Korolar 5.2. Neka je $f: I \to \mathbb{R}$ neprekidna na otvorenom intervalu I. Ako za svaki segment $[u,v] \subset I$ vrijedi

$$\int_u^v f(x)\,dx = 0,$$

onda je $f(x) = 0 \quad \forall x \in I$.

Dokaz: $\overset{f=0}{\Longrightarrow} \int_u^v f = 0$; $\Longleftarrow$ pretp. suprotno, tj. $\exists c \in I$, $f(c) > 0$.

Teorem iz MA1

$\Longrightarrow \exists \delta > 0$ t.d. $\forall x \in I$, $|x-c| < \delta \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{2} f(c)$

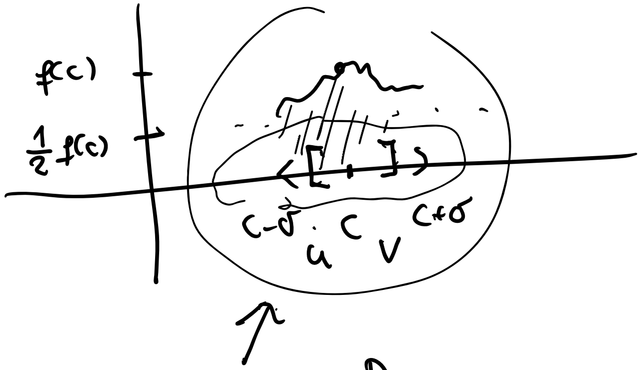
Odaberemo $[u,v] \subset \langle c-\delta, c+\delta \rangle$. Po preth. teorem.

$\int_u^v f(x)\,dx$ postoji $\Rightarrow \int = \sup A$

$$\Rightarrow \int_u^v f(x)\,dx \geq (v-u) \cdot \frac{1}{2} f(c) > 0$$

$\Rightarrow \Leftarrow$

$\Rightarrow f = 0$.

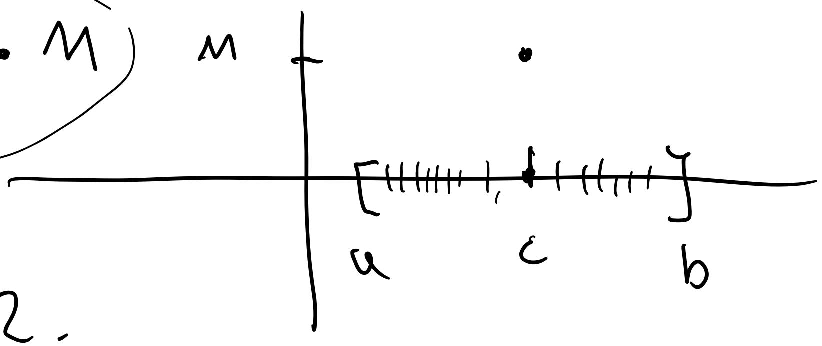


svaka donja D-suma $f|_{[u,v]}$ je $\geq (v-u) \cdot \frac{1}{2} f(c) > 0$

Propozicija 5.1. Ako $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ iščezava svugdje osim možda u točki $c\in[a,b]$, onda je h integrabilna na $[a,b]$ i $\int_a^b f(x)\,dx=0$.

<u>Dokaz:</u> Pretp. $M=f(c)>0$. Očito je svaka donja D-suma jednaka nuli. Neka je $\varepsilon>0$. Dokazat ćemo da postoji ekvid. subd. segmenta $[a,b]$ t.d. $S<\varepsilon$. Odaberimo $n\in\mathbb{N}$ t.d. $\frac{b-a}{n}<\frac{\varepsilon}{M}\cdot 2$ i promotrimo odg. ekv. subd. Tada je $x_k=a+hk$, za $k=0,\dots,n$ i $h=\frac{b-a}{n}$. Tada je

$$S=\sum_{k=1}^{n} M_k\cdot h \le 2\cdot h\cdot M = 2\cdot\frac{b-a}{n}\cdot M < \varepsilon .$$

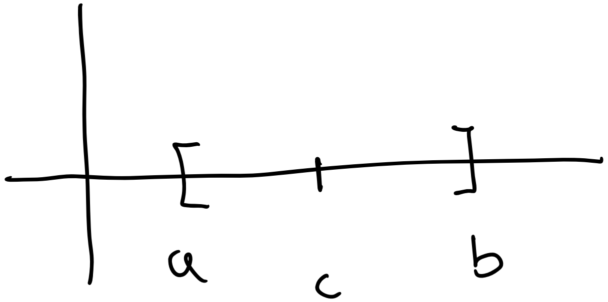


Integrabilnost slijedi iz Teorema 5.2.

$$\Rightarrow I_*=0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx=0 \qquad \square$$

__Korolar 5.3.__ Neka ograničena fja. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ima na segmentu $[a,b]$ konačno točaka prekida i neka su to prekidi prve vrste. Tada je ona R-int.

__Dokaz:__ Dovoljno je dokazati ovu tvrdnju uz pretp. da f ima jedan prekid (d.z.)



__Def:__ $f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a,c\rangle \\ \lim\limits_{t\to c^-} f(t), & x=c \end{cases}$ i

$f_2(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\langle c,b] \\ \lim\limits_{t\to c^+} f(t), & x=c \end{cases}$

neprekidne fje. na $[a,c]$ odnosno $[c,b]$

$\Rightarrow f_1(x)$ i $f_2(x)$ su integrabilne.

za $x\in[a,c]$, onda je $f(x)=\underbrace{\big(f(x)-f_1(x)\big)}_{\text{int. na }[a,c]}+\underbrace{f_1(x)}_{\text{int. na }[a,c]}$

$\Rightarrow f(x)$ int. na $[a,c]$
$\Rightarrow f(x)$ int. na $[c,b]$ $\xrightarrow{\text{aditivnost integrala}}$ $f(x)$ je int. na $[a,b]$ $\blacksquare$

Primjer 5.4. (Riemannova fj.)

Def. ćemo fj. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ koja ima prebrojivo točaka prekida koji čine gust skup u $[0,1]$, a koja je ipak integrabilna na $[0,1]$. Neka je

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0,1]-\mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n},\quad 0<m<n \text{ i } (m,n)=1 \end{cases}$$

Pokažimo da je f neprekidna samo u točkama $c\in[0,1]-\mathbb{Q}$.

Neka je $c\in[0,1]$ proizvoljan i neka je $(x_n)_n$ (injektivan) t.d. $\lim x_n=c$. Dovoljno je pokazati da je $\lim f(x_n)=0$. Pretp. suprotno, tj. $\exists\, \varepsilon>0$ t.d. za beskonačno mnogo članova x_n vrijedi $f(x_n)\geq\varepsilon$.

Ključno: postoji konačno mnogo racionalnih brojeva $\frac{m}{n}$, $(m,n)=1$ u $[0,1]$

za koje je $\frac{1}{n} > \varepsilon$ najviše, tj. $n < \frac{1}{\varepsilon}$ $(0<m<n)$ $\Rightarrow$ kontradikcija

$\Rightarrow$ f je neprekidna samo u točkama $c \in [a,b]$ za koje je $f(c)=0$

tj. $c \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$.

Pokažimo da je f R-integrabilna na $[0,1]$ i $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

Očito je svaka donja D-suma jednaka 0 (zašto?). Neka je $\varepsilon>0$.

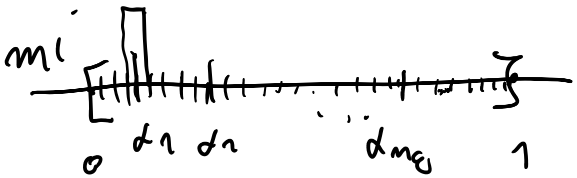
Konstruirat ćemo ekv. subd. za koju je $0<S<\varepsilon$. Neka su

α_k za $k=1,..,n_\varepsilon$ sve točke za koje je $f(\alpha_k) > \frac{\varepsilon}{2}$ i neka je

$M = \max\{f(\alpha_k) : k=1,..,n_\varepsilon\}$. Uzmimo ekv. sub. segm. $[0,1]$

$x_k = \frac{k}{n}$, $k=0,..,n$ gdje $n > \frac{4Mn_\varepsilon}{\varepsilon}$

Budući da ima najviše $2n_\varepsilon$ segmenata subdiviziji koji sadrže neki od α_k-ova (zašto?) suma članova koji odgovaraju tim segmentima u gornj. D-sumi



S je manji ili jednak $\frac{2n_\varepsilon \cdot M}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Kako je ostatak sume $< \frac{\varepsilon}{2}$ (zašto?) slijedi da je $S < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ □

<u>Def. 5.5.</u> Kažemo da ~~je~~ skup $A \subset \mathbb{R}$ ima <u>mjeru nula</u> ili da je <u>zanemariv</u> ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ili prebrojiva familija otvorenih intervala $\{I_k : k \in J\}$ t.d. $A \subseteq \bigcup_{k \in J} I_k$ i $\sum_{k \in J} d(I_k) < \varepsilon$, gdje je

$$d(\langle a, b \rangle) = b - a.$$

Napomena: Ako je J beskonačan, izraz $\sum_{k\in J} d(I_k)$ se naziva suma reda i bit će detaljnije obrađen kasnije.

Teorem 5.8. (Lebesgue) Neka je $[a,b]\subset\mathbb{R}$ i $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ograničena na $[a,b]$. Fja. f je integrabilna na $[a,b]$ ako i samo ako je skup prekida fje f skup mjere 0.

Primjeri skupova mjere nula.

a) konačan skup je skup mjere 0 ... $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$

Neka je $\varepsilon>0$ dan. Odaberimo $I_k=\langle\alpha_k-\delta_k,\alpha_k+\delta_k\rangle$ za $k=1,\dots,n$

t.d. $2\cdot\sum_{k=1}^{n}\delta_k<\varepsilon$. Npr. $\delta_k=\delta\ \forall k \Rightarrow 2\cdot n\cdot\delta<\varepsilon$

$$\Rightarrow \delta<\frac{\varepsilon}{2n}.$$

b) $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ je skup mjere $0 \Rightarrow$ postoji niz $\{\alpha_k\}_k$ t.d. $\mathbb{Q}\cap[0,1]=\{\alpha_k: k\in\mathbb{N}\}$

Neka je $\varepsilon>0$. Trebamo odabrati δ_k za $k\in\mathbb{N}$ t.d. $\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k<\varepsilon/2$.

Prvi pokušaj: $\tilde\delta_k=\frac{1}{2^k}$ ... $\sum_{k=1}^{\infty}\tilde\delta_k=\frac{1}{2}$

Def. $\delta_k=\tilde\delta_k\cdot\varepsilon \Rightarrow \sum\delta_k=\frac{1}{2}\cdot\varepsilon$ ✓ $\blacksquare$