokaz: Ako niz $(S_n)_n$ konvergira k S onda vrijedi

$$\lim a_n = \lim (S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0 \quad \blacksquare.$$

Primjer 6.5. Harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$ divergira k $+\infty$.

Uočimo da je niz $(S_n)_n$ strogo rastući, pa je dovoljno pokazati da je neograničen. Dokazat ćemo indukcijom da vrijedi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2} n.$$

Za $n=1$; $S_2 = 1+\frac{1}{2} \geq 1+\frac{1}{2}$ ✓. Vrijedi

$$S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n} > S_{2^n} + \frac{1}{2^n+2^n} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n}$$

$$= S_{2^n} + 2^n \cdot \frac{1}{2 \cdot 2^{n+1}} = S_{2^n} + \frac{1}{2} \geq 1+\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} = 1+\frac{1}{2}(n+1) \checkmark.$$

pretp.
indukcije
$S_{2^n} \geq 1+\frac{1}{2}n$

$\Rightarrow \lim S_{2^n} = +\infty$

$\Rightarrow \lim S_n = +\infty$

■.