GLATKE I RIEMANNOVE MNOGOSTRUKOSTI

Željka Milin Šipuš, Juraj Šiftar

16. lipnja 2014.

Željka Milin Šipuš, Juraj Šiftar

GLATKE I RIEMANNOVE MNOGOSTRUKOSTI

Drugi dio standardnog poslijediplomskog kolegija **Geometrija i topologija**. Izvodi se u ljetnom semestru (30 sati predavanja).

Sadržaj

1° Glatke mnogostrukosti

2° Glatka preslikavanja

3° Tangencijalni svežanj

4° Kotangencijalni svežanj

5° Podmnogostrukosti

6° Tenzori

7° Riemannove mnogostrukosti

8° Riemannova koneksija, zakrivljenosti i Riemannove podmnogostrukosti

Literatura

[1] M. P. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976.

[2] W. Kühnel, Differential Geometry, Curves - Surfaces - Manifolds, AMS 2002. AMS, 2002.

[3] J. M. Lee, Introduction to smooth manifolds, Springer, 2000.

[4] J. M. Lee, Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature, Springer, 1997.

[5] I. M. Singer, J. A. Thorpe, Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, Springer, 1967.

1 GLATKE MNOGOSTRUKOSTI

Definicija 1.1 *Topološka mnogostrukost M dimenzije n, $dim M = n$, je topološki prostor M koji zadovoljava:*

1° *M je Hausdorffov tj. za svaki par točaka $p, q \in M$ postoje disjunktni otvoreni podskupovi $U, V \subset M$ takvi da je $p \in U$, $q \in V$;*

2° *M zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti tj. postoji prebrojiva baza za topologiju od M;*

3° *M je lokalno euklidski dimenzije n tj. za svaku točku od M postoji okolina koja je homeomorfna otvorenom podskupu od $\mathbf{R}^n$.*

Uočimo:

- Posljednji uvjet zapravo znači da za svaku točku $p \in M$ postoji otvoren skup $U \subset M$ koji sadrži p, otvoren skup $\tilde{U} \subset \mathbf{R}^n$ i homeomorfizam $\varphi : U \to \tilde{U}$.
- Zahtjev da postoji U homeomorfan s otvorenim podskupom od $\mathbf{R}^n$ ekvivalentan je zahtjevu da postoji U homeomorfan s otvorenom kuglom u $\mathbf{R}^n$ ili sa samim $\mathbf{R}^n$.
- Osnovni primjer topološke mnogostrukosti je $\mathbf{R}^n$. $\mathbf{R}^n$ je Hausdorffov jer je metrički. Ima prebrojivu bazu topologije (skup otvorenih kugli s racionalnim središtima i racionalnim radijusima).
- U Hausdorffovim prostorima točka je zatvoren skup, a limesi konvergentnih nizova su jedinstveni.
- Svojstva biti Haussdorffov i zadovoljavati drugi aksiom prebrojivosti obično se lako provjeravaju jer mnogostrukosti često nastaju od poznatih mnogostrukosti (primjerice, kao podskupovi ili produkti).

Definicija 1.2 *Koordinatna karta na topološkoj mnogostrukosti M je par (U, φ) gdje je U otvoren podskup od M, a $\varphi : U \to \tilde{U}$ je homeomorfizam s U na otvoren podskup $\tilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$. Skup U nazivamo koordinatnom okolinom ili domenom, a preslikavanje φ (lokalnim) koordinatnim preslikavanjem. Koordinatne funkcije $(x^1, \ldots, x^n)$ od φ definirane sa*

$$\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p)) \in \mathbf{R}^n$$

nazivaju se lokalnim koordinatama na U.

Po definiciji topološke mnogostrukosti, svaka točka $p \in M$ je sadržana u domeni neke karte (U, φ). Govorit ćemo o (U, φ) kao o *karti koja sadrži p* umjesto kao o *karti čija domena sadrži p*. Ponekad ćemo naglašavati koordinatne funkcije $(x^1, \ldots, x^n)$ umjesto preslikavanja φ i govoriti o *koordinatnoj karti* $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ ili *lokalnim koordinatama* na M. Pišemo i $p = (x^1, \ldots, x^n)$.

Primjer 1. SFERA

Jedinična sfera S^n je skup

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

S^n je topološki prostor u relativnoj topologiji (topologija naslijeđena od $\mathbf{R}^{n+1}$). Nadalje, S^n je Hausdorffov prostor koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti jer je topološki potprostor od $\mathbf{R}^{n+1}$.

Pokažimo da je S^n lokalno euklidski prostor. U tu svrhu, pokrit ćemo S^n s $2n + 2$ koordinatnih karata definiranih na sljedeći način:

$$U_i^+ = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n : x^i > 0\}, \;\; U_i^- = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n : x^i < 0\},$$

$$\varphi_i^+ : U_i^+ \to B^n := \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\},$$
$$\varphi_i^+(x^1, \ldots, x^{n+1}) = (x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1}),$$

pri čemu je član označen $\widehat{}$ ispušten.

Analogno su definirana koordinatna preslikavanja $\varphi_i^- : U_i^- \to B^n$.

Inverz $(\varphi_i^\pm)^{-1} : B^n \to U_i^\pm$

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^{i-1}, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, u^i, \ldots, u^n)$$

je neprekidan na B^n.

Primjer 2. GRAF NEPREKIDNE FUNKCIJE

Neka je $U \subset \mathbf{R}^n$ otvoren skup i $F : U \to \mathbf{R}^k$ neprekidna funkcija. Graf od F je podskup od $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ definiran s
$$\Gamma(F) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k : x \in U \ \text{ i } \ y = F(x)\}.$$

$\Gamma(F)$ je topološki prostor s relativnom topologijom.

Pokažimo da je $\Gamma(F)$ topološka mnogostrukost dimenzije n.

Pokazat ćemo da je zapravo $\Gamma(F)$ homeomorfan s U, a $(\Gamma(F), \varphi)$

$$\varphi : \Gamma(F) \to U, \ \ \varphi(x, y) = x,$$

je globalna koordinatna karta na $\Gamma(F)$.
Zaista, ako označimo s $\pi_1 : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ projekciju na prvu koordinatu, tada je π_1 neprekidno preslikavanje. Kako je φ restrikcija od π_1 na $\Gamma(F)$, to je φ također neprekidno. Nadalje, inverz od φ dan je s $\varphi^{-1}(x) = (x, F(x))$ što je također neprekidno preslikavanje.

Uočimo da prethodno zaključivanje primjenjujemo kod sfere: $U_i^+ \cap S^n$ je graf funkcije

$$x^i = f(x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1}),$$

a $f : B^n \to \mathbf{R}$ je neprekidna funkcija definirana s

$$f(u) = \sqrt{1 - |u|^2}.$$

Slično je $U_i^- \cap S^n$ je graf funkcije $x^i = -f(x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1})$.

Primjer 3. OTVORENE TOPOLOŠKE PODMNOGOSTRUKOSTI

Neka je U otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$. Tada je U topološka n-mnogostrukost, a (U, Id_U) globalna koordinatna karta.

Općenitije, neka je M topološka n-mnogostrukost i $U \subset M$ otvoren podskup. Tada je U također topološka n-mnogostrukost, $(V, \varphi|_V)$ koordinatna karta, $V = W \cap U$, (W, φ) koordinatna karta od M.

Primjer 4. PROJEKTIVNI PROSTOR

n-dimenzionalni realni projektivni prostor $\mathbf{RP}^n$ je skup svih jednodimenzionalnih vektorskih potprostora od $\mathbf{R}^{n+1}$. Snabdijemo ga kvocijentnom topologijom

$$\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{RP}^n$$

$$\pi(x) = [x],$$

gdje je $[x]$ potprostor od $\mathbf{R}^{n+1}$ razapet s x. Uočimo da $x, y \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ razapinju isti potprostor $[x]$ ako i samo ako je $x = \lambda y$, za $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
Pokažimo da je $\mathbf{RP}^n$ lokalno euklidski. Definirajmo $n+1$ skupova $\tilde{U}_i \subset \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ kao

$$\tilde{U}_i = \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} : x^i \neq 0\}.$$

Stavimo $U_i = \pi(\tilde{U}_i) \subset \mathbf{RP}^n$.

Definirajmo preslikavanja $\varphi_i : U_i \to \mathbf{R}^n$

$$\varphi_i[x] = (\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i}),\ \ x = (x^1, \dots, x^{n+1}).$$

Inverz od φ_i je dan sa

$$\varphi_i^{-1}(u^1, \dots, u^n) = [u^1, \dots, u^{i-1}, 1, u^i, \dots, u^n].$$

Vrijedi da su skupovi U_i otvoreni i da su preslikavanja φ_i i φ_i^{-1} neprekidna. Svaka je točka od $\mathbf{RP}^n$ u domeni barem jedne od karata (U_i, φ_i), pa je $\mathbf{RP}^n$ lokalno euklidski.

Može se pokazati da je $\mathbf{RP}^n$ Hausdorffov i da zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.

Primjer 5. PRODUKTNE MNOGOSTRUKOSTI

Neka su $M_1, \dots, M_k$ topološke mnogostrukosti dimenzija $n_1, \dots, n_k$. Tada je produkt $M_1 \times \cdots \times M_k$ topološka mnogostrukost dimenzije $n_1 + \cdots + n_k$. Produkt je Hausdorffov i zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, pokažimo da je lokalno euklidski. Neka je $(p_1, \dots, p_k) \in M_1 \times \cdots \times M_k$ i izaberimo koordinatne karte (U_i, φ_i) za svaki M_i takve da je $p_i \in U_i$. Koordinatne karte od $M_1 \times \cdots \times M_k$ definiramo kao $(U_1 \times \cdots \times U_k, \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)$, gdje je

$$\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k : U_1 \times \cdots \times U_k \to \mathbf{R}^{n_1 + \cdots + n_k}$$

homeomorfizam na svoju sliku (koja je otvoren podskup od $\mathbf{R}^{n_1 + \cdots + n_k}$).

Primjer 6. TORUS

n-torus definiran s $\mathbf{T}^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ puta}}$ $(\subset \mathbf{R}^{2n})$ je topološka n-mnogostrukost.

Definicija 1.3 *Glatki (C^∞) atlas, glatka struktura, glatka mnogostrukost*
Neka je M topološka mnogostrukost. Za dvije koordinatne karte $(U, \varphi), (V, \psi)$ od M kažemo da su glatko povezane ako je $U \cap V = \emptyset$ ili ako je preslikavanje

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

glatki difeomorfizam (otvorenih podskupova od $\mathbf{R}^n$).
Atlas $\mathcal{A}$ je familija koordinatnih karata čije domene pokrivaju M. Atlas $\mathcal{A}$ se naziva glatkim ako su svake dvije karte u $\mathcal{A}$ glatko povezane.
Glatki atlas $\mathcal{A}$ je maksimalan ako nije sadržan niti u jednom striktno većem glatkom atlasu.
Glatka struktura na M je maksimalan glatki atlas na M.
Glatka mnogostrukost je uređen par $(M, \mathcal{A})$, gdje je M topološka mnogostrukost, a $\mathcal{A}$ maksimalan glatki atlas na M.

Uočimo:

- Preslikavanje $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ naziva se *funkcijom prijelaza* od φ na ψ. Ono je uvijek homeomorfizam kao kompozicija homeomorfizama.
- Motivacija – želimo definirati glatke funkcije: Funkcija $f : M \to \mathbf{R}$ je glatka ako je $f \circ \varphi^{-1} : U \to \mathbf{R}$, $U \subset \mathbf{R}^n$, glatka. Osigurati neovisnost o karti!
- C^k–mnogostrukosti (C^0 = topološka mnogostrukost), C^ω–mnogostrukosti

Lema 1.4 *Neka je M topološka mnogostrukost.*

1° *Svaki je glatki atlas od M sadržan u jedinstvenom maksimalnom atlasu.*

2° *Dva glatka atlasa od M određuju isti maksimalan atlas ako i samo ako je njihova unija glatki atlas.*

Primjer 1. $\mathbf{R}^n$

Standardna glatka struktura je određena jednom kartom $(\mathbf{R}^n, Id)$ (tj. $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \varphi = Id$).

Primjer 2. JOŠ JEDNA GLATKA STRUKTURA NA R

Neka je $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ homeomorfizam $\psi(x) = x^3$. Kartom $(\mathbf{R}, \psi)$ definiran je glatki atlas na $\mathbf{R}$. Standardna karta i karta $(\mathbf{R}, \psi)$ nisu glatko povezane jer funkcija prijelaza $Id \circ \psi^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$Id \circ \psi^{-1}(y) = y^{1/3}$$

nije glatka u 0. Prema tome, glatka struktura definirana kartom $(\mathbf{R}, \psi)$ nije ista kao standardna glatka struktura na $\mathbf{R}$.

Primjer 3. KONAČNODIMENZIONALNI VEKTORSKI PROSTORI

Neka je V n-dimenzionalni normirani prostor s topologijom induciranom od norme (ne ovisi o izboru norme). Neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ baza za V i neka je $E : V \to \mathbf{R}^n$ preslikavanje definirano s

$$E(v) = (x^1, \ldots, x^n),$$

gdje je $v = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ (po Einsteinovoj konvenciji o sumaciji pisali bismo $v = x^i e_i$).

Tada je E homeomorfizam (i izomorfizam vektorskih prostora). Atlas definiran jednom kartom (V, E) definira glatku strukturu na V.

Može se još pokazati da je ta glatka struktura neovisna o izboru baze za V. Neka je $(f_1, \ldots, f_n)$ neka druga baza i F pripadni homeomorfizam, $F : V \to \mathbf{R}^n$, $F(v) = (y^1, \ldots, y^n)$. Postoji regularna matrica $A = (a_{ij})$ (matrica prijelaza iz (f) u (e)) tako da vrijedi

$$e_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} f_j, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Funkcija prijelaza između karata (V, E), (V, F) je dana s $F \circ E^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $F \circ E^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = (y^1, \ldots, y^n)$. Treba pokazati da je ona glatko preslikavanje. Kako je $E^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = F^{-1}(y^1, \ldots, y^n)$, to je

$$\sum_{j=1}^n y^j f_j = \sum_{i=1}^n x^i e_i = \sum_{i=1}^n x^i \sum_{j=1}^n a_{ji} f_j,$$

$$\Longrightarrow y^j = \sum_{i=1}^{n} x^i a_{ji}.$$

Prema tome, funkcija prijelaza je glatko preslikavanje (regularni linearni operator).

Dobivena glatka struktura se naziva *standardnom glatkom strukturom* na V.

Primjer 4. PROSTORI MATRICA

Posebno, prostor matrica $M_{mn}(\mathbf{R})$ je glatka mnogostrukost dimenzije $m \cdot n$.

Prostor simetričnih matrica $\mathcal{S}(n, \mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : A^\tau = A\}$ je glatka mnogostrukost dimenzije $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Prostor antisimetričnih matrica $\mathcal{A}(n, \mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : A^\tau = -A\}$ je glatka mnogostrukost dimenzije $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Primjer 5. OTVORENE PODMNOGOSTRUKOSTI

Neka je U otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$, tada globalna karta (U, Id_U) definira glatku strukturu.
Općenitije, neka je U otvoren podskup glatke mnogostrukosti M, tada je

$$\mathcal{A}_U = \{(V, \varphi|_V) : V = W \cap U,\ \ (W, \varphi) \in \mathcal{A}_M\}$$

atlas na U. Prema tome, U je glatka n-mnogostrukost koju nazivamo *otvorenom podmnogostrukošću* od M.

Primjer 6. OPĆA LINEARNA GRUPA

$$GL(n, \mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : A \ \text{ regularna}\} = \det^{-1}(\mathbf{R} \setminus \{0\})$$

je otvoren podskup od $M_n(\mathbf{R})$. Prema tome, $GL(n, \mathbf{R})$ je otvoren podskup glatke n^2-dimenzionalne mnogostrukosti $M_n(\mathbf{R})$, te je i sam glatka mnogostrukost iste dimenzije.

Primjer 7. SFERA – STANDARDNA GLATKA STRUKTURA I STEREOGRAFSKA PROJEKCIJA

Utvrdimo glatku povezanost karata na sferi. Funkcije prijelaza $\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}$, za primjerice $i < j$, su

$$\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, \widehat{u^i}, \ldots, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, \ldots, u^n).$$

Prema tome, $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}$ definira (standardnu) glatku strukturu na S^n.

Istu glatku strukturu definira i sljedeći atlas: neka je $N = (0, \ldots, 0, 1)$ sjeverni pol od S^n, a $S = (0, \ldots, 0, -1)$ južni pol. Stereografska projekcija $\sigma : S^n \setminus \{N\} \to \mathbf{R}^n$

$$\sigma(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \frac{(x^1, \ldots, x^n)}{1 - x^{n+1}}$$

$$\widetilde{\sigma}(x) = -\sigma(-x),\ \ x \in S^n \setminus \{S\}.$$

Atlas definiramo dvjema kartama $(S^n \setminus \{N\}, \sigma)$, $(S^n \setminus \{S\}, \widetilde{\sigma})$.

Primjer 8. PROJEKTIVNI PROSTOR

Određujemo funkcije prijelaza $\varphi_i \circ (\varphi_j)^{-1}$, za primjerice $i > j$

$$\varphi_j \circ (\varphi_i)^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = (\frac{u^1}{u^j}, \ldots, \frac{u^{j-1}}{u^j}, \frac{u^{j+1}}{u^j}, \ldots, \frac{u^{i-1}}{u^j}, \frac{1}{u^j}, \frac{u^i}{u^j}, \ldots, \frac{u^n}{u^j}).$$

Primjer 9. GLATKE PRODUKTNE MNOGOSTRUKOSTI, n-TORUS

Atlas se sastoji od karata $(U_1 \times \cdots \times U_k, \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)$. Funkcije prijelaza

$$\psi_1 \times \cdots \times \psi_k \circ (\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)^{-1} = (\psi_1 \circ \varphi_1)^{-1} \times \cdots \times (\psi_k \circ \varphi_k)^{-1}$$

su glatke.

Propozicija 1.5 (Konstrukcija glatkih mnogostrukosti) *Neka je M skup i neka je dana familija (U_α) podskupova od M i injekcija $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}^n$ za svaki α tako da vrijedi*

1° *Za svaki α, $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ je otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$;*

2° *Za svaki α, β $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ i $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ su otvoreni u $\mathbf{R}^n$;*

3° *Za $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ je difeomorfizam;*

4° *Prebrojivo mnogo skupova U_α pokrivaju M;*

5° *Za različite točke $p, q \in M$ postoji neki U_α koji ih obje sadrži ili postoje disjunktni U_α, U_β takvi da je $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$.*

Tada M ima jedinstvenu strukturu glatke mnogostrukosti takve da je svaki $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ glatka karta.

NAPOMENA. Krivulje i plohe u klasičnoj diferencijalnoj geometriji

(Parametrizirana) krivulja u $\mathbf{R}^n$ je glatko preslikavanje $c : I \to \mathbf{R}^n$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval. Krivulja je regularna ako je $\dot{c}(t) \neq 0$, $t \in I$. ([1])

Ploha S u $\mathbf{R}^3$ je podskup od $\mathbf{R}^3$ takav da za svaki $p \in S$ postoji okolina V u $\mathbf{R}^3$ i preslikavanje $\mathbf{x} : U \to V \cap S$, gdje je $U \subset \mathbf{R}^2$ otvoren skup tako da vrijedi:

1° preslikavanje $\mathbf{x}$ je homeomorfizam.

2° preslikavanje $\mathbf{x}$ je glatko.

Ploha je regularna ako je diferencijal $d\mathbf{x} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ injektivan.
Preslikavanje $\mathbf{x}$ naziva se *lokalna parametrizacija* (karta) (eng. patch, chart). ([1])

Promjena koordinata: Neka je S regularna ploha, $p \in S$, $\mathbf{x} : U \to S$, $\mathbf{y} : V \to S$, $U, V \subset \mathbf{R}^2$, dvije parametrizacije od S takve da je $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) := W$. Tada se može pokazati da je "promjena koordinata" (funkcije prijelaza)

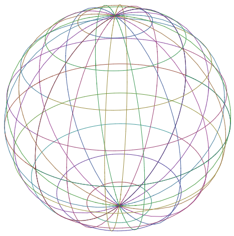
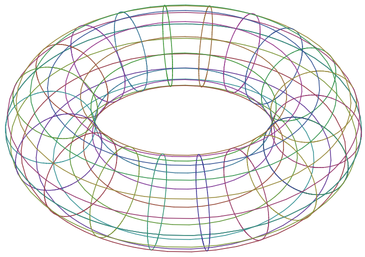
$$h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \to \mathbf{x}^{-1}(W),$$

kao preslikavanje između otvorenih skupova u $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{y}^{-1}(W) \subset V$, $\mathbf{x}^{-1}(W) \subset U$, glatki difeomorfizam. ([1])

Primjer 1. Sfera je regularna ploha.

Lokalna parametrizacija sfere radijusa R (tzv. geografska parametrizacija) glasi

$$\mathbf{x}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v), \quad u \in (0, 2\pi), \quad v \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Primjer 2. Torus je regularna ploha.

Lokalna parametrizacija torusa (poprečna kružnica je radijusa r, središnja radijusa R)

$$\mathbf{x}(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u), \quad u, v \in (0, 2\pi), \quad r < R.$$

Tako parametrizirani torus je dobiven kao rotacijska ploha: kružnica radijusa r (u yz-ravnini) rotira oko osi (z-osi) tako da se središte te kružnice giba po kružnici radijusa $R > r$ (u xy-ravnini).

Pokazat ćemo da postoji glatko smještenje torusa kao produktne mnogostrukosti $T^2 = S^1 \times S^1$ u $\mathbf{R}^3$ kojemu je slika (parametrizirani) torus.

U kontekstu imerziranih k-podmnogostrukosti također ćemo koristiti pojam lokalne parametrizacije – to će biti glatko smještenje $X : U \to M$ čija je slika otvoren podskup od M, pri čemu je U otvoren u $\mathbf{R}^k$ ([3]). Za $S = M$, lokalna parametrizacija je upravo inverz koordinatnog preslikavanja.

Zadaci

1. Sve norme na konačnodimenzionalnom prostoru V su ekvivalentne, tj. ako su $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ dvije norme na V, tada postoje konstante c_1, $c_2 > 0$ takve da za svaki $v \in V$ vrijedi $c_1||v||_1 \leq ||v||_2 \leq c_2||v||_1$. Ekvivalentne norme generiraju istu topologiju.
2. a) Pokažite da simetrične matrice čine potprostor od $M_n(\mathbf{R})$ dimenzije $\frac{n(n+1)}{2}$.

   b) Pokažite da antisimetrične matrice čine potprostor od $M_n(\mathbf{R})$ dimenzije $\frac{n(n-1)}{2}$.
3. Pokažite da je eliptički paraboloid $z = x^2 + y^2$ topološka mnogostrukost dimenzije 2. Uvedite na njemu glatku strukturu.
4. Neka je M glatka mnogostrukost, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval. Tada $M \times I$ nazivamo cilindrom nad M. Pokažite da je $M \times I$ glatka mnogostrukost. Primjer: Kružni cilindar $S^1 \times \mathbf{R}$ ili općenitije, $S^n \times \mathbf{R}$.
5. Izvedite zapis stereografske projekcije σ ($\widetilde{\sigma}$) iz sjevernog (južnog) pola. Izvedite zapis inverznog preslikavanja σ^{-1} ($\widetilde{\sigma}^{-1}$). Pokažite da stereografska projekcija pripada standarnoj glatkoj strukturi na S^n.
6. Izvedite navedene lokalne parametrizacije sfere i torusa uz geometrijsko tumačenje parametara u, v kao kuteva.

7. **Grassmannova mnogostrukost.** Neka je V $(n+1)$-dimenzionalan realan vektorski prostor. Označimo s $Gr(k, n+1)$ skup svih k-dimenzionalnih potprostora od V. Uočimo, ako je $V = \mathbf{R}^{n+1}$, tada $Gr(1, n+1)$ je projektivni prostor $\mathbf{RP}^n$. Također, primjerice, $Gr(2,3)$ je skup svih ravnina kroz ishodište i može ga se identificirati s pravcima kroz ishodište okomitima na zadane ravnine, dakle, s $Gr(1,3)$, te on također predstavlja projektivnu ravninu $\mathbf{RP}^2$.

   k-dimenzionalni potprostor od V zadajemo matricom $A \in M_{n+1,k}(\mathbf{R})$ (maksimalnog) ranga k čiji stupci razapinju potprostor. Dvije matrice A, B razapinju isti k-dimenzionalni potprostor ako i samo ako postoji regularna matrica $G \in M_k(\mathbf{R})$ takva da je $B = AG$. Time je definirana jedna relacija ekvivalencije na $M_{n+1,k}(\mathbf{R})$ ranga k. Ako matricu A odgovarajućim transformacijama napišemo kao

$$A = \begin{pmatrix} I_k \\ X \end{pmatrix}$$

   tada njoj pridružujemo koordinate $X \in M_{n+1-k,k}(\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{k(n+1-k)}$. Analogno kao za projektivni prostor, pokažite da skup $Gr(k, n+1)$ možemo organizirati u glatku mnogostrukost dimenzije $k(n+1-k)$.

Liejeva grupa je glatka mnogostrukost G koja je i grupa s obzirom na operaciju $\cdot$ i za koju je preslikavanje : $G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto g \cdot h^{-1}$ glatko.

8. **Osam Thurstonovih geometrija.** Thurstonova hipoteza o geometrizaciji kaže da 3-dimenzionalne mnogostrukosti dopuštaju samo osam određenih geometrija (geometrijskih struktura). One su određene kao E^3, S^3, H^3, $S^2 \times \mathbf{R}$, $H^2 \times \mathbf{R}$, $\widetilde{SL(2,\mathbf{R})}$, Nil^3 i Sol^3.

   a) $Nil^3 = \left\{ N = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) : x, y, z \in \mathbf{R} \right\}$. Nil^3 ima jedinstvenu glatku strukturu zadanu kartom $\varphi : Nil^3 \to \mathbf{R}^3$, $\varphi(N) = (x, y, z)$. Pokažite da je uz standardno množenje matrica Nil^3 Liejeva grupa.

   b) $Sol^3 = \left\{ S = \begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) : x, y, z \in \mathbf{R} \right\}$. Sol^3 ima jedinstvenu glatku strukturu zadanu kartom $\varphi : Sol^3 \to \mathbf{R}^3$, $\varphi(S) = (x, y, z)$. Pokažite da je uz standardno množenje matrica Sol^3 Liejeva grupa.

2 GLATKA PRESLIKAVANJA

Definicija 2.1 *Neka je M glatka mnogostrukost. Funkcija $f : M \to \mathbf{R}^k$ se naziva glatkom ako za svaku točku $p \in M$ postoji glatka karta (U, φ) od M čija domena sadrži p i takva da je kompozicija $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbf{R}^k$ glatka funkcija. Skup svih glatkih funkcija $f : M \to \mathbf{R}^k$ označavamo sa $C^\infty(M, \mathbf{R}^k)$; specijalno skup svih realnih glatkih funkcija na M označavamo sa $C^\infty(M)$.*

Uočimo:

- $C^\infty(M, \mathbf{R}^k)$ je vektorski prostor, a $C^\infty(M)$ je komutativni prsten i komutativna i asocijativna algebra nad $\mathbf{R}$ (vektorski prostor s definiranim množenjem funkcija (po točkama)).

- Za funkciju $f : M \to \mathbf{R}^k$ i kartu (U, φ), funkcija $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ naziva se *koordinatnim prikazom funkcije* f. Funkcija f je glatka ako i samo ako je njen koordinatni prikaz glatka funkcija u nekoj karti oko svake točke.

Lema 2.2 *Neka je $f : M \to \mathbf{R}^k$ glatka funkcija na M. Tada je $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbf{R}^k$ glatka funkcija za svaku kartu (U, φ) od M.*

Definicija 2.3 *Neka su M, N glatke mnogostrukosti. Preslikavanje $f : M \to N$ se naziva glatkim ako za svaku točku $p \in M$ postoji glatka karta (U, φ) od M koja sadrži p i glatka karta (V, ψ) od N koja sadrži $f(p)$, tako da je $f(U) \subset V$ i da vrijedi da je kompozicija*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

glatka funkcija. Za preslikavanje $f : M \to N$ i karte (U, φ), (V, ψ), funkcija $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ naziva se koordinatnim prikazom preslikavanja f s obzirom na dane karte.

Lema 2.4 *Neka su M, N glatke mnogostrukosti, $f : M \to N$ glatko preslikavanje. Tada je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ glatka funkcija za svaku kartu (U, φ) od M i glatku kartu (V, ψ) od N.*

Lema 2.5 (Lokalnost) *Neka su M, N glatke mnogostrukosti, $f : M \to N$. Neka svaka točka p od M ima okolinu U takvu da je restrikcija $f|_U$ glatko preslikavanje. Tada je f glatko preslikavanje. Obratno, ako je f glatko preslikavanje, tada je njegova restrikcija na bilo koji otvoren podskup također glatko preslikavanje.*

Lema 2.6 *(a) Svako glatko preslikavanje $f : M \to N$ je neprekidno.*
(b) Kompozicija glatkih preslikavanja između glatkih mnogostrukosti je glatko preslikavanje.

Lema 2.7 *Neka su $M_1, \ldots, M_k$, N glatke mnogostrukosti. Preslikavanje $f : N \to M_1 \times \cdots \times M_k$ je glatko ako i samo ako je $f_i := \pi_i \circ f : N \to M_i$ glatko preslikavanje ($\pi_i : M_1 \times \cdots \times M_k \to M_i$ je projekcija na i-ti faktor).*

Primjer 1. Inkluzija $i : S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ je glatko preslikavanje.

Koordinatni prikaz tog preslikavanja je

$$\hat{i}(u^1, \ldots, u^n) = i \circ (\varphi_i^{\pm})^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^{i-1}, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, u^i, \ldots, u^n), \;\; |u| < 1.$$

Primjer 2. Kvocijentno preslikavanje $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{RP}^n$ je glatko preslikavanje. Koordinatni prikaz tog preslikavanja je

$$\hat{\pi}(x^1, \dots, x^{n+1}) = \varphi_i \circ \pi(x^1, \dots, x^{n+1}) = \varphi_i[x] = (\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots \frac{x^{n+1}}{x^i}).$$

Primjer 3. Preslikavanje $p : S^n \to \mathbf{RP}^n$, p je restrikcija od π na S^n je glatko (kao kompozicija $p = \pi \circ i$).

Definicija 2.8 *(Glatki) difeomorfizam između mnogostrukosti M i N je glatka bijekcija $F : M \to N$ kojoj je i inverz glatko preslikavanje. Za mnogostrukosti M i N kažemo da su difeomorfne ako postoji difeomorfizam $F : M \to N$.*

Biti difeomorfan je relacija ekvivalencije.

Primjer 1. $F : B_n \to \mathbf{R}^n$, $F(x) = \dfrac{x}{1 - |x|^2}$ je difeomorfizam.

Primjer 2. Neka je M glatka mnogostrukost, (U, φ) koordinatna karta. Tada je $\varphi : U \to \varphi(U)$ difeomorfizam. Njegov koordinatni prikaz je id.

Definicija 2.9 *Preslikavanje $F : M \to N$ naziva se (glatki) lokalni difeomorfizam, ako za svaku točku $p \in M$ postoji okolina U takva da je $F(U)$ otvoren skup u N i $F|_U : U \to F(U)$ je (glatki) difeomorfizam.*

Propozicija 2.10 *Preslikavanje $F : M \to N$ je difeomorfizam ako i samo ako je F bijektivni lokalni difeomorfizam.*

Jedinstvenost glatke strukture na topološkoj mnogostrukosti? Preciznije:

1° Dopušta li zadana topološka mnogostrukost različite glatke strukture?

2° Dopušta li zadana topološka mnogostrukost glatke strukture koje nisu difeomorfne?

Propozicija 2.11 *Dvije glatke strukture $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ na M su iste ako i samo ako je identiteta : $(M, \mathcal{A}_1) \to (M, \mathcal{A}_2)$ difeomorfizam.*

Općenito, zadana topološka mnogostrukost dopušta mnogo različitih glatkih struktura. Primjerice, atlasi $\{(\mathbf{R}, \varphi)\}$, $\{(\mathbf{R}, \psi)\}$, $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = x^3$ definiraju različite glatke strukture na $\mathbf{R}$. No, te su strukture difeomorfne! Promotriti $F : \mathbf{R}_\varphi \to \mathbf{R}_\psi$, $F(x) = x^{1/3}$.

Neki rezultati:

1° Postoji samo jedna glatka struktura na $\mathbf{R}$ do na difeomorfizam.

2° Svaka topološka mnogostrukost dimenzije ≤ 3 ima jedinstvenu glatku strukturu do na difeomorfizam.

3° $\mathbf{R}^n$, $n \neq 4$, ima jedinstvenu glatku strukturu do na difeomorfizam.

4° $\mathbf{R}^4$ ima neprebrojivo mnogo različitih glatkih struktura i nikoje dvije nisu difeomorfne.

5° S^7 ima 28 nedifeomorfnih glatkih struktura (John Milnor, Abelova nagrada 2011.).

6° Postoje kompaktne topološke mnogostrukosti svih dimenzija > 3 koje ne dopuštaju glatku strukturu.

(GLATKA) PARTICIJA JEDINICE – služi za "lijepljenje" glatkih lokalnih objekata u globalne.

Definicija 2.12 *Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ otvoren pokrivač glatke mnogostrukosti M. (Glatka) Particija jedinice podređena pokrivaču $\mathcal{U}$ je familija* ***glatkih funkcija*** *$\{\varphi_\alpha : M \to \mathbf{R}\}_{\alpha \in A}$ koja ima sljedeća svojstva:*

1° $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$, $\alpha \in A$, $x \in M$,

2° $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\alpha$,

3° *familija nosača* $\{\operatorname{supp} \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *je lokalno konačna,*

4° $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x) = 1$, $x \in M$.

gdje je nosač od f definirane na M

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}.$$

Familija skupova $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, podskupova topološkog prostora X naziva se *lokalno konačnom* ako za svaku točku $p \in X$ postoji okolina koja siječe samo konačno mnogo skupova U_α. Zbog toga, suma u 4° ima samo konačno mnogo sumanada različitih od 0.

Teorem 2.13 (Egzistencija glatke particije jedinice) *Ako je M glatka mnogostrukost i $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ otvoren pokrivač od M, tada postoji (glatka) particija jedinice podređena pokrivaču $\mathcal{X}$.*

Particija jedinice postoji i u klasi C^k-mnogostrukosti, $k \leq \infty$.

Dokaz. Skica.

1° Funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

je glatka.

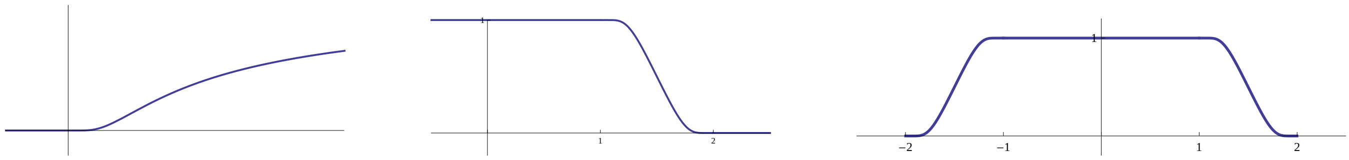
2° Postoji glatka funkcija (*cutoff function*) $h : \mathbf{R} \to [0, 1]$ takva da je

$$h(t) \equiv \begin{cases} 1, & t \leq 1 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$0 < h(t) < 1, \quad \text{za } 1 < t < 2.$$

Jedna takva funkcija h je dana kao

$$h(t) = \frac{f(2-t)}{f(2-t) + f(t-1)}.$$



Slika 1: Funkcije f, h, H na $\mathbf{R}$

3° Postoji glatka funkcija (*bump function*) $H : \mathbf{R}^n \to [0,1]$ takva da je

$$H \equiv 1 \quad \text{na } \overline{B}_1(0) \quad \text{i } \operatorname{supp} H = \overline{B}_2(0).$$

Funkcija H je na primjer dana kao

$$H(x) = h(|x|).$$

4° Svaka glatka mnogostrukost je parakompaktna. Svaki glatki pokrivač ima regularno profinjenje (tj. profinjenje W_i koje je prebrojivo i lokalno konačno, svaki W_i je domena glatkog koordinatnog preslikavanja $\varphi_i : W_i \to \mathbf{R}^n$, $\varphi_i(W_i) \subset B_3(0)$, familija $\{U_i\}$, $U_i := \varphi_i^{-1}(B_1(0))$ pokriva M).

5° $\{W_i\}$ regularno profinjenje, $\varphi(W_i) \subset B_3(0)$, $U_i = \varphi_i^{-1}(B_1(0))$, $V_i = \varphi_i^{-1}(B_2(0))$.

Definiramo $f_i : M \to \mathbf{R}$

$$f_i = \begin{cases} H \circ \varphi_i & \text{na } W_i \\ 0 & \text{na } M \setminus \bar{V}_i \end{cases}$$

Funkcije f_i su glatke, supp $f \subset W_i$. Tražene glatke funkcije su

$$g_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_j f_j(x)}.$$

Zbog lokalne konačnosti pokrivača $\{W_i\}$, u okolini svake točke suma u nazivniku ima samo konačno mnogo članova različitih od 0. Za funkcije g_i očito vrijedi $0 \le g_i \le 1$, $\sum_i g_i \equiv 1$.

6° Konačno, kako bismo dobili za skup indeksa skup A, reindeksirajmo dobivene funkcije. Za svaki i uzmimo neki indeks $a(i) \in A$ takav da je $W_i \subset X_{a(i)}$. Sada za svaki $\alpha \in A$ definiramo $\varphi_\alpha : M \to \mathbf{R}$

$$\varphi_\alpha = \sum_{i:\, a(i)=\alpha} g_i.$$

Tada su φ_α funkcije tražene particije jedinice.

□

U dokazima sljedeća dva teorema koristimo particiju jedinice:

Teorem 2.14 (Egzistencija glatke "bump" funkcije) *Neka je M glatka mnogostrukost. Tada za svaki zatvoren skup $A \subset M$ i otvoren skup U koji sadrži A postoji glatka "bump" funkcija za A s nosačem u U, tj. glatka funkcija za koju vrijedi*

$$\varphi : M \to \mathbf{R}, \ \ 0 \le \varphi \le 1 \ \text{na } M, \ \ \varphi \equiv 1 \ \text{na } A, \ \ \operatorname{supp}\varphi \subset U.$$

Dokaz. Neka je $U_0 = U$, $U_1 = M \setminus A$ i neka je $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ (glatka) particija jedinice podređena pokrivaču $\{U_0, U_1\}$. Tada je $\varphi_1 \equiv 0$ na A, $\varphi_0 = \sum_i \varphi_i = 1$ na A. Prema tome, tražena funkcija je φ_0. □

Teorem 2.15 (Lema o proširenju) *Neka je M glatka mnogostrukost, $A \subset M$ zatvoren podskup, $f : A \to \mathbf{R}^k$ glatka funkcija. Tada za svaki otvoren skup U koji sadrži A postoji glatka funkcija $\tilde{f} : M \to \mathbf{R}^k$ za koju vrijedi $\tilde{f}|_A = f$, $\mathrm{supp}\tilde{f} \subset U$.*

Zadaci

1. Pokažite da je preslikavanje $f : \mathbf{R} \to S^1 \subset \mathbf{C}$, $g(t) = e^{it}$ glatko.

2. Pokažite da je preslikavanje $f : S^2 \to S^2$, $f(f, y, z) = (x \cos\varphi - y \sin\varphi, x \sin\varphi + y \cos\varphi, z)$ difeomorfizam, pri čemu je $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\varphi \in \mathbf{R}$ je fiksan. (Vrijedi i da je f izometrija, vidi poglavlje 7).

3. Pokažite da je preslikavanje $f : S^2 \to S^2$, $f(x, y, z) = (x \cos(x^2 + y^2) - y \sin(x^2 + y^2), x \sin(x^2 + y^2) + y \cos(x^2 + y^2), z)$ difeomorfizam, pri čemu je $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (Funkcija f nije izometrija).

4. Pokažite da je preslikavanje $h : S^3 \to S^2$, $h(a, b, c, d) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(ad + bc), 2(bd - ac))$ glatko, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. To se preslikavanje naziva *Hopfova fibracija.*

5. Neka je G Liejeva grupa. Pokažite da je lijeva translacija za element $g \in G$, $L_g(h) = g \cdot h$ difeomorfizam.

6. Neka je G Liejeva grupa i M glatka mnogostrukost. Lijevo djelovanje grupe G na M je glatko preslikavanje $G \times M \to M$, $(g, p) \mapsto g.p$, koje zadovoljava

$$g_1.(g_2.p) = g_1 g_2.p, \quad g_1, g_2 \in G, p \in M,$$

$$e.p = p, \quad p \in M.$$

   Definirajmo na M relaciju (ekvivalencije) $\sim$ na sljedeći način: $p \sim q$ ako postoji $g \in G$ takav da je $g.p = q$. Klase ekvivalencija su tzv. orbite od G u M. Skup svih orbita označavamo s M/G. Snabdijemo li ga kvocijentnom topologijom dobivamo prostor orbita danog djelovanja. Vrijedi:

   Teorem 2.16 *Neka G djeluje slobodno na M ($g.p = p \Rightarrow g = e$) i pravo (preslikavanje $(g, p) \mapsto (g.p, p)$ je pravo, tj. praslika pri tom preslikavanju kompaktnog skupa je kompaktan). Tada je prostor orbita M/G toploška mnogostrukost dimenzije $\dim M - \dim G$ s jedinstvenom glatkom strukturom koja ima svojstvo da je kvocijentno preslikavanje $\pi : M \to M/G$ glatka submerzija.*

   Možemo zaključiti:

   a) $\mathbf{RP}^n$ je difeomorfan kvocijentnoj glatkoj mnogostrukosti (prostoru orbita) $S^n/\{\pm 1\}$.
   b) $\mathbf{T}^n$ je difeomorfno kvocijentnoj glatkoj mnogostrukosti $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$.

3 TANGENCIJALNI SVEŽANJ

3.1 Tangencijalni prostor mnogostrukosti

Motivacija: Geometrijski tangencijalni prostor od $\mathbf{R}^n$ u točki p

$$\mathbf{R}^n_p = \{p\} \times \mathbf{R}^n = \{(p, v) : v \in \mathbf{R}^n\}.$$

Uz prirodno definirane operacije zbrajanja i množenja vektora skalarom iz $\mathbf{R}$, skup $\mathbf{R}^n_p$ postaje n-dimenzionalni vektorski prostor. Pišemo $(p, v) = v_p$ i v_p nazivamo (geometrijskim) tangencijalnim vektorom u točki p.

Neka je $v_p \in \mathbf{R}^n_p$. Definiramo preslikavanje $\tilde{v}_p : C^\infty(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ kao usmjerenu derivaciju funkcije f u smjeru vektora v u p

$$\tilde{v}_p f = D_v f(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(p + tv).$$

Preslikavanje $\tilde{v}_p$ je linearno i zadovoljava

$$\tilde{v}_p(fg) = f(p)\tilde{v}_p(g) + g(p)\tilde{v}_p(f).$$

Izrazimo ga u standardnoj bazi $(e_i|_p)$ za $\mathbf{R}^n_p$. Neka je $v_p = v^i e_i|_p$, tada je

$$\tilde{v}_p f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

Definicija 3.1 *Linearno preslikavanje $X : C^\infty(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ naziva se derivacijom u p ako vrijedi*

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \quad f, g \in C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Neka je $T_p(\mathbf{R}^n)$ skup svih derivacija u p. Uz uobičajene operacije, $T_p(\mathbf{R}^n)$ je vektorski prostor. Najvažnije (a i iznenađujuće) svojstvo prostora $T_p(\mathbf{R}^n)$ je da je konačnodimenzionalan, te da vrijedi:

Propozicija 3.2 *Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$ preslikavanje $v_p \mapsto \tilde{v}_p$ je izomorfizam vektorskih prostora $\mathbf{R}^n_p$ i $T_p(\mathbf{R}^n)$.*

Za dokaz su potrebne i sljedeće tvrdnje:

Lema 3.3 (Svojstva derivacije) *Neka je $p \in \mathbf{R}^n$, $X \in T_p(\mathbf{R}^n)$.*

1° *Ako je f konstantna funkcija, tada je $Xf = 0$.*

2° *Ako je $f(p) = g(p) = 0$, tada je $X(fg) = 0$.*

Dokaz.

1° Dovoljno dokazati za $f_1(x) \equiv 1$ (jer za $f(x) \equiv c$ imamo po linearnosti $Xf = X(cf_1) = cX(f_1) = 0$). Za f_1 vrijedi

$$X(f_1) = X(f_1 f_1) = f_1(p)Xf_1 + f_1(p)Xf_1 = 2Xf_1$$

što povlači $X(f_1) = 0$.

2° $X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf = 0 + 0.$

□

Lema 3.4 (Taylorova formula prvog stupnja s ostatkom) *Neka je $U \in \mathbf{R}^n$ konveksan, otvoren skup, $p \in U$. Neka je $f \in C^k(U)$, $1 \leq k \leq \infty$. Tada*

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - p^i) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x^i - p^i),$$

gdje su $g_1, \ldots, g_n \in C^{k-1}(U)$ funkcije za koje vrijedi $g_i(p) = 0$.

Dokaz. [propozicije]

Linearnost preslikavanja $v_p \mapsto \tilde{v}_p$ je lako provjeriti.

Injektivnost. Neka je $v_p \in \mathbf{R}^n_p$ i $\tilde{v}_p$ nul-derivacija. U standardnoj bazi $v_p = v^i e_i|_p$. Djelovanjem derivacije $\tilde{v}_p$ na j-tu koordinatnu funkciju $x_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, dobivamo

$$0 = \tilde{v}_p(x^j) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)|_p = v^j.$$

Prethodno vrijedi za svaki $j = 1, \ldots, n$, te je $v_p = 0$.

Surjektivnost. Neka je $X \in T_p(\mathbf{R}^n)$. Definirajmo realne brojeve $v^1, \ldots, v^n$ kao

$$v^i = X(x^i).$$

Pokazat ćemo da je $X = \tilde{v}_p$, gdje je $v = v^i e_i|p$.

Neka je f realna funkcija na $\mathbf{R}^n$. Koristeći Taylorovu formulu prvog stupnja s ostatkom zaključujemo da postoje glatke funkcije $g_1, \ldots, g_n$ na $\mathbf{R}^n$ takve da je $g_i(p) = 0$ i da vrijedi

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - p^i) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x^i - p^i).$$

Primijenimo X na prethodni izraz i koristeći Lemu 3.3 zaključujemo

$$\begin{aligned}
Xf &= X(f(p)) + \sum_{i=1}^{n} X\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - p^i)\right) + \sum_{i=1}^{n} X\left(g_i(x)(x^i - p^i)\right) \\
&= 0 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(X(x^i) - X(p^i))\right) + 0 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v^i \\
&= \tilde{v}_p f.
\end{aligned}$$

□

Korolar 3.5 *Za svaki $p \in \mathbf{R}^n$, n derivacija*

$$\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p : C^\infty(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$$

definiranih s

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

čini bazu za $T_p(\mathbf{R}^n)$.

Dokaz.

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \tilde{e}_{ip}$$

$\square$

Definicija 3.6 *Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$. Linearno preslikavanje (operator) $X : C^\infty(M) \to$ $\mathbf{R}$ naziva se derivacijom u p ako vrijedi*

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf, \quad f, g \in C^\infty(M).$$

Skup svih derivacija u p je vektorski prostor koji se naziva tangencijalnim prostorom od M u p i označava T_pM. Tangencijalni vektor u p je element prostora T_pM.

Lema 3.7 (Svojstva tangencijalnih vektora na M) *Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$, $X \in T_p(M)$.*

1° *Ako je f konstantna funkcija, tada je $Xf = 0$.*

2° *Ako je $f(p) = g(p) = 0$, tada je $X(fg) = 0$.*

3.2 *Push-forward (Tangencijalno preslikavanje, diferencijal)*

Definicija 3.8 *Neka su M i N glatke mnogostrukosti, $F : M \to N$ glatko preslikavanje. Za svako $p \in M$ definiramo push-forward F_* preslikavanja F kao preslikavanje*

$$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N, \quad (F_*X)(f) = X(f \circ F),$$

gdje je $f \in C^\infty(N)$.

Uočimo $f \circ F \in C^\infty(M)$. Preslikavanje F_*X je očito linearno i derivacija u $F(p)$

$$(F_*X)(fg) = X((fg) \circ F) = X((f \circ F)(g \circ F))$$

$$= (f \circ F)(p)X(g \circ F) + (g \circ F)(p)X(f \circ F)$$

$$= f(F(p))(F_*X)(g) + g(F(p))(F_*X)(f).$$

Lema 3.9 (Svojstva *push-forward*-a) *Neka su $F : M \to N$, $G : N \to P$ glatka preslikavanja, $p \in M$. Tada:*

1° *$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ je linearni operator*

2° *$(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : T_pM \to T_{(G \circ F)(p)}P$*

3° *$((Id)_M)_* = Id_{T_pM} : T_pM \to T_pM$*

4° *Ako je F difeomorfizam, tada je $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ izomorfizam.*

Propozicija 3.10 *Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$,$X \in T_p(M)$. Neka su f, g glatke funkcije na M koje se podudaraju na nekoj okolini od p. Tada je $Xf = Xg$.*

Dokaz. Zbog linearnosti, dovoljno je pokazati $Xh = 0$ za h koji iščezava u okolini od p. Neka je $\varphi \in C^\infty(M)$ glatka *bump*-funkcija koja je identički jednaka 1 na nosaču od h, a čiji je nosač u $M \setminus \{p\}$. Kako je $\varphi \equiv 1$ tamo gdje h ne iščezava, produkt φh je identički jednak h. Kako je $h(p) = \varphi(p) = 0$, Lema 3.7 povlači $Xh = X(\varphi h) = 0$. □

Prethodna propozicija omogućuje identifikaciju tangencijalnog prostora otvorene podmnogostrukosti s tangencijalnim prostorom cijele mnogostrukosti:

Propozicija 3.11 *Neka je M glatka mnogostrukost, $U \subset M$ otvorena podmnogostrukost, $i : U \hookrightarrow M$ inkluzija. Tada je za svaki $p \in U$ preslikavanje $i_* : T_pU \to T_pM$ izomorfizam.*

Dokaz.

Injektivnost. Neka je $X \in T_pU$, $i_*X = 0 \in T_pM$. Neka je $f \in C^\infty(U)$. Po lemi o proširenju 2.15 postoji $\widetilde{f} \in C^\infty(M)$, supp$\widetilde{f} \subseteq U$, takva da je $\widetilde{f} = f$ na okolini $\bar{B}$ od p, $\bar{B} \subset U$. Propozicija 3.10 povlači

$$Xf = X(\widetilde{f}|_U) = X(\widetilde{f} \circ i) = (i_*X)(\widetilde{f}) = 0.$$

Surjektivnost. Neka je $Y \in T_pM$ po volji odabran. Definiramo preslikavanje $X : C^\infty(U) \to \mathbf{R}$, $Xf = Y\tilde{f}$. X je tražena derivacija. □

Propozicija 3.12 *Ako je $F : M \to N$ lokalni difeomorfizam, tada je $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ izomorfizam za svaki $p \in M$.*

Generalizirajući izomorfizam između $\mathbf{R}^n_p$ i $T_p\mathbf{R}^n$, dobivamo:

Propozicija 3.13 *Za svaki konačnodimenzionalan vektorski prostor V i svaku točku $p \in V$, postoji prirodni izomorfizam (tj. izomorfizam koji ne ovisi o izboru baza) $V \to T_pV$ takav da za svaki linearni operator $L : V \to W$ sljedeći dijagram komutira*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "L"'] & T_pV \arrow[d, "L_*"] \\ W \arrow[r, "\cong"'] & T_{L_p}W \end{tikzcd}$$

Dokaz. Neka je $v \in V$. Definiramo preslikavanje $\tilde{v}_p$ na C^∞(V)

$$\tilde{v}_p(f) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(p + tv).$$

Definicija ne ovisi o izboru baze.

Ako izaberemo bazu, u koordinatama možemo provesti isto zaključivanje kao u $\mathbf{R}^n$ kako bismo pokazali da je $\tilde{v}_p$ derivacija u p i da je preslikavanje $v \mapsto \tilde{v}_p$ izomorfizam.

Komutativnost dijagrama. Neka je $L : V \to W$ linearni operator. Njegove koordinatne funkcije s obzirom na bilo koji izbor baza za V, W su linearne funkcije, pa je L glatko preslikavanje. Koristeći definiciju *push-forward*-a i linearnost od L, dobivamo

$$\begin{aligned} L_*\tilde{v}_p f = \tilde{v}_p(f \circ L) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f(L(p + tv)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f(Lp + tLv) = (\widetilde{Lv})_{L(p)} f. \end{aligned}$$

□

3.3 Koordinatni zapis

Neka je (U, φ) glatka koordinatna karta na M. Znamo da je $\varphi : U \to \varphi(U)$ glatki difeomorfizam, pa je po Lemi 3.9 i Propoziciji 3.11 $\varphi_* : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbf{R}^n$ izomorfizam.

Znamo: baza za $T_{\varphi(p)}\mathbf{R}^n$ su derivacije $\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)}$, $i = 1, \ldots, n$. Prema tome, *pushforward* tih vektora po preslikavanju $(\varphi^{-1})_*$ je baza za T_pM. Stoga, definiramo

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p f = \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}(\hat{p}),$$

gdje je $f : U \to \mathbf{R}$ glatka funkcija, $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ njen koordinatni prikaz, $\hat{p} = \varphi(p)$.

Iz prethodnog slijedi:

Lema 3.14 *Neka je M glatka mnogostrukost. Za svaki $p \in M$, T_pM je n-dimenzionalni vektorski prostor. Ako je $(U, (x^i))$ glatka karta oko p, tada*

$$\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$$

čine bazu za T_pM.

U danoj bazi imamo:

Neka je $X \in T_pM$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. Uređena n-torka $(X^1, \ldots X^n)$ je n-torka komponenata (koordinata) vektora X s obzirom na dani koordinatni sustav. Neka je $x^j : U \to \mathbf{R}$ (glatka) koordinatna funkcija, tada

$$X(x^j) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p(x^j) = X^i \frac{\partial x^j \circ \varphi^{-1}}{\partial x^i}(\hat{p}) = X^j.$$

Pushforward glatkog preslikavanja F u koordinatama:

Za $F : U \to V$, $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$. Neka je $p \in U$. Odredimo matricu preslikavanja $F_* : T_p\mathbf{R}^n \to T_{F(p)}\mathbf{R}^m$ u paru standardnih baza. Označimo s $(x^1, \ldots, x^n)$, $(y^1, \ldots, y^m)$ odgovarajuće koordinate u U, V. Neka je $f : V \to \mathbf{R}$, $f = f(y^1, \ldots, y^n)$, tada je $f \circ F : U \to \mathbf{R}$, $f \circ F = f \circ F(x^1, \ldots, x^n)$. Dakle,

$$\left(F_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_p\right) f = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p(f \circ F) = \frac{\partial f}{\partial y^j}(F(p)) \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}|_{F(p)} f.$$

Prema tome

$$F_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}|_{F(p)}.$$

Odavde slijedi da je matrični prikaz preslikavanja F_* u paru standardnih baza *Jacobijeva matrica*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Dakle, specijalni slučaj $F_* : T_p\mathbf{R}^n \to T_{F(p)}\mathbf{R}^m$ odgovara diferencijalu $DF(p) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ uz identifikaciju euklidskih prostora sa svojim tangencijalnim prostorima.

Za $F : M \to N$ uz koordinatne karte (U, φ) za M oko p, (V, ψ) za N oko $F(p)$, promatramo koordinatno preslikavanje

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V).$$

U paru standardnih baza, $\hat{F}_*$ ima za matrični prikaz Jacobijevu matricu preslikavanja $\hat{F}$. Zbog toga i preslikavanje F_* u paru baza $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$ za U i $(\frac{\partial}{\partial y^i}|_{F(p)})$ za V ima za matrični prikaz Jacobijevu matricu preslikavanja $\hat{F}$

$$\begin{aligned} F_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_p &= F_* \left((\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)} \right) = (\psi^{-1})_* \left(\hat{F}_* \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)} \right) \\ &= (\psi^{-1})_* \left(\frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j}|_{\hat{F}(\varphi(p))} \right) = \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j}|_{F(p))}, \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili $F \circ \varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ \hat{F}$.

Promjena koordinata. Izgleda kao lančano pravilo:

Neka su (U, φ), (V, ψ) dvije karte oko p, (x^i), $(\tilde{x}^i)$ odgovarajuće koordinate. Tada je

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}|_p.$$

Stoga se komponente X^i transformiraju po pravilu

$$\tilde{X}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) X^i.$$

Tangencijalni vektori krivulje. Neka je M glatka mnogostrukost. *Krivulja* u M je glatko (klase C^k) preslikavanje $c : I \to M$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval. *Tangencijalni vektor* od c u točki $t_0 \in I$ je vektor

$$c'(t_0) := c_*(\frac{d}{dt}|_{t_0}) \in T_{c(t_0)}M,$$

gdje je $\frac{d}{dt}|_{t_0}$ standardna baza za $T_{t_0}\mathbf{R}$. Tangencijalni vektor $c'(t_0)$ djeluje na funkcije $f : U \to \mathbf{R}$

$$c'(t_0)f = c_*(\frac{d}{dt}|_{t_0})f = \frac{d}{dt}|_{t_0}(f \circ c) = \frac{df \circ c}{dt}(t_0).$$

Lema 3.15 *Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$. Svaki $X \in T_pM$ je tangencijalni vektor neke glatke krivulje u M.*

Dokaz. Neka je (U, φ) koordinatna karta centrirana u p (tj. vrijedi $\varphi(p) = 0$), $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. Definirajmo krivulju $c : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to U$

$$c(t) = (tX^1, \ldots, tX^n) \ \left(= \varphi^{-1}(tX^1, \ldots, tX^n)\right).$$

Očito vrijedi $c(0) = p$, $c'(0) = X$. $\square$

Propozicija 3.16 *Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, $c : I \to M$ glatka krivulja. Za svaki $t_0 \in I$ tangencijalni vektor u t_0 slike krivulje c pri preslikavanju F, $F \circ c : I \to N$ je dan sa*

$$(F \circ c)'(t_0) = F_*(c'(t_0)).$$

Dokaz.

$$(F \circ c)'(t_0) = (F \circ c)_* \frac{d}{dt}|_{t_0} = F_* \circ c_* \frac{d}{dt}|_{t_0} = F_*(c'(t_0)).$$

□

Klasična diferencijalna geometrija krivulja i ploha

Tangencijalni vektor krivulje je $\dot{c}(t)$.

Tangencijalni vektor plohe: $v \in T_p\mathbf{R}^3$ je tangencijalni vektor plohe ako postoji krivulja $c : I \to S$ takva da je $c(0) = p$, $c'(0) = v$. Ako je $\mathbf{x} : U \to S$ parametrizacija od S, tada

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \ \ (u, v) \in U,$$

razapinju tangencijalnu ravninu.

Alternativne definicije tangencijalnog prostora.

1° Pomoću klica glatkih funkcija.

2° Koristeći relaciju ekvivalencije na skupu glatkih krivulja na M

$$c_1 \cong c_2 \Longleftrightarrow c_1(0) = c_2(0), \ \ \frac{d}{dt}(f \circ c_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ c_2)|_{t=0},$$

gdje je f glatka realna funkcija definirana u okolini od p.

3° Koristeći pravilo za transformaciju koordinata (pri promjeni karte).

Zadaci

1. Za mnogostrukost $\mathbf{R}^2$ i koordinatnu kartu zadanu polarnim koordinatama (r, φ), odredite vezu između tangencijalnih vektora $(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi})$ s obzirom na tu koordinatnu kartu i vektora standardne (kanonske) baze $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ od $T_p(\mathbf{R}^2)$.

2. U smislu Propozicije 3.13 o postojanju prirodnog izomorfizma između vektorskog prostora V i tangencijalnog prostora T_pV, tangencijalni prostor prostora matrica $M_{mn}(\mathbf{R})$ u točki p identificiramo s $M_{mn}(\mathbf{R})$, a tangencijalni prostor prostora simetričnih matrica $\mathcal{S}(n, \mathbf{R})$ s $\mathcal{S}(n, \mathbf{R})$. Također, tangencijalni prostor od $GL(n, \mathbf{R})$ identificiramo s $M_{mn}(\mathbf{R})$.

3.4 Tangencijalni svežanj

Motivacija: Vektorsko polje na mnogostrukosti je preslikavanje koje svakoj točki p mnogostrukosti pridružuje tangencijalni vektor iz T_pM. Što je kodomena tog preslikavanja?

Definicija 3.17 *Neka je M glatka mnogostrukost. Tangencijalni svežanj od M je disjunktna unija tangencijalnih prostora u svim točkama od M*

$$TM = \coprod_{p\in M} T_pM.$$

Element od TM je uređeni par (p, X), gdje je $p \in M$, $X \in T_pM$. Pišemo $(p, X) = X_p$. Prirodna projekcija je preslikavanje

$$\pi : TM \to M, \ \ \pi(p, X) = p.$$

Tangencijalni svežanj kao glatka mnogostrukost

Propozicija 3.18 *Za svaku glatku mnogostrukost M, tangencijalni svežanj TM ima prirodnu topologiju i glatku strukturu kao mnogostrukost dimenzije $2n$. S tom je strukturom, prirodna projekcija $\pi : TM \to M$ glatko preslikavanje.*

Dokaz. Disjunktna unija $TM = \coprod_{p\in M} T_pM$ je po definiciji skup

$$TM = \coprod_{p\in M} T_pM = \{(p, X) : p \in M, X \in T_pM\}.$$

Topologija na disjunktnoj uniji definirana je na sljedeći način: podskup od TM je otvoren ako i samo ako je njegov presjek sa svakim T_pM otvoren u T_pM. To je jedinstvena topologija za koju vrijedi svojstvo: Neka je Y neki topološki prostor, $\coprod_\alpha X_\alpha$ disjunktna unija. Preslikavanje $f : \coprod_\alpha X_\alpha \to Y$ je neprekidno ako i samo ako je $f \circ i_\alpha$ neprekidno za svaki α, $i_\alpha : X_\alpha \to \coprod_\alpha X_\alpha$, $i_\alpha(x) = (\alpha, x)$.

Neka je (U, φ) glatka karta od M, $\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$. Koordinatne karte na TM definiramo kao $(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi})$, gdje je

$$\widetilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbf{R}^{2n}$$

$$\widetilde{\varphi}(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p), v^1, \ldots, v^n).$$

Slika preslikavanja $\widetilde{\varphi}$ je skup $\varphi(U) \times \mathbf{R}^n$, koji je otvoren podskup od $\mathbf{R}^{2n}$. Preslikavanje $\widetilde{\varphi}$ je bijekcija na svoju sliku, njegov inverz je

$$\widetilde{\varphi}^{-1}(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi^{-1}(x)}.$$

Funkcije prijelaza iz karte u kartu:

Neka su (U, φ) i (V, ψ) dvije glatke karte za M, $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, $(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi})$ odgovarajuće karte od TM. Skupovi $\tilde{\varphi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \varphi(U \cap V) \times \mathbf{R}^n$ i $\tilde{\psi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \psi(U \cap V) \times \mathbf{R}^n$ su otvoreni u $\mathbf{R}^{2n}$. Funkcija prijelaza (zamjena varijabli!)

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbf{R}^n \to \psi(U \cap V) \times \mathbf{R}^n$$

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n) = \left(\tilde{x}^1(x), \ldots, \tilde{x}^n(x), \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^j}(x)v^j, \ldots, \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j}(x)v^j\right)$$

je glatko preslikavanje.

Prebrojivi pokrivač $\{U_i\}$ od M daje prebrojivi pokrivač $\{\pi^{-1}(U_i)\}$ od TM koji zadovoljava uvjete 1°–4° Propozicije o konstrukciji mnogostrukosti.

Uvjet 5° – Hausdorffov uvjet:

1° svake dvije točke iz istog vlakna leže u istoj koordinatnoj domeni;

2° ako točke nisu iz istog vlakna, tada postoje disjunktne koordinatne domene U, V na M, $p \in U$, $q \in V$. Tada su i skupovi $\pi^{-1}(U)$, $\pi^{-1}(V)$ disjunktne koordinatne domene za (p, X), (q, Y).

Preslikavanje π je glatko: koordinatni prikaz s obzirom na karte (U, φ) od M i $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ od TM je

$$\hat{\pi}(x, v) = x, \;\; x = \varphi(p).$$

□

Koordinate (x^i, v^i) za elemente tangencijalnog svežnja nazivaju se *standardne koordinate*.

Primjer 1. Tangencijalni svežanj $T\mathbf{R}^n$ je difeomorfan s $\mathbf{R}^{2n}$.

Tangencijalni svežanj kao glatki vektorski svežanj

Definicija 3.19 *Neka je M glatka mnogostrukost. (Glatki) vektorski svežanj ranga k nad M je glatka mnogostrukost E zajedno s glatkim surjektivnim preslikavanjem $\pi : E \to M$ koje zadovoljava:*

(i) za svaki $p \in M$ skup $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ (tzv. vlakno nad p) je snabdjeven strukturom realnog vektorskog prostora;

(ii) za svaki $p \in M$ postoji okolina U od p u M i difeomorfizam $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^k$ tako da komutira sljedeći dijagram (π_1 je projekcija na prvi faktor):

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbf{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\
U &
\end{tikzcd}$$

i restrikcija od Φ na E_p je linearni izomorfizam sa $E_p \to \{p\} \times \mathbf{R}^k \cong \mathbf{R}^k$.

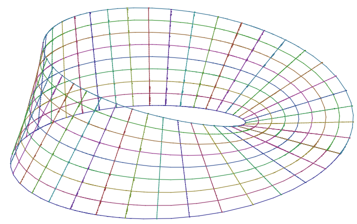
Mnogostrukost E se naziva *totalnim* ili *ukupnim* prostorom, mnogostrukost M *bazom*, a preslikavanje π *projekcijom*. Svako preslikavanje Φ se naziva *lokalnom trivijalizacijom* od E nad U. Ako postoji lokalna trivijalizacija nad cijelom mnogostrukošću M, tada se ona naziva *globalnom trivijalizacijom*, a E *trivijalnim svežnjem*.

Primjer 1. Produktna mnogostrukost $E = M \times \mathbf{R}^k$, $\pi = \pi_1 : M \times \mathbf{R}^k \to M$. Taj je svežanj očito trivijalan, globalna trivijalizacija je identiteta.

Primjer 2. (Lokalnost) Ako je $U \subset M$ otvoren skup, tada je podskup $E|_U = \pi^{-1}(U)$ opet vektorski svežanj. Njegova projekcija je restrikcija projekcije π na U.

Primjer 3. Möbiusov svežanj – glatki linijski svežanj nad S^1

Propozicija 3.20 *Tangencijalni svežanj TM glatke mnogostrukosti M je glatki vektorski svežanj ranga n.*



Dokaz. Uvjet (i) je očito ispunjen. U uvjetu (ii) kao okoline točke p koje su domene lokalne trivijalizacije uzimamo domene koordinatnih karata, a preslikavanja Φ kao koordinatna preslikavanja

$$\Phi(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = (p, (v^1, \ldots, v^n)).$$

Preslikavanje Φ je linearno na vlaknima, zadovoljava $\pi_1 \circ \Phi = \pi$, je glatko. □

Definicija 3.21 *Neka je E glatki vektorski svežanj nad M, $\pi : E \to M$ projekcija svežnja. Prerez od E (prerez preslikavanja π) je (neprekidno) preslikavanje $\sigma : M \to E$ za koje je $\pi \circ \sigma = Id_M$. Ako je $U \subset M$ otvoren skup, prerez restringiranog svežnja $E|_U$ naziva se lokalnim prerezom od E.*

Primjer. *Nul-prerez* je preslikavanje $\zeta : M \to E$

$$\zeta(p) = 0 \in E_p, \ \ p \in M.$$

3.5 Vektorska polja

Definicija 3.22 *Neka je M glatka mnogostrukost. Vektorsko polje na M je (neprekidno) preslikavanje $Y : M \to TM$, zadano kao $p \mapsto Y_p$, takvo da vrijedi*

$$\pi \circ Y = Id_M$$

ili, što je ekvivalentno, $Y_p \in T_pM$, za svaki $p \in M$.

Glatko vektorsko polje je vektorsko polje koje je glatko kao preslikavanje sa M u TM.

Drugačije rečeno, (glatko) vektorsko polje je (glatki) prerez tangencijalnog svežnja.

Primjer. Neka je $E = M \times \mathbf{R}^k$ trivijalni svežanj. Postoji prirodna bijekcija između (glatkih) prereza od E i (glatkih) funkcija $f : M \to \mathbf{R}^k$. Funkcija f određuje prerez $\tilde{f} : M \to M \times \mathbf{R}^k$, $\tilde{f}(x) = (x, f(x))$ i obratno. Specijalno, $C^\infty(M)$ se može identificirati sa glatkim prerezima svežnja $M \times \mathbf{R}$.

Neka je $Y : M \to TM$ vektorsko polje, $(U, (x^i))$ koordinatna karta za M. Tada možemo pisati

$$Y_p = Y^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p,$$

gdje su $Y^i : U \to \mathbf{R}$ koordinatne (komponentne) funkcije vektorskog polja Y u danoj karti.

Propozicija 3.23 (Kriterij za glatka vektorska polja) *Neka je M glatka mnogostrukost, $Y : M \to TM$ vektorsko polje, $(U,(x^i))$ koordinatna karta za M. Vektorsko polje Y je glatko na U ako i samo ako su mu koordinatne funkcije s obzirom na danu kartu glatke.*

Dokaz. Neka su (x^i, v^i) standardne koordinate na $\pi^{-1}(U) \subset TM$ pridružene karti $(U,(x^i))$ od M. Neka je $Y : M \to TM$ vektorsko polje. Njegov koordinatni prikaz s obzirom na izabranu kartu je

$$\hat{Y}(x) = (x^1, \ldots, x^n, Y^1(x), \ldots, Y^n(x)),$$

gdje je $Y^i(x)$ i-ta koordinatna funkcija od Y. Odavde očito slijedi da je polje Y glatko ako i samo su glatke koordinatne funkcije Y^i. $\square$

Primjer 1. Ako je $(U,(x^i))$ koordinatna karta na M, preslikavanja

$$p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$$

definiraju n glatkih vektorskih polja na U, tzv. *koordinatna vektorska polja.* Oznaka: $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

Propozicija 3.24 *Neka je M glatka mnogostrukost. Ako je $p \in M$, $X \in T_pM$, tada postoji glatko vektorsko polje $\tilde{X}$ na M takvo da je $\tilde{X}_p = X$.*

Dokaz. Neka je $(U,(x^i))$ koordinatna karta oko p, $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}|_p$ u toj karti. Neka je ψ *bump-funkcija* s nosačem u U, $\psi(p) = 1$. Definirajmo vektorsko polje $\tilde{X}$

$$\tilde{X}_q = \begin{cases} \psi(q) X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_q, & q \in U \\ 0, & q \in M \setminus \operatorname{supp} \psi. \end{cases}$$

Očito je $\tilde{X}$ glatko vektorsko polje, $\tilde{X}_p = \psi(p) X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = X$. $\square$

Označimo sa $\mathcal{T}(M)$ (ili $\mathcal{X}(M)$) skup svih glatkih vektorskih polja na M. Možemo ga organizirati u realni vektorski prostor

$$(X+Y)_p = X_p + Y_p, \;\; (aX)_p = aX_p, \;\; a \in \mathbf{R}.$$

Nul-vektorsko polje je vektorsko polje koje svakoj točki $p \in M$ pridružuje nul-vektor iz T_pM (usporedi: nul-prerez).

Definiramo množenje vektorskih polja glatkim realnim funkcijama

$$(fY)_p = f(p) Y_p,$$

gdje je $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathcal{T}(M)$. Tada je fY ponovno jedno glatko vektorsko polje na M.

Time $\mathcal{T}(M)$ postaje modul nad prstenom $C^\infty(M)$ $(X + Y \in \mathcal{T}(M),\, fX \in \mathcal{T}(M))$.

Sada možemo pisati

$$Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

gdje su Y^i koordinatne funkcije polja Y.

Nadalje, vektorska polja djeluju na funkcije: neka je $X \in \mathcal{T}(M)$, $f \in C^\infty(U)$, $U \subset M$ otvoren.

Funkcija $Xf : U \to \mathbf{R}$ je definirana sa

$$Xf(p) = X_p f.$$

Zbog lokalnosti djelovanja tangencijalnog vektora na funkcije (funkcija zadana u proizvoljno maloj okolini točke) slijedi i da je Xf lokalno definirano, tj. za svaki otvoren skup $V \subset U$ vrijedi

$$(Xf)|_V = X(f|_V).$$

Propozicija 3.25 (Kriterij za glatka vektorska polja, II) *Neka je M glatka mnogostrukost, $Y : M \to TM$ vektorsko polje. Polje Y je glatko ako i samo ako je za svaki otvoren skup $U \subset M$ i svaku funkciju $f \in C^\infty(U)$ funkcija $Yf : U \to \mathbf{R}$ glatka.*

Dokaz. Neka je Y vektorsko polje za koje je Yf glatko za svaku glatku funkciju f. Neka su x^i glatke koordinate na $U \subset M$. Tada su one glatke funkcije na U. Prema pretpostavci fukcije Yx^i su glatke i vrijedi

$$Yx^i = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) = Y^i.$$

Sada propozicija 3.23 povlači da je Y glatko polje.

Obratno, neka je Y glatko vektorsko polje i neka je f glatka funkcija na U. Za svaku točku $p \in U$ možemo izabrati glatke koordinate (x^i) u okolini $W \subset U$ oko p, tako da za $x \in W$ vrijedi

$$Yf(x) = \left(Y^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}|_x \right) f = Y^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x).$$

Opet, jer su Y^i glatke funkcije, po propoziciji 3.23 slijedi da je Yf glatka funkcija na W, pa i na U. □

Prethodna propozicija povlači da glatko vektorsko polje $Y \in \mathcal{T}(M)$ definira glatko preslikavanje $f \mapsto Yf$ sa $C^\infty(M)$ na $C^\infty(M)$,

$$Yf : U \to \mathbf{R}, \;\; Yf(p) = Y_p f.$$

Zbog linearnosti derivacije Y_p, to je preslikavanje linearno nad $\mathbf{R}$

$$Y(af + bg)(p) = Y_p(af + bg) = aY_p f + bY_p g = aYf(p) + bYg(p) = (aYf + bYg)(p)$$

i zadovoljava

$$Y(fg)(p) = Y_p(fg) = f(p)Y_p(g) + g(p)Y_p f = f(p)Yg(p) + g(p)Yf(p) = (fYg + gYf)(p).$$

Preslikavanje $Y : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ naziva se također derivacija. Sljedeća propozicija identificira glatka vektorska polja s derivacijama od $C^\infty(M)$:

Propozicija 3.26 *Neka je M glatka mnogostrukost. Preslikavanje $\mathcal{Y} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ je derivacija ako i samo ako je $\mathcal{Y}f = Yf$, za neko glatko vektorsko polje $Y \in \mathcal{T}(M)$.*

Dokaz. Već je prikazano kako vektorsko polje Y određuje derivaciju $\mathcal{Y}$.

Obratno, neka je $\mathcal{Y} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ derivacija. Odredimo glatko vektorsko polje Y. U točki $p \in M$ mora vrijediti

$$Y_p f = (\mathcal{Y}f)(p).$$

Time je definirano preslikavanje $Y : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$ koje linearno ovisi o f i u točki p zadovoljava produktnu formulu. Prema tome, preslikavanje Y je derivacija od $C^\infty(M)$ u p.

Treba pokazati da je preslikavanje $p \mapsto Y_p$ glatko vektorsko polje. □

Definicija 3.27 *Neka je $E \to M$ vektorski svežanj ranga k, $U \subset M$ otvoren. Za lokalne prereze $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ od E nad U kažemo da su linearno nezavisni ako su vektori $\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)$ linearno nezavisni u E_p za svaki $p \in U$, i da razapinju (generiraju) E ako vektori $\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)$ razapinju E_p za svaki $p \in U$. Lokalni reper za E nad U je uređena k-torka nezavisnih prereza nad U koja razapinje E (tj. baza za E_p). Glatki lokalni reper je lokalni reper za koji su svi prerezi glatki.*

Ako je $U = M$, tada reper nazivamo globalnim.

Ako je M glatka mnogostrukost, pod *lokalnim reperom* za M podrazumijevamo lokalni reper od TM nad nekim otvorenim podskupom U od M. Kažemo da je M *paralelizabilna* ako dopušta glatki globalni reper (to je ako i samo ako je njezin tangencijalni svežanj trivijalan).

Propozicija 3.28 *Vektorski svežanj je trivijalan ako i samo ako dopušta glatki globalni reper.*

3.6 *Push-forward* vektorskih polja

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje glatkih mnogostrukosti, Y glatko vektorsko polje na M. Tada je za svaku točku $p \in M$, $Y_p \in T_pM$. *Push-forward* preslikavanja F vektoru Y_p pridružuje vektor $F_*Y_p \in T_{F(p)}N$. Da li je na taj način definirano vektorsko polje na N?

Uočimo:

- Ako F nije surjekcija, tada točki $q \in N \setminus F(M)$ nije pridružen niti jedan vektor;
- Ako F nije injekcija, tada postoje točke u N u kojima se dobiva više vektora pomoću *push-forward*-a vektora u različitim točkama domene.

Dakle, općenito, *push-forward* vektorskog polja na domeni, nije vektorsko polje na kodomeni.

Definicija 3.29 *Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, Y vektorsko polje na M. Ako postoji vektorsko polje Z na N takvo da za svaku točku $p \in M$ vrijedi*

$$F_*Y_p = Z_{F(p)}$$

tada kažemo da su polja Y i Z F-povezana.

Propozicija 3.30 *Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, $Y \in \mathcal{T}(M)$, $Z \in \mathcal{T}(N)$, Polja Y i Z su F-povezana ako i samo ako za svaku funkciju $f \in C^\infty(V)$, V je otvoren skup u N, vrijedi*

$$Y(f \circ F) = (Zf) \circ F.$$

Dokaz. Neka je $p \in M$, f glatka funkcija oko $F(p)$. Tada je

$$Y(f \circ F)(p) = Y_p(f \circ F) = (F_*Y_p)f,$$

$$(Zf) \circ F(p) = (Zf)(F(p)) = Z_{F(p)}f.$$

□

Primjer 1. Neka je $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $F(t) = (\cos t, \sin t)$, F je glatko preslikavanje. Na $\mathbf{R}$ je zadano glatko vektorsko polje $Y = \frac{d}{dt}$, a na $\mathbf{R}^2$ polje $Z = x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$. Tada su polja Y i Z F-povezana.

Propozicija 3.31 *Neka je $F : M \to N$ difeomorfizam. Tada za svaki $Y \in \mathcal{T}(M)$ postoji jedinstveno glatko vektorsko polje na N koje je F-povezano s Y.*

To se polje zove *push-forward* vektorskog polja Y.

Dokaz. Kako je F difeomorfizam, definiramo

$$Z_q = F_*(Y_{F^{-1}(q)}).$$

□

Neka su V, W glatka vektorska polja na M. Općenito $f \mapsto VWf$ nije vektorsko polje.

Definicija 3.32 *Lie-jeva zagrada glatkih vektorskih polja V, W na M je linearni operator $[V, W] : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$*

$$[V, W]f = VWf - WVf.$$

Propozicija 3.33 *Lie-jeva zagrada para glatkih vektorskih polja je glatko vektorsko polje.*

Dokaz. Po propoziciji 3.26, dovoljno je pokazati da je $[V, W]$ derivacija na $C^\infty(M)$.
Neka su $f, g \in C^\infty(M)$. Tada je

$$[V, W](fg) = V(W(fg)) - W(V(fg)) = V(fWg + gWf) - W(fVg + gVf)$$
$$= Vf\,Wg + fVWg + Vg\,Wf + gVWf - Wf\,Vg - fWVg - WgVf - gWVf$$
$$= fVWg + gVWf - fWVg - gWVf = f[V, W]g + g[V, W]f.$$

□

Vrijednost vektorskog polja $[V, W]$ u točki p

$$[V, W]_p(f) = V_p(Wf) - W_p(Vf).$$

Propozicija 3.34 *Neka su V, W glatka vektorska polja na M, $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $W = W^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ njihovi koordinatni prikazi s obzirom na lokalne koordinate $(U, (x^i))$ od M. Tada $[V, W]$ ima sljedeći koordinatni prikaz*

$$[V, W] = \left(V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} - W^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j},$$

ili

$$[V, W] = (VW^j - WV^j) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Primjer. Neka je $V = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x(y+1)\frac{\partial}{\partial z}$, $W = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$. Odredite koordinatni prikaz od $[V, W]$ koristeći definiciju i prethodnu propoziciju.

Primjer. Vrijedi

$$[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0.$$

Svojstva Liejeve zagrade.

1° Bilinearnost u prvom i drugom faktoru: $[aV + bW, X] = a[V, X] + b[W, X]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $V, W, X \in \mathcal{T}(M)$

2° Antisimetričnost: $[V, W] = -[W, V]$

3° Jacobijev identitet: $[V, [W, X]] + [W, [X, V]] + [X, [V, W]] = 0$

4° Za $f, g \in C^\infty(M)$ vrijedi $[fV, gW] = fg[V, W] + (fVg)W - (gWf)V$.

Propozicija 3.35 *Neka je $F : M \to N$ difeomorfizam, $V, W \in \mathcal{T}(M)$. Tada je $F_*[V, W] = [F_*V, F_*W]$.*

Klasična diferencijalna geometrija

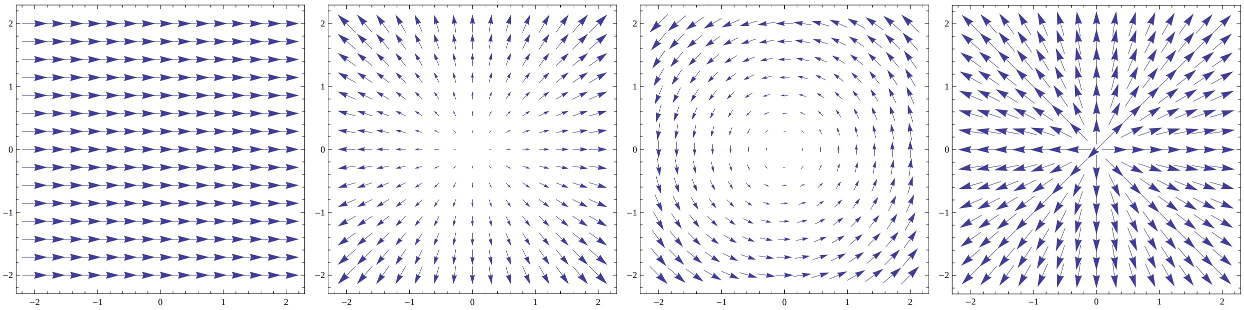
Vektorsko polje na otvorenom skupu $U \subset \mathbf{R}^n$ je pridruživanje vektora svakoj točki iz U.

Primjer.

$$(x, y) \mapsto (1, 0), \ \ (x, y) \mapsto (x, y),$$
$$(x, y) \mapsto (-y, x), \ \ (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Pišemo

$$V = \frac{\partial}{\partial x}, \ \ V = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},$$
$$V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \ \ V = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}.$$



Slika 2: Vektorska polja na $\mathbf{R}^2$

Primjer. Neka je $V = y^2\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$, $W = \frac{\partial}{\partial y}$, $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = y^3$. Izračunajte:

$$Vf, \ \ fV, \ \ Vg, \ \ V(fg), \ \ V(Vf), \ \ V(Wf), V(W(fg)), \ \ fV(Wg) + gV(Wf).$$

Integralna krivulja vektorskog polja X na $U \subset \mathbf{R}^n$ je parametrizirana krivulja $c : I \to \mathbf{R}^n$ takva da je $c(I) \subset U$ i $\dot{c} = X(c(t))$.

Primjer. Neka je $V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$. Tražimo krivulju $c : I \to \mathbf{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$, $\dot{c} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \dot{x}(t)\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}(t)\frac{\partial}{\partial y}$. Dobiva se sustav ODJ

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t). \end{aligned}$$

Rješenje sustava je za $a, b \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos t - b\sin t \\ y(t) &= a\sin t + b\sin t. \end{aligned}$$

Napomena. Hairy Ball Theorem (Češljanje ježa): Na sferi S^2 ne postoji neprekidno vektorsko (tangencijalno) polje koje nigdje ne iščezava. (1912. Brouwer). Zbog toga, S^2 nije paralelizabilna.

Može se pokazati da postoji glatko vektorsko polje na S^2 koje iščezava u točno jednoj točki (stereografskom projekcijom).

Zadaci

1. Pokažite da je tangencijalni svežanj TS^1 od S^1 mnogostrukost difeomorfna s $S^1 \times \mathbf{R}$.
2. Pokažite da je mnogostrukost S^1 paralelizabilna.
3. Pokažite da je mnogostrukost $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ paralelizabilna.
4. Pokažite da postoji glatko vektorsko polje na S^2 koje iščezava u točno jednoj točki (stereografskom projekcijom).
5. Na $\mathbf{R}^4$ zadana su vektorska polja

$$\begin{aligned} X_1 &= -x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial}{\partial x^2} + x^4\frac{\partial}{\partial x^3} - x^3\frac{\partial}{\partial x^4} \\ X_2 &= -x^3\frac{\partial}{\partial x^1} - x^4\frac{\partial}{\partial x^2} + x^1\frac{\partial}{\partial x^3} + x^2\frac{\partial}{\partial x^4} \\ X_3 &= -x^4\frac{\partial}{\partial x^1} + x^3\frac{\partial}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial}{\partial x^3} + x^1\frac{\partial}{\partial x^4}. \end{aligned}$$

   Pokažite da postoje vektorska polja V_1, V_2, V_3 na S^3 koja su i-povezana s X_1, X_2, X_3, gdje je $i : S^3 \to \mathbf{R}^4$ inkluzija. Pomoću toga pokažite da je mnogostrukost S^3 paralelizabilna.
6. Izračunajte Lie-jeve zagrade $[X_i, X_j]$ za polja iz prethodnog zadatka.
7. Pokažite da je Lie-jeva zagrada $[V, W]$ linearni operator : $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$.
8. Izračunajte Lie-jevu zagradu $[V, W]$ za vektorska polja $V = xy^2\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, $W = z\frac{\partial}{\partial y}$ na $\mathbf{R}^3$.

4 KOTANGENCIJALNI SVEŽANJ

Motivacija: Tangencijalni vektori omogućuju bez-koordinatnu interpretaciju derivacije krivulje, tangencijalni kovektori omogućuju bez-koordinatnu interpretaciju derivacije realne funkcije na mnogostrukosti.

4.1 Dualni vektorski prostor

Neka je V (realni) vektorski prostor, $\dim V < \infty$, V^* dualni prostor od V, tj. prostor svih linearnih funkcionala na V

$$V^* = \{f : V \to \mathbf{R} |\ f \text{ linearan}\}.$$

V^* je vektorski prostor uz uobičajene operacije zbrajanja funkcija i množenja funkcija skalarom. Njegove elemente zovemo *kovektori.*

Dualna baza za V^*: neka je $(e_1, \dots, e_n)$ baza za V, definiramo kovektore $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ djelovanjem na bazi

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Kovektori $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ čine bazu od V^* koju nazivamo *dualnom bazom* baze $(e_1, \dots, e_n)$. Odatle slijedi $\dim V^* = \dim V < \infty$. Pišemo $e_i^* = \epsilon^i$.

Primjer. Dualna baza na $\mathbf{R}^n$. Neka je $(e_1, \dots, e_n)$ standardna baza za $\mathbf{R}^n$. Označimo sa $(e^1, \dots, e^n)$ dualnu bazu (standardna baza za V^*). Za vektor $v \in \mathbf{R}^n$, $v = v^i e_i$, vrijedi

$$e^i(v) = v^i.$$

Matrični prikaz kovektora (= linearnih operatora : $V \to \mathbf{R}$) je $(1, n)$ matrica (matrica redak). Pišemo

$$e^i = (0 \dots 0\ 1\ 0 \dots 0).$$

Općenito, ako je V vektorski prostor, (E_i) baza za V, (ϵ^j) dualna baza, $X \in V$, $X = X^i E_i$, tada je

$$\epsilon^j(X) = X^j.$$

Ako je $\omega \in V^*$ po volji odabrani kovektor, $\omega = \omega_j \epsilon^j$, tada je

$$\omega_j = \omega(E_j).$$

Odavde

$$\omega(X) = \omega_j X^j.$$

Neka su V, W vektorski prostori, $A : V \to W$ linearni operator. Definiramo preslikavanje

$$A^* : W^* \to V^*$$

$$A^*(\omega)(X) = \omega(AX), \ \ \omega \in W^*, \ \ X \in V.$$

Preslikavanje A^* je linearni operator kojeg nazivamo *dualni (transponirani)* operator.

Dualni operator ima sljedeća svojstva:

1° $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$

2° $(Id_V)^* : V^* \to V^*$ je identiteta na V^*.

Drugi dual $V^{**} := (V^*)^* \cong V$, itd. Postoji prirodni izomorfizam vektorskih prostora V i V^{**}: vektoru $X \in V$ pridružen je linearni funkcional $\xi(X) : V^* \to \mathbf{R}$ ($\xi(X) \in V^{**}$) definiran sa

$$\xi(X)(\omega) = \omega(X), \ \ \omega \in V^*. \tag{4.2}$$

Propozicija 4.1 *Ako je dim$V < \infty$, tada je preslikavanje $\xi : V \to V^{**}$ izomorfizam.*

Definiramo *sparivanje* vektora i kovektora kao djelovanje forme na vektoru

$$\langle \omega, X \rangle = \omega(X),$$

odnosno zbog (4.2) kao djelovanje kovektora $\xi(X)$ (kojeg identificiramo s X) na formi,

$$\langle \omega, X \rangle = \xi(X)(\omega).$$

Oznaka $\langle \omega, X \rangle$ ili $\langle X, \omega \rangle$ u tom smislu nudi "simetričnu notaciju".

4.2 Tangencijalni kovektori na mnogostrukosti

Neka je M glatka mnogostrukost, T_pM tangencijalni prostor u $p \in M$. Kotangencijalni prostor u $p \in M$

$$T_p^*M = (T_pM)^*.$$

Elementi od T_p^*M nazivaju se *tangencijalni kovektori* ili *kotangencijalni vektori* u p.

Koordinatni prikaz tangencijalnih kovektora

Neka je $(U, (x^i))$ koordinatna karta na M, $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$ standardna baza za tangencijalni prostor. Označimo dualnu bazu $(\lambda^i|_p)$. Za $\omega \in T_p^*M$, $\omega = \omega_i \lambda^i|_p$ vrijedi

$$\omega_i = \omega(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p).$$

Promjena koordinata. Neka su $(\widetilde{x}^j)$ druge lokalne koordinate oko točke p, $(\widetilde{\lambda}^i|_p)$ dualna baza za $(\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^i}|_p)$. Odredimo koordinate kovektora ω s obzirom na obje baze.
Za tangencijalne vektore vrijedi (lančano pravilo)

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^j}|_p. \tag{4.3}$$

Za kovektor ω vrijedi

$$\omega = \omega_i \lambda^i|_p = \widetilde{\omega}_j \widetilde{\lambda}^j|_p,$$

te je

$$\omega_i = \omega(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = \omega\left(\frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^j}|_p\right) = \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\widetilde{\omega}_j.$$

Transformacija koordinata tangencijalnih vektora

$$\widetilde{X}^j = \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i}(p) X^i \tag{4.4}$$

Transformacija koordinata tangencijalnih kovektora

$$\omega_i = \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\widetilde{\omega}_j \tag{4.5}$$

Transformacija (4.3) direktno slijedi iz lančanog pravila, te se smatra fundamentalnom. Uočimo transformacije (4.4) i (4.5).

Tangencijalne kovektore nazivamo *kovarijantnima* jer se njihove komponente transformiraju na isti način kao u transformaciji (4.3) (množenjem Jacobijeve matrice s "novim koordinatama" da bi se dobilo "stare koordinate"). Tangencijalne vektore nazivamo *kontravarijantnima.*

Kotangencijalni svežanj kao glatka mnogostrukost i vektorski svežanj

Disjunktna unija

$$T^*M = \coprod_{p\in M} T^*_pM$$

naziva se *kotangencijalni svežanj* od M. Prirodna projekcija $\pi : T^*M \to M$ preslikava $\omega \in T^*_pM$ u $p \in M$.

Za glatke lokalne koordinate $(U,(x^i))$, baza od T^*_pM dualna bazi $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$ je $(\lambda^i|_p)$. Definirana su preslikavanja $\lambda^1,\ldots,\lambda^n : U \to T^*M$ koja se nazivaju *koordinatna kovektorska polja.*

Propozicija 4.2 *Neka je M glatka mnogostrukost, T^*M kotangencijalni svežanj od M. Uz standardnu projekciju i prirodnu strukturu vektorskog prostora na svakom vlaknu, T^*M ima jedinstvenu strukturu glatke mnogostrukosti uz koju postaje vektorski svežanj nad M za koji su sva koordinatna kovektorska polja glatki lokalni prerezi.*

Dokaz. Neka je (U,φ) glatka koordinatna karta na M, $\varphi(p) = (x^1(p),\ldots,x^n(p))$. Koordinatnu kartu na T^*M definiramo kao $(\pi^{-1}(U),\widetilde{\varphi})$, gdje je $\widetilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbf{R}^{2n}$

$$\widetilde{\varphi}(\omega_i\lambda^i|_p) = (x^1(p),\ldots,x^n(p),\omega_1,\ldots,\omega_n).$$

Te se koordinate nazivaju se *standardnim lokalnim koordinatama* na T^*M.

Funkcija prijelaza: Neka su (U,φ) i (V,ψ) dvije glatke karte za M, $(\pi^{-1}(U),\widetilde{\varphi})$, $(\pi^{-1}(V),\widetilde{\psi})$ odgovarajuće karte od T^*M. Tada je

$$\widetilde{\varphi}\circ\widetilde{\psi}^{-1}(\widetilde{x}^1,\ldots,\widetilde{x}^n,\widetilde{\omega}_1,\ldots,\widetilde{\omega}_n) = \left(x^1(\widetilde{x}),\ldots,x^n(\widetilde{x}),\frac{\partial\widetilde{x}^j}{\partial x^1}(\widetilde{x})\widetilde{\omega}_j,\ldots,\frac{\partial\widetilde{x}^j}{\partial x^n}(\widetilde{x})\widetilde{\omega}_j\right)$$

glatko preslikavanje.

Lokalna trivijalizacija: $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^n$

$$\Phi(\omega_i\lambda^i|_p) = (p,(\omega_1,\ldots,\omega_n)).$$

Preslikavanje Φ je očito linearno na vlaknima i vrijedi $\pi_1\circ\Phi = \pi$. Uočimo da je kompozicija

$$\pi^{-1}(U) \to U\times\mathbf{R}^n \to \varphi(U)\times\mathbf{R}^n$$

jednaka koordinatnom preslikavanju $\widetilde{\varphi}$. □

Definicija 4.3 *Prerez svežnja T^*M naziva se kovektorskim poljem ili diferencijalnom 1-formom.*

Neka je ω kovektorsko polje. Pišemo $\omega_p = \omega(p)$.

U lokalnim koordinatama na $U \subset M$, kovektorsko polje ω ima prikaz preko koordinatnih kovektorskih polja (λ^i) kao $\omega = \omega_i \lambda^i$, gdje su $\omega_i : U \to \mathbf{R}$ koordinatne (komponentne) funkcije. Za njih vrijedi

$$\omega_i(p) = \omega_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \right).$$

Propozicija 4.4 (Kriterij za glatka kovektorska polja) *Neka je M glatka mnogostrukost, $\omega : M \to T^*M$ kovektorsko polje.*

1° *Ako je $\omega = \omega_i \lambda^i$ u nekoj glatkoj koordinatnoj karti od M, tada je ω glatko polje ako i samo ako je su njegove koordinatne funkcije ω_i glatke.*

2° *ω je glatko ako i samo ako je za svako glatko vektorsko polje X na otvorenom podskupu $U \subset M$, funkcija $\langle \omega, X \rangle$ definirana sa*

$$\langle \omega, X \rangle(p) = \langle \omega_p, X_p \rangle = \omega_p(X_p)$$

je glatka.

Lokalni koreper je uređena n-torka $(\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n)$ kovektorskih polja definiranih na nekom otvorenom podskupu $U \subset M$ takvih da $(\epsilon|_p)$ čine bazu za T_p^*M, $p \in M$. Ako je $U = M$, tada govorimo o *globalnom koreperu.*

Ako je (E_i) lokalni reper za TM nad U, tada je jedinstveno određen lokalni koreper (ϵ^i) koji zadovoljava

$$\epsilon^i(E_j) = \delta^i_j.$$

Taj se koreper naziva *dualnim koreperom* danog repera. Dualni reper je glatki koreper, ako je (E_i) glatki reper (slijedi iz drugog dijela propozicije).

Primjerice, u danoj koordinatnoj karti, koordinatna kovektorska polja (λ^i) čine glatki lokalni koreper, nazivamo ga *standardnim koreperom.*

Označimo sa $\mathcal{T}^*M$ skup svih glatkih kovektorskih polja na M. Uz uobičajene operacije, $\mathcal{T}^*M$ je realan vektorski prostor.

Kovektorska polja možemo i množiti glatkim realnim funkcijama: za $f \in C^\infty(M)$ i $\omega \in \mathcal{T}^*M$ kovektorsko polje $f\omega$ definirano je s

$$(f\omega)_p = f(p)\omega_p.$$

Time $\mathcal{T}^*M$ postaje modul nad $C^\infty(M)$.

4.3 Diferencijal funkcije

Primjer. Neka je $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = x^2$. Ako bismo $\operatorname{grad} f$ definirali kao vektorsko polje $X = \operatorname{grad} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} = 2x \frac{\partial}{\partial x}$, onda ovakva definicija gradijenta ne bi bila neovisna o koordinatama – u polarnim koordinatama (r, φ) na $\mathbf{R}^2$, X ne bi bilo jednako "vektoru parcijalnih derivacija" čiji bi prikaz u bazi odgovarajućih tangencijalnih vektora glasio

$$\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Pokazuje se će se "koordinatni prikaz od parcijalnih derivacija" dobro ponašati pri zamjeni koordinata, ako je to prikaz kovektora, a ne vektora. Stoga gradijent realne funkcije definiramo kao diferencijal funkcije:

Definicija 4.5 *Neka je f glatka realna funkcija na glatkoj mnogostrukosti M. Kovektorsko polje df definirano s*

$$df_p(X_p) = X_p(f), \quad X_p \in T_pM$$

naziva se diferencijalom funkcije f.

Propozicija 4.6 *Diferencijal glatke funkcije je glatko kovektorsko polje.*

Dokaz. Očito $df_p(X_p)$ ovisi linearno o X_p.

Nadalje, koristeći Propoziciju 4.4 zaključujemo da je df glatko polje, jer je funkcija

$$\langle df, X\rangle = Xf$$

glatka. □

Koordinatni prikaz diferencijala funkcije. Neka su $(U,(x^i))$ glatke koordinate na M, (λ^i) koordinatni dualni koreper. Tada je

$$df_p = A_i(p)\lambda^i|_p,$$

gdje su $A_i : U \to \mathbf{R}$ funkcije za koje vrijedi

$$A_i(p) = df_p(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

odakle je

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\lambda^i|_p.$$

Koordinatne funkcije od df s obzirom na po volji odabranu koordinatnu kartu su parcijalne derivacije od f s obzirom na koordinate. Zbog toga, df smatramo analogonom klasičnog gradijenta.

Koordinatni prikaz diferencijala funkcije x^j. Primijenimo prethodno na koordinatne funkcije x^j, $x^j(x^1,\ldots,x^n) = x^j$, $j = 1,\ldots,n$. Dobivamo

$$dx^j : U \to \mathbf{R}$$

$$dx^j|_p = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p)\lambda^i|_p = \lambda^j|_p.$$

Zaključak: Koordinatni dualni koreper je (dx^j).

Prema tome

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dx^i|_p$$

odnosno

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i.$$

Primjer. Diferencijal funkcije $f(x,y) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = x^2y\cos x$ dan je s

$$df = (2xy\cos x - x^2y\sin x)dx + x^2\cos x dy.$$

Propozicija 4.7 (Svojstva diferencijala) *Neka je M glatka mnogostrukost, $f, g \in C^\infty(M)$. Tada je*

1° $d(af + bg) = a\,df + b\,dg, \quad a, b \in \mathbf{R}$

2° *$d(fg) = f\,dg + g\,df$*

3° *$d(f/g) = (g\,df - f\,dg)/g^2, \; g \neq 0$*

4° *$d(h \circ f) = (h' \circ f)df$, gdje je $h : J \to \mathbf{R}$, $Imf \subset J$*

5° *Ako je f konstantna funkcija, tada je $df = 0$.*

Propozicija 4.8 *Neka je M glatka mnogostrukost, $f \in C^\infty(M)$. Tada je $df = 0$ ako i samo ako je f konstantna na svakoj komponenti povezanosti od M.*

Interpretacija. Linearni funkcional df_p je najbolja aproksimacija od $\triangle f$ oko p, gdje je $\triangle f = f(p+v) - f(p)$. Zaista

$$\triangle f \approx \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)v^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dx^i|_p(v) = df_p(v).$$

Propozicija 4.9 *Neka je M glatka mnogostrukost, $c : I \to M$ glatka krivulja, $f \in C^\infty(M)$. Derivacija glatke funkcije $f \circ c : I \to \mathbf{R}$ je dana s*

$$(f \circ c)'(t) = df_{c(t)}(c'(t)).$$

Dokaz.

$$df_{c(t_0)}(c'(t_0)) = c'(t_0)f = (c_* \frac{d}{dt}|_{t_0})f = \frac{d}{dt}|_{t_0}(f \circ c) = (f \circ c)'(t_0).$$

□

Napomena. Za $f : M \to \mathbf{R}$ definirali smo linearna preslikavanja

$$f_* : T_pM \to T_{f(p)}\mathbf{R}$$

i

$$df : T_pM \to \mathbf{R}.$$

Njihovi matrični prikazi u standardnim bazama su matrice retci parcijalnih derivacija funkcije f.

4.4 Povlak

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, $p \in M$, *push-forward* od F

$$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N,$$

Povlak (*pullback*) je dualno preslikavanje

$$(F_*)^* : T^*_{F(p)}N \to T^*_pM.$$

Pišemo

$$F^* = (F_*)^*.$$

Djelovanje: $\omega \in T^*_{F(p)}N, \;\; X \in T_pM$

$$(F^*\omega)(X) = \omega(F_*X).$$

Dakle, povlak kotangencijalnom vektoru na N pridružuje kotangencijalni vektor na M.

Definirajmo sad povlak kovektorskih polja. Neka je $G : M \to N$ glatko preslikavanje, ω glatko kovektorsko polje na N. Definiramo $G^*\omega$ na M kao

$$(G^*\omega)_p = G^*(\omega_{G(p)}).$$

Uočimo da je, za razliku od vektorskih polja, povlak kovektorskog polja uvijek dobro definiran. Treba dokazati da je na taj način definirano glatko kovektorsko polje (Propozicija 4.11).

Lema 4.10 *Neka je $G : M \to N$ glatko preslikavanje, $f \in C^\infty(N)$, $\omega \in \mathcal{T}^*(N)$. Tada je*

$$G^* df = d(f \circ G),$$

$$G^*(f\omega) = (f \circ G)G^*\omega.$$

Propozicija 4.11 *Neka je $G : M \to N$ glatko preslikavanje, $\omega \in \mathcal{T}^*(N)$. Tada je $G^*\omega$ glatko kovektorsko polje na M.*

Dokaz. Neka je $p \in M$, (x^i) glatke koordinate u okolini p, (y^i) glatke koordinate u okolini $G(p)$. Koordinatni zapis kovektorskog polja ω

$$\omega = \omega_j dy^j.$$

Koristeći lemu dvaput dobivamo

$$G^*\omega = G^*(\omega_j dy^j) = (\omega_j \circ G)G^* dy^j = (\omega_j \circ G)d(y^j \circ G).$$

Odavde slijedi tvrdnja. □

Računanje povlaka u koordinatama:

$$G^*\omega = G^*(\omega_j dy^j) = (\omega_j \circ G)G^*(y^j \circ G) = (\omega_j \circ G)d(G^j),$$

gdje je G^j j-ta koordinatna funkcija od G u danim koordinatama.

Primjer. $G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $G(x, y, z) = (x^2 y, y \sin z) = (u, v)$, $\omega \in \mathcal{T}^*(\mathbf{R}^2)$

$$\omega = udv + vdu.$$

Povlak od ω po G dan je sa

$$\begin{aligned} G^*\omega &= (u \circ G)d(v \circ G) + (v \circ G)d(u \circ G) \\ &= 2xy^2 \sin z dx + 2x^2 y \sin z dy + x^2 y^2 \cos z dz. \end{aligned}$$

4.5 Krivuljni integral

Primjer. Krivuljni integral kovektorskog polja ω na $[a, b] \subset \mathbf{R}$

Neka je $\omega = f(t)dt$, gdje je t standardna koordinata na $\mathbf{R}$, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ glatka funkcija. Definiramo

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b f(t)dt.$$

Propozicija 4.12 *Neka je ω glatko kovektorsko polje na $[a, b] \subset \mathbf{R}$, $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ rastući difeomorfizam. Tada je*

$$\int_{[c,d]} \varphi^*\omega = \int_{[a,b]} \omega.$$

Dokaz. Neka je s standardna koordinata na $[c,d]$, tada je koordinatni prikaz povlaka $\varphi^*\omega$ jednak $(\varphi^*\omega)_s = f(\varphi(s))\varphi'(s)$ (koristiti Lemu 4.10). Sada koristiti formulu za zamjenu varijabli u običnom integralu. □

Neka je $c : [a,b] \to M$ glatka krivulja (*smooth curve segment* – ima glatko proširenje na otvoreni interval koji sadrži $[a,b]$), ω glatko kovektorsko polje na glatkoj mnogostrukosti M. Krivuljni integral od ω duž c definiramo kao realan broj

$$\int_c \omega = \int_{[a,b]} c^*\omega.$$

Definicija se može generalizirati i na po dijelovima glatku krivulju $c : [a,b] \to M$, tj. krivulju za koju postoji subdivizija $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ od $[a,b]$ takva da je restrikcija $c|_{[}a_i, a_{i+1}]$ glatka za svaki i.

Propozicija 4.13 *Neka je $c : [a,b] \to M$ (po dijelovima) glatka krivulja. Tada je*

$$\int_c \omega = \int_a^b \omega_{c(t)}(c'(t))dt.$$

Primjer. Neka je $M = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Neka je $c : [0, 2\pi] \to M$ krivulja

$$c(t) = (\cos t, \sin t).$$

Tada je

$$\int_c \omega = \int_{[0,2\pi]} \frac{\cos t(\cos tdt) - \sin t(-\sin tdt)}{\sin^2 t + \cos^2 t} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Teorem 4.14 (Fundamentalni teorem za linijske integrale) *Neka je M glatka mnogostrukost, $f : M \to \mathbf{R}$ glatka funkcija, $c : [a,b] \to M$ (po dijelovima) glatka krivulja. Tada je*

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a)).$$

Definicija 4.15 *Glatko kovektorsko polje ω je egzaktno na M ako postoji funkcija $f \in C^\infty(M)$ takva da je $\omega = df$. Funkcija f naziva se potencijalom od ω.*

Glatko kovektorsko polje ω je konzervativno ako je linijski integral od ω po bilo kojoj zatvorenoj po dijelovima glatkoj krivulji jednak 0.

Teorem 4.16 *Glatko kovektorsko polje je konzervativno ako i samo ako je egzaktno.*

Primjer. Kovektorsko polje na $M = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

nije egzaktno jer nije konzervativno.

Neka je f potencijal kovektorskog polja ω (dakle, ω je egzaktno), $(U, (x^i))$ koordinatna karta na M. Za glatku funkciju f vrijedi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}.$$

Ako pišemo $\omega = \omega_i dx^i$, tada uvjet $\omega = df$ povlači $\omega_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, te iz prethodnog slijedi

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}. \tag{4.6}$$

Definicija 4.17 *Glatko kovektorsko polje ω je zatvoreno na M ako komponente od ω u svakoj glatkoj karti zadovoljavaju (4.6).*

Lema 4.18 *Svako egzaktno kovektorsko polje je zatvoreno.*

Uočimo: Uvjet (4.6) nije potrebno provjeriti u *svakoj* koordinatnoj karti, nego za familiju karata koje pokrivaju M:

Propozicija 4.19 *Neka je ω glatko kovektorsko polje. Ako ω zadovoljava (4.6) u nekoj koordinatnoj karti oko svake točke, tada je ω zatvoreno polje.*

Propozicija 4.20 *Neka je $G : M \to N$ lokalni difeomoerfizam. Tada povlak $G^* : \mathcal{T}^*(N) \to \mathcal{T}^*(M)$ preslikava zatvorena kovektorska polja u zatvorena kovektorska polja, egzaktna kovektorska polja u egzaktna kovektorska polja.*

Primjer. Kovektorsko polje

$$\omega = y \cos xy dx + x \cos xy dy$$

je zatvoreno. Ono je egzaktno, jer $\omega = d(\sin xy)$.

Kovektorsko polje

$$\omega = x \cos xy dx + y \cos xy dy$$

nije zatvoreno, pa nije ni egzaktno.

Za podskup $U \subset \mathbf{R}^n$ kažemo da je zvjezdast, ako postoji točka $c \in U$ takva da je za svaku točku $x \in U$ dužina od c do x cijela sadržana u U.

Primjer. Pokazali smo da je kovektorsko polje

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

zatvoreno, ali da nije egzaktno na $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$.

Ako se restringiramo na desnu poluravninu $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\}$, tada vrijedi

$$\omega = d(\mathrm{arctg} \frac{y}{x}).$$

Propozicija 4.21 *Ako je U zvjezdasti otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$, tada je svako zatvoreno kovektorsko polje na U egzaktno.*

Korolar 4.22 *Neka je ω zatvoreno kovektorsko polje na glatkoj mnogostrukosti M. Tada za svaki $p \in M$ postoji okolina na kojoj je ω egzaktno.*

Napomena. Uočimo da činjenica je li zadano zatvoreno kovektorsko polje egzaktno, ovisi o obliku područja na kojem je polje zadano. De Rhamova kohomologija povezuje glatku strukturu mnogostrukosti i njenu topologiju.

Zadaci

1. Dokažite Propoziciju 4.1: Ako je $\dim V < \infty$, tada je preslikavanje $\xi : V \to V^{**}$ izomorfizam.

2. Veza polarnih i Kartezijevih koordinata na $\mathbf{R}^2$ dana je s $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

   (i) Odredite, koristeći (4.3), vezu između tangencijalnih vektora $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ sa $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

   (ii) Odredite vezu između kotangencijalnih vektora dx, dy i $dr, d\varphi$.

   Neka je $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2$.

   (iii) Definirajmo $X = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = 2x\frac{\partial}{\partial x}$. Pokažite da je tada u polarnim koordinatama $X = 2r\cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial r} - 2\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}$. Usporedite sa $\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}$.

   (iv) Neka je $\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx = 2xdx$. Odredite ω u polarnim koordinatama i uspredite sa $\frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi$.

3. Dokažite Lemu 4.10.

4. Izrecite i dokažite analogon Propozicije 4.12 uz zamjenu "padajući difeomorfizam".

5. Na $\mathbf{R}^3$ zadano je kovektorsko polje

$$\omega = ydx + (z\cos(yz) + x)dy + y\cos(yz)dz.$$

   Pokažite da je ω zatvoreno. Je li ω egzaktno? Ako je, odredite njegov potencijal. (Uputa. Uzastopnom integracijom, držeći neku varijablu fiksnom, dobivamo $\omega = df$, $f = xy + \sin(yz)$.)

5 PODMNOGOSTRUKOSTI

5.1 Preslikavanja konstantnog ranga

Cilj: Istražiti uvjete pod kojima je podskup glatke mnogostrukosti i sam glatka mnogostrukost.

Najpoznatiji primjeri mnogostrukosti javljaju se kao podskupovi mnogostrukosti, primjerice S^n, T^n – dakle, kao podmnogostrukosti.

Opisat ćemo ih na dva osnovna načina:

1° kao slike injektivnih imerzija (smještenja),

2° kao nivo–skupove submerzija.

Razlikovat ćemo: Smještene podmnogostrukosti, imerzirane podmnogostrukosti.

Koristit ćemo Teorem o inverznoj funkciji koji opisuje lokalno ponašanje glatkog preslikavanja preko njegovog *push–forwarda.*

Definicija 5.1 *Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje između glatkih mnogostrukosti M, N dimenzija m, n redom.* ***Rang*** *od F u točki $p \in M$ je rang linearnog operatora $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$. Ako F ima isti rang k u svim točkama od M, tada F nazivamo* ***preslikavanjem konstantnog ranga*** *i pišemo $rg\,F = k$.*

Definicija 5.2 ***Imerzija*** *je glatko preslikavanje $F : M \to N$ takvo da je F_* injektivno u svakoj točki od M.*
Submerzija *je glatko preslikavanje $F : M \to N$ takvo da je F_* surjektivno u svakoj točki od M.*
(Glatko) ***smještenje*** *je injektivna imerzija $F : M \to N$ koja je također i topološko smještenje, tj. homeomorfizam na sliku $F(M) \subset N$ u (relativnoj) induciranoj topologiji.*

Uočimo: $F : M \to N$ je

1° imerzija ako i samo ako je $rg\,F = dim\,M$,

2° submerzija ako i samo ako je $rg\,F = dim\,N$.

Primjer 1. Klasična diferencijalna geometrija krivulja i ploha

Glatka krivulja $c : I \to \mathbf{R}^3$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval, je regularna ako je $c'(t) \neq 0$, $t \in I$. To znači da je c_* injektivno (jer nije 0-operator) tj. c je imerzija.

Kod definicije ploha, glatka (lokalna) parametrizacija $\varphi : U \to \mathbf{R}^3$, $U \subset \mathbf{R}^2$ otvoren i povezan, je regularna ako su φ_1, φ_2 linearno nezavisni, te je φ opet imerzija.

Primjerice, glatko preslikavanje $X : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$

$$X(\varphi, \psi) = ((2 + \cos\varphi)\cos\psi, (2 + \cos\varphi)\sin\psi, \sin\varphi)$$

je imerzija s $\mathbf{R}^2$ u $\mathbf{R}^3$ kojemu je slika rotacijski torus u $\mathbf{R}^3$ (nastao rotacijom kružnice $(y-2)^2 + z^2 = 1$ oko z-osi. To preslikavanje inducira smještenje od $T^2 = S^1 \times S^1$ u $\mathbf{R}^3$ (preslikavanje $(\varphi, \psi) \mapsto (e^{i\varphi}, e^{i\psi})$ je natkrivajuće preslikavanje).

Primjer 2. Projekcija $\pi : \mathbf{R}^{n+k} \to \mathbf{R}^n$ na prvih n koordinata je submerzija. Općenitije, projekcija $\pi : M_1 \times \cdots \times M_k \to M_i$ je submerzija.

Primjer 3. Inkluzija $i : \mathbf{R}^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+k}$

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, 0 \dots, 0)$$

je smještenje. Općenitije, inkluzija $i : M_i \hookrightarrow M_1 \times \cdots \times M_k$ je smještenje.

Primjer 4. Lokalni difeomorfizam $F : M \to N$ je i imerzija i submerzija.

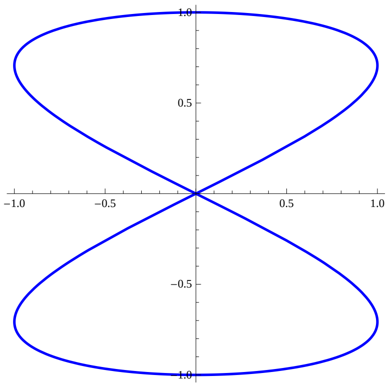
Primjer 5. Projekcija vektorskog svežnja $\pi : E \to M$ je submerzija.

Primjer 6. Injektivna imerzija koja nije smještenje – osmica (Lissajous-ova krivulja)

$$c : \langle -\pi/2, 3\pi/2 \rangle \to \mathbf{R}^2$$

$$c(t) = (\sin 2t, \cos t).$$

Njena slika se podudara sa skupom $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 = 4y^2(1 - y^2)\}$. Preslikavanje c je injektivna imerzija



jer c' nikad ne iščezava. Nije topološko smještenje, jer je njena slika kompaktan skup u relativnoj topologiji, dok njena domena to nije.

Propozicija 5.3 *Neka je $F : M \to N$ je injektivna imerzija. Ako vrijedi neki od uvjeta:*

1° *F je zatvoreno preslikavanje (preslikava zatvorene skupove u zatvorene)*

2° *F je pravo (*proper*) preslikavanje (praslika svakog kompaktnog skupa je kompakt)*

3° *M je kompakt,*

tada je F smještenje sa zatvorenom slikom.

Primjer. Pokazali smo da je inkluzija $i : S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ glatko preslikavanje. Kako je i_* također injekcija u svakoj točki, to je i injektivna imerzija. Propozicija 5.3 povlači da je i glatko smještenje.

Teorem 5.4 (Teorem o inverznom preslikavanju na $\mathbf{R}^n$) *Neka su U, V otvoreni podskupovi od $\mathbf{R}^n$, $F : U \to V$ glatko preslikavanje. Ako je $DF(p)$ regularan operator u nekoj točki $p \in U$, tada postoje povezane okoline $U_0 \subset U$ od p i $V_0 \subset V$ od $F(p)$ takve da je $F|_{U_0} : U_0 \to V_0$ difeomorfizam.*

Važna posljedica je sljedeći teorem – nelinearna verzija odgovarajućeg teorema za linearne operatore: za $T : V \to W$ linearni operator ranga r, postoje baze za V i W za koje je matrični prikaz operatora T jednak

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorem 5.5 (Teorem o rangu) *Neka su $U \subset \mathbf{R}^m$, $V \subset \mathbf{R}^n$ otvoreni podskupovi, $F : U \to V$ glatko preslikavanje konstantnog ranga k. Tada za svaku točku $p \in U$ postoji glatka koordinatna karta (U_0, φ) od $\mathbf{R}^m$ oko p, $\varphi(p) = 0$, i glatka koordinatna karta (V_0, ψ) od $\mathbf{R}^n$, $U_0 \subset U$, $F(U_0) \subset V_0 \subset V$, tako da vrijedi*

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0).$$

Iduća važna posljedica Teorema o inverznom preslikavanju je sljedeći teorem:

Teorem 5.6 (Teorem o implicitnom preslikavanju) *Neka je $U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ otvoren,*

$$(x, y) = (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^k).$$

Neka je $\Phi : U \to \mathbf{R}^k$ glatko preslikavanje, $(a, b) \in U$, $c = \Phi(a, b)$. Ako je matrica

$$(\frac{\partial \phi^i}{\partial y^j}(a, b)) \in M_k(\mathbf{R})$$

regularna, tada postoji okolina $V_0 \subset \mathbf{R}^n$ od a i okolina $W_0 \subset \mathbf{R}^k$ od b i glatko preslikavanje $F : V_0 \to W_0$ takvo da je $\Phi^{-1}(c) \cap V_0 \times W_0$ graf od F, tj. $\Phi(x, y) = c$ za $(x, y) \in V_0 \times W_0$ ako i samo ako je $y = F(x)$.

Teorem 5.7 (Teorem o inverznom preslikavanju za mnogostrukosti) *Neka su M, N glatke mnogostrukosti, $p \in M$, $F : M \to N$ glatko preslikavanje za koje je $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ bijekcija (tj. izomorfizam, regularni operator). Tada postoje povezane okoline U_0 oko p i V_0 oko $F(p)$ takve da je $F|_{U_0} : U_0 \to V_0$ difeomorfizam.*

Dokaz. Kako je F_* bijekcija, to M i N imaju iste dimenzije. Sada primijenimo euklidski rezultat na koordinatni prikaz od F. $\square$

Korolar 5.8 *Neka su M, N glatke mnogostrukosti iste dimenzije, $F : M \to N$ imerzija ili submerzija. Tada je F lokalni difeomorfizam. Ako je F bijekcija, tada je F difeomorfizam.*

Dokaz. Da je F lokalni difeomorfizam, slijedi iz Teorema o inverznom preslikavanju. Da je F uz dani uvjet difeomorfizam, vidi poglavlje o glatkim preslikavanjima (Propozicija 2.10). $\square$

Primjer. Sferne koordinate

Sferne koordinate (ρ, φ, θ) na $\mathbf{R}^3$ definirane su sa

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\varphi. \end{aligned}$$

Ako definiramo $F(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \sin\theta, \rho \cos\varphi)$, tada je F glatko preslikavanje sa $\mathbf{R}^3$ u $\mathbf{R}^3$. Jacobijan od F je

$$J_F = \det \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{pmatrix} = \rho^2 \sin\varphi.$$

Neka je $U \subset \mathbf{R}^3$ otvoren skup

$$U = \{(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbf{R}^3 : \rho > 0, 0 < \varphi < \pi\}.$$

Na U je očito $J_f \neq 0$. Iz Korolara 5.8 slijedi da je $F : U \to \mathbf{R}^3$ lokalni difeomorfizam. Stavimo $V_0 = F(U_0)$, gdje je $U_0 \subset U$ otvoren skup na kojem je F injektivno. Tada je inverzno preslikavanje $(F|_{U_0})^{-1} : V_0 \to U_0$ glatko. Ovakva je argumentacija mnogo jednostavnija nego eksplicitno određivanje inverza od F. Za skupove U_0, V_0 mogli smo, primjerice, uzeti

$$U_0 = \{(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbf{R}^3 : \rho > 0,\ \ 0 < \varphi < \pi,\ \ 0 < \theta < 2\pi\},$$

$$V_0 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : y \neq 0 \ \text{ ili } \ x < 0\}.$$

Teorem 5.9 (Teorem o rangu za mnogostrukosti) *Neka su M, N glatke mnogostrukosti dimenzija m i n redom, te neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje konstantnog ranga k. Tada za svaki $p \in M$ postoje glatke koordinate $(x^1, \ldots, x^m)$ centrirane u p i glatke koordinate $(v^1, \ldots, v^n)$ centrirane u $F(p)$ s obzirom na koje F ima sljedeći koordinatni prikaz*

$$F(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0).$$

Dokaz. Uzmimo $U \subset M$, $V \subset N$ za koordinatne domene oko p i $F(p)$, te koordinatni prikaz od F. Tada tvrdnja slijedi iz euklidskog slučaja. □

Korolar 5.10 *Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje na glatkoj povezanoj mnogostrukosti M. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

1° *Za svaku točku $p \in M$ postoje glatke karte oko p i $F(p)$ s obzirom na koje je koordinatni prikaz od F linearan.*

2° *F je konstantnog ranga.*

Dokaz. Pokažimo najprije da 1° povlači 2°. Neka F ima linearni koordinatni prikaz. Kako je svaki linearni operator konstantnog ranga, slijedi da je rang od F konstantan u okolini svake točke, te zbog povezanosti od M konstantan i na M.

Obratno, ako F ima konstantni rang, tada Teorem o rangu povlači da je njegov prikaz linearan u okolini proizvoljne točke. □

Teorem 5.11 *Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje konstantnog ranga.*

1° *Ako je F surjektivno, tada je F submerzija.*

2° *Ako je F injektivno, tada je F imerzija.*

3° *Ako je F bijektivno, tada je F difeomorfizam.*

Dokaz. Uočimo da je 3° posljedica 1° (F submerzija) i 2° (F imerzija), stoga M i N imaju jednake dimenzije. Sada Korolar 5.8 povlači da je F difeomorfizam.

Da dokažemo 2°, stavimo $m = \dim M$, $n = \dim N$, $k = rg\, F$. Pretpostavimo da F nije imerzija. Tada je $k < m$. Po Teoremu o rangu, u okolini po volji odabrane točke, postoji koordinatna karta u kojoj F ima koordinatni prikaz

$$F(x^1, \ldots, x^k) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0).$$

Sada slijedi $F(0, \ldots, 0, \varepsilon) = (0, \ldots, 0, 0)$, za bilo koji dovoljno mali ε. Stoga F nije injekcija.

Za dokaz tvrdnje 3°, koristimo rezultate o skupovima mjere 0 na mnogostrukosti. □

5.2 Podmnogostrukosti

Motivacija. Linearni slučaj: L je k-dimenzionalni potprostor od $\mathbf{R}^n$. Tada L možemo dobiti kao

1° jezgru surjektivnog preslikavanja $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-k}$,

2° sliku injektivnog preslikavanja $L : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$.

Definicija 5.12 *Neka je U otvoren podskup u $\mathbf{R}^n$. Podskup od U oblika*

$$S = \{(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) \in U : x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n\},$$

gdje su $c^{k+1}, \ldots, c^n$ konstante, nazivamo k-slojem od U.

Definicija 5.13 *Neka je M glatka mnogostrukost, (U, φ) koordinatna karta na M. Podskup S od U za koji je $\varphi(S)$ k-sloj od $\varphi(U)$ nazivamo k-slojem od U. Tada koordinate (U, φ) nazivamo koordinatama sloja.*

Podskup $N \subset M$ nazivamo smještenom podmnogostrukošću (regularnom podmnogostrukošću) dimenzije k ako za svaku točku $p \in N$ postoji koordinatna karta (U, φ) od M takva da je $p \in U$ i $U \cap N$ je k-sloj od U.

Razliku $\dim M - \dim N$ nazivamo *kodimenzijom* od N u M. Primjerice, smještene hiperplohe su smještene podmnogostrukosti kodimenzije 1, otvorene podmnogostrukosti su smještene podmnogostrukosti kodimenzije 0.

Lema 5.14 (Lokalna priroda smještenih podmnogostrukosti) *Neka je M glatka mnogostrukost i N podskup od M. Neka svaka točka $p \in N$ ima okolinu $U \subset M$ takvu da je $U \cap N$ smještena k-podmnogostrukost. Tada je N smještena k-podmnogostrukost.*

Primjer 1. Standardno smještenje $\mathbf{R}^k$ u $\mathbf{R}^n$

$$(x^1, \ldots, x^k) \mapsto (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0)$$

Primjer 2. Graf glatke funkcije

Neka je $F : U \to \mathbf{R}^k$, $U \subset \mathbf{R}^n$ glatka funkcija. Njen graf

$$\Gamma(F) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k : x \in U, \ \ y = F(x)\}$$

je smještena n-dimenzionalna podmnogostrukost mnogostrukosti $\mathbf{R}^{n+k}$.

Definiramo preslikavanje $\varphi : U \times \mathbf{R}^k \to U \times \mathbf{R}^k$

$$\varphi(x, y) = (x, y - F(x)).$$

Preslikavanje φ je difeomorfizam s inverzom $\varphi^{-1}(u, v) = (u, v + F(u))$, a $\varphi(\Gamma(F))$ je sloj $\{(u, v) : v = 0\}$ od $U \times \mathbf{R}^k$.

Primjer 3. Sfera S^2 je smještena podmnogostrukost u $\mathbf{R}^3$.

Neka je $U = D \times \mathbf{R}$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1)\}$ otvoren podskup od $\mathbf{R}^3$.

Definiramo preslikavanje $\varphi : U \to U$, $\varphi(x, y, z) = (x, y, z - \sqrt{1 - x^2 - y^2})$. Gornja polusfera je sloj

$$\varphi(S^2_+) = \{(u, v, w) \in U : w = 0\}.$$

Oko svake točke sfere možemo konstruirati kartu sloja.

Analogno bismo dokazali da je sfera S^n je smještena podmnogostrukost u $\mathbf{R}^{n+1}$.

Drugačije, u sfernim koordinatama (r, φ, θ) imamo $r = 1$.

Teorem 5.15 *Neka je $N \subset M$ smještena k-podmnogostrukost u M. S relativnom topologijom, N je topološka mnogostrukost dimenzije k i ima jedinstvenu glatku strukturu tako da je inkluzija $N \hookrightarrow M$ glatko smještenje.*

Dokaz. [Skica]

Osnovna ideja: Ako su $(x^1, \ldots, x^n)$ koordinate sloja za N u M, tada koristimo $(x^1, \ldots, x^k)$ kao koordinate za N.

1. N je Hausdorffov i zadovoljava 2. aksiom prebrojivosti, jer ta svojstva nasljeđuju podskupovi.

2. Neka je (U, φ) koordinatna karta sloja, $\pi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ projekcija. Tada

$$V = U \cap N \subset M, \ \ \tilde{V} = \pi \circ \varphi(V) \subset \mathbf{R}^k, \ \ \psi = \pi \circ \varphi|_V : V \to \tilde{V}.$$

definira atlas na N, te je N topološka k-mnogostrukost i inkluzija $i : N \hookrightarrow M$ je topološko smještenje.

3. N je glatka mnogostrukost: provjeriti jesu li konstruirane karte glatko povezane.

4. Jedinstvenost glatke strukture s danim svojstvima: neka je $\mathcal{A}$ neka druga glatka struktura sa svojstvom da je inkluzija glatko smještenje. Dovoljno je pokazati da je svaka karta konstruiranog atlasa (V, ψ) povezana sa svakom kartom od $\mathcal{A}$. □

Teorem 5.16 *Slika glatkog smještenja je smještena podmnogostrukost.*

Dokaz. Neka je $F : N \to M$ glatko smještenje. Treba pokazati da svaka točka od $F(N)$ ima koordinatnu okolinu $U \subset M$ tako da je $F(N) \cap U$ sloj u U.

Neka je $p \in N$. Preslikavanje F je preslikavanje konstantnog ranga, te Teorem o rangu povlači da postoje koordinatne karte (U, φ) (centrirana u p), (V, ψ) (centrirana u $F(p)$) s obzirom na koje koordinatni prikaz od F glasi

$$F(x^1, \ldots, x^k) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0).$$

To povlači da je $F(U)$ sloj u V.

Kako je smještenje homeomorfizam na sliku u relativnoj topologiji, $F(U)$ otvoren u $F(N)$ znači da postoji otvoren skup $W \subset M$ takav da je $F(U) = W \cap F(N)$. Stavimo $\tilde{V} = V \cap W$, te dobivamo kartu sloja $(\tilde{V}, \psi|_{\tilde{V}})$ koja sadrži $F(p)$ i za koju vrijedi da je $\tilde{V} \cap F(N) = \tilde{V} \cap F(U)$ sloj za $\tilde{V}$. □

Korolar 5.17 *Smještene podmogostrukosti su upravo slike glatkih smještenja.*

Dokaz. Iz prethodna dva teorema. Neka je $N \subset M$ smještena podmnogostrukost. Tada je $N = i(N)$, gdje je $i : N \hookrightarrow M$ smještenje (Teorem 5.15).

Obratno, ako je $F : M \to M$ smještenje, tada je $F(N) \subset M$ smještena podmnogostrukost (Teorem 5.16). □

Tangencijalni prostor smještene podmogostrukosti

Tangencijalni prostor smještene podmogostrukosti moći ćemo, uz odgovarajuće identifikacije, promatrati kao potprostor tangencijalnog prostora mogostrukosti.

Neka je N smještena podmnogostrukost u M, M glatka mnogostrukost. Kako je preslikavanje $i : N \hookrightarrow M$ smještenje (posebno, imerzija), u točki $p \in N$ preslikavanje $i_* : T_pN \to T_pM$ je injektivno. Tangencijalni prostor smještene podmogostrukosti identificiramo sa slikom tog preslikavanja, pa T_pN shvaćamo kao podskup od T_pM. Pritom derivaciju (tangencijalni vektor) $X \in T_pN$ identificiramo sa $i_*X \in T_pM$ koji djeluje na $f \in C^\infty(M)$ kao

$$Xf = (i_*X)f = X(f \circ i) = X(f|_N).$$

Propozicija 5.18 *Kao potprostor od T_pM, tangencijalni prostor T_pN dan je sa*

$$T_pN = \{X \in T_pM : Xf = 0 \text{ za } f \in C^\infty(M),\ f|_N = 0\}.$$

5.3 Nivo-skupovi

Neka je $F : M \to N$ preslikavanje, $c \in N$. Skup

$$F^{-1}(c) = \{x \in M : F(x) = c\}$$

nazivamo nivo-skupom od F.

Primjerice, jedinična sfera S^2 je nivo-skup $F^{-1}(1)$ funkcije $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Teorem 5.19 (Preslikavanja konstantnog ranga) *Neka su M, N glatke mnogostrukosti, $F : M \to N$ glatko preslikavanje konstantnog ranga k. Svaki nivo-skup od F je zatvorena smještena podmnogostrukost od M kodimenzije k.*

Dokaz. Neka je $c \in N$ i neka S označava nivo-skup $F^{-1}(c) \subset M$. Očito je zbog neprekidnosti S zatvoren u M. Trebamo pokazati da za svaku točku iz $p \in S$ postoje koordinate sloja za S u M oko p. Iz Teorema o rangu, postoje glatke koordinatne karte (U, φ) centrirane u p ($\varphi(p) = 0$) i (V, ψ) centrirane u $c = F(p)$ ($\psi(F(p) = 0$) u kojima F ima koordinatni prikaz

$$F(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

Stoga je $S \cap U$ sloj

$$\{(x^1, \dots, x^m) \in U : x^1 = \cdots = x^k = 0)\}.$$

□

Teorem 5.20 (Submerzije) *Neka su M, N glatke mnogostrukosti, $F : M \to N$ submerzija. Svaki nivo-skup od F je zatvorena smještena podmnogostrukost od M kodimenzije jednake dimenziji od N.*

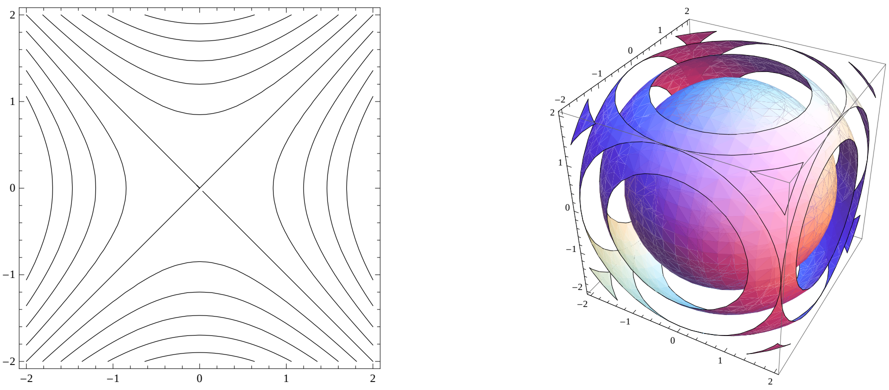
Dokaz. Submerzija je preslikavanje konstantnog ranga jednakog $\dim N$. □

Definicija 5.21 *Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje. Točka $p \in M$ naziva se regularnom točkom preslikavanja F ako je preslikavanje $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ surjektivno, inače kritičnom točkom. Točka $c \in N$ naziva se regularnom vrijednošću od F, ako je svaka točka nivo-skupa $F^{-1}(c)$ regularna, inače kritičnom vrijednošću. Posebno, ako je $F^{-1}(c) = \emptyset$, tada je c regularna vrijednost.*

Ako je c regularna vrijednost, tada se nivo-skup $F^{-1}(c)$ naziva regularnim.

Uočimo: Ako je $\dim M < \dim N$, svaka je točka kritična.

Regularan nivo-skup je nivo-skup koji se sastoji od regularnih točaka.



Slika 3: Nivo-skupovi

Teorem 5.22 (Regularni nivo-skupovi) *Svaki regularni nivo-skup glatkog preslikavanja je zatvorena smještena podmnogostrukost od M kodimenzije jednake dimenziji slike.*

Dokaz. Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje i $c \in N$ regularna vrijednost preslikavanja F takva da je $F^{-1}(c) \neq \emptyset$. Preslikavanje F_* ima rang jednak $\dim N$ u svakoj točki skupa $F^{-1}(c)$. Još treba pokazati da je skup točaka $U \subset M$ za koje je $rgF = \dim N$ otvoren u M, jer je tada $F|_U : U \to N$ submerzija, te možemo primijeniti prethodni teorem na U (uočimo da je smještena podmnogostrukost od U je također smještena podmnogostrukost od M).

Pokažimo da je U otvoren. Stavimo $m = dim\, M$, $n = dim\, N$ i neka je $p \in U$. Uzmimo koordinatne okoline oko p i $F(p)$ i promotrimo koordinatni prikaz preslikavanja F_*, $rg\, F_* = n$. S obzirom na odgovarajuće baze, njegov matrični prikaz (matrica tipa (n, m)) ima $n \times n$-minoru koja je regularna (determinanta joj je različita od 0). Zbog neprekidnosti, determinanta će biti različita od 0 i u nekoj okolini od p, što povlači da je F ranga n u toj okolini. Zbog proizvoljnosti od p, U možemo pokriti otvorenim skupovima. □

Napomena. Ako je $f : M \to \mathbf{R}$ glatko preslikavanje, tada je $p \in M$ regularna točka ako i samo ako je $df_p \neq 0$.

Primjer 1. Sfera S^n je smještena podmnogostrukost kao regularni nivo-skup funkcije $f : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|^2$ (diferencijal $df = 2\sum_{i*1}^n x^i dx^i$ iščezava samo u ishodištu.)

Propozicija 5.23 *Podskup S glatke n-mnogostrukosti M je smještena k-podmnogostrukost od M ako i samo ako svaka točka $p \in S$ ima okolinu U u M tako da je $U \cap S$ nivo-skup submerzije $F : U \to \mathbf{R}^{n-k}$.*

Dokaz. Neka je S smještena k-podmnogostrukost. Ako su $(x^1, \ldots, x^n)$ koordinate sloja za S na otvorenom skupu $U \subset M$, tada preslikavanje $F : U \to \mathbf{R}^{n-k}$, u koordinatama dano s $F(x) = (x^{k+1}, \ldots, x^n)$ je submerzija za koju je jedan od nivo-skupova $S \cap U$.

Obratno, pretpostavimo da oko svake točke $p \in S$ postoji okolina U i submerzija $F : U \to \mathbf{R}^{n-k}$ takva da je $S \cap U = F^{-1}(c)$, za neki $c \in \mathbf{R}^{n-k}$. Koristeći teorem za nivo-skupove submerzija, dobivamo da je $S \cap U$ smještena podmnogostrukost od U. Sada Lema 5.14 povlači da je S smještena podmnogostrukost. □

Napomena. Funkcija $F : M \to N$ koja određuje podmnogostrukost S $(U \cap S)$ kao regularni nivo-skup naziva se *(lokalno) definirajuća funkcija.*

Propozicija 5.24 *Neka je S smještena podmnogostrukost. Ako je $F : U \to N$ lokalno definirajuća funkcija za S, tada je $T_pS = Ker F_*$, $p \in U$.*

Primjer 4. Vektorski prostor matrica reda n, $M_n(\mathbf{R})$, je glatka mnogostrukost dimenzije n^2. Opća linearna grupa $Gl(n,\mathbf{R})$ (regularnih matrica) je otvorena podmnogostrukost dimenzije n^2.

Primjer 5. Ortogonalna grupa $O(n,\mathbf{R})$

Matrica A je ortogonalna ako vrijedi $A \cdot A^\tau = A^\tau \cdot A = I$, gdje je I jedinična matrica reda n. Pokažimo da je $O(n,\mathbf{R})$ smještena podmnogostrukost od $Gl(n,\mathbf{R})$.

Označimo sa $\mathcal{S}(n,\mathbf{R})$ prostor simetričnih matrica i promotrimo preslikavanje

$$F : Gl(n,\mathbf{R}) \to \mathcal{S}(n,\mathbf{R})$$

$$F(A) = AA^\tau.$$

Pokazat ćemo da je I regularna vrijednost preslikavanja F, te je skup $F^{-1}(I) = O(n,\mathbf{R})$ smještena podmnogostrukost kodimenzije $\dfrac{n(n+1)}{2}$, odnosno dimenzije

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Promotrimo *push-forward*

$$F_* : T_A Gl(n,\mathbf{R}) \to T_{F(A)}\mathcal{S}(n,\mathbf{R})$$

preslikavanja F u točki $A \in O(n,\mathbf{R}) \subset Gl(n,\mathbf{R})$. Dobivamo

$$F_*(X) = AX^\tau + XA^\tau,$$

gdje je $X \in M_n(\mathbf{R})$ (identificiramo $T_A Gl(n,\mathbf{R})$ sa $M_n(\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{n^2}$, $\mathcal{S}(n,\mathbf{R})$ sa $\mathcal{S}(n,\mathbf{R})$).

Zaista, neka je $c : I \to M_n(\mathbf{R})$ krivulja $c(t) = A + tB$, $c(0) = A$, $c'(0) = B$. Sada je

$$F_*B = F_*c'(0) = (F \circ c)'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} F(A+tB)$$

$$= \frac{d}{dt}|_{t=0}(A+tB)(A+tB)^\tau = AB^\tau + BA^\tau.$$

Ako je $Y \in \mathcal{S}(n,\mathbf{R})$ proizvoljan, tada se $\frac{1}{2}YA$ preslika u Y,

$$F_*(YA/2) = A(YA/2)^\tau + (YA/2)A^\tau = Y,$$

pa smo pokazali da je F_* surjektivno preslikavanje (za svaki $Y \in \mathcal{S}(n,\mathbf{R})$, posebno za I).

Primjer 6. Specijalna linearna grupa $Sl(n,\mathbf{R})$

$$Sl(n,\mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) : \det A = 1\}.$$

Pokažimo da je 1 regularna vrijednost preslikavanja $\det : Gl(n,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $Sl(n,\mathbf{R}) = \det^{-1}(1)$. U tu svrhu pokazat ćemo da je det submerzija.

Neka je $A \in Gl(n,\mathbf{R})$ po volji odabrana matrica. Za diferencijal od det, $d(det)_A : T_A(Gl(n,\mathbf{R})) \to \mathbf{R}$, vrijedi

$$d(\det)_A(B) = (\det(A))\mathrm{tr}(A^{-1}B), \quad B \in M_N(\mathbf{R}).$$

Ako stavimo $B = A$, tada imamo

$$d(\det)_A(A) = (\det(A))\mathrm{tr}(A^{-1}A) = (\det A) \cdot n \neq 0.$$

Dakle, diferencijal $d\det$ ne iščezava niti u jednoj točki od $Gl(n,\mathbf{R})$, pa je det submerzija. Time je pokazano da je $Sl(n,\mathbf{R})$ smještena podmnogostrukost dimenzije $n^2 - 1$.

5.4 Imerzirane podmnogostrukosti

Imerzirane podmnogostrukosti su slike injektivnih imerzija (ne nužno smještenja). Precizirajmo:

Definicija 5.25 *Neka je M glatka mnogostrukost. Imerzirana podmnogostrukost dimenzije k od M je podskup $N \subset M$ snabdjeven strukturom k-mnogostrukosti (ne nužno s relativnom topologijom) i glatkom strukturom tako da je inkluzija $i : N \hookrightarrow M$ glatka imerzija.*

Dobivamo ih najčešće na sljedeći način: neka je $F : N \to M$ injektivna imerzija, skup $F(N)$ snabdijemo topologijom u kojoj je skup $U \subset F(N)$ otvoren ako i samo ako je $F^{-1}(U)$ otvoren u N. Uz tu je topologiju $F(N)$ topološka k-mnogostrukost homeomorfna sa N. Nadalje, $F(N)$ ima jedinstvenu glatku strukturu za koju je preslikavanje $F : N \to F(N)$ difeomorfizam. Koordinatna preslikavanja na $F(N)$ su $\varphi \circ F^{-1}$ gdje su φ koordinatna preslikavanja na N. Sada je preslikavanje $i : F(N) \hookrightarrow M$ sigurno glatka imerzija jer je kompozicija difeomorfizma i imerzije

$$F(N) \to N \to M.$$

Propozicija 5.26 *Imerzirane podmnogostrukosti su upravo slike injektivnih imerzija.*

Dokaz. Ako je $N \subset M$ imerzirana podmnogostrukost, tada je $i : N \hookrightarrow M$ injektivna imerzija po definiciji.

Obratno, slika injektivne imerzije ima jedinstvenu topologiju i glatku strukturu tako da postaje imerzirana podmnogostrukost za koju je dana imerzija difeomorfizam na sliku. $\square$

Primjer. Krivulja osmica je imerzirana, ali ne i smještena podmnogostrukost.

Uočimo: imerzirana podmnogostrukost je smještena podmnogostrukost ako i samo ako ima relativnu topologiju tj. ako i samo ako je imerzija smještenje.

Propozicija 5.27 *Neka je $F : N \to M$ imerzija. Tada je F lokalno smještenje: za svaku točku $p \in N$ postoji okolina U od p u N takva da je $F|_U : U \to M$ smještenje.*

Definicija 5.28 *Neka je $S \subset M$ imerzirana k-podmnogostrukost. Lokalna parametrizacija od S je (glatko) smještenje $X : U \to M$, $U \subset \mathbf{R}^k$ otvoren, kojemu je slika otvoren podskup od S i koje je glatko kao preslikavanje u S.*

Uočimo, ako je $S = M$, tada je lokalna parametrizacija od M inverz koordinatnog preslikavanja.

Propozicija 5.29 *Neka je $S \subset M$ imerzirana podmnogostrukost. Tada je svaka točka $p \in S$ u slici lokalne parametrizacije od S. Ako je $X : U \to M$ lokalna parametrizacija, tada postoji jedinstvena glatka koordinatna karta (V, φ) za S takva da je $X = i \circ \varphi^{-1}$, gdje je $i : S \hookrightarrow M$ inkluzija.*

Primjer. Preslikavanje $F : \mathbf{B}^2 \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{B}^2$ je otvoren krug u $\mathbf{R}^3$, dano s

$$F(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$$

je glatka lokalna parametrizacija od S^2 kojoj je slika gornja otvorena polusfera.

Primjer. Preslikavanje $c : \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle \to \mathbf{R}^2$, $c(t) = (\sin 2t, \cos t)$ je glatka lokalna parametrizacija imerzirane *osmice* kojoj je slika dio krivulje u otvorenoj gornjoj poluravnini.

Napomena. Koje se mnogostrukosti mogu smjestiti u euklidski prostor? Odgovor je: sve. Time se objašnjava navika vizualizacije podmnogostrukosti kao podskupova od $\mathbf{R}^m$, za neki m.

Teorem 5.30 (Whitneyev teorem o smještenju, 1936.) *Svaka glatka n-mnogostrukost dopušta smještenje u $\mathbf{R}^{2n+1}$ kao zatvorena podmnogostrukost.*

Teorem 5.31 (Whitneyev teorem o imerziji) *Svaka glatka n-mnogostrukost dopušta imerziju u $\mathbf{R}^{2n}$.*

Teorem 5.32 (Nashov teorem o izometričnom smještenju, 1956.) *Svaka Riemannova n-mnogostrukost dopušta izometrično smještenje u $\mathbf{R}^m$, za neki m.*

Zadaci

1. Zadana je $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x,y,z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - 4xyz$. Za koje realne brojeve c je nivo-skup $f^{-1}(c)$ smještena podmnogostrukost?

2. Zadana je $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$. Za koje realne brojeve c je nivo-skup $f^{-1}(c)$ smještena podmnogostrukost?

3. Neka je S rotacijski torus u $\mathbf{R}^3$ dobiven rotacijom kružnice $(y-2)^2 + z^2 = 1$ oko z-osi. Pokažite da je S dan kao regularan nivo-skup $f^{-1}(0)$, gdje je $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 - 1$.

4. Pokažite da za diferencijal od det, $d(det)_A : T_A(Gl(n,\mathbf{R})) \to \mathbf{R}$, vrijedi
$$d(\det)_A(B) = (\det(A))\mathrm{tr}(A^{-1}B), \;\; B \in M_N(\mathbf{R}).$$
(Uputa: Ako su $A = A(t)$ regularne matrice, pokažite
$$\frac{d}{dt}\det A(t) = \det A(t)\mathrm{tr}(A^{-1}A'(t)),$$
gdje je $A'(t)$ matrica s elementima da^{ij}/dt. Koristite Laplaceov razvoj determinante i formulu za inverz $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{Adj}(A)$.)

5. Dokažite Propoziciju 5.24: Neka je S smještena podmnogostrukost. Ako je $F : U \to N$ lokalno definirajuća funkcija za S, tada je $T_pS = KerF_*$, $p \in U$. Koristeći taj rezultat, opišite tangencijalnu ravninu sfere. (Uputa: Neka je $c : I \to S$ krivulja na S, tada je $(F \circ c)(t) = c = const$. Dakle $(F \circ c)'(t) = F_*(c'(t)) = 0$, tj. tangencijalni vektor od c je u $KerF_*$.)

6. Pokažite da je specijalna ortogonalna grupa $SO(n,\mathbf{R}) = \{A \in O(n,\mathbf{R}) : \det A = 1\}$ smještena podmnogostrukost od $M_n(\mathbf{R})$. Koje dimenzije? (Uputa. $SO(n,\mathbf{R})$ je otvorena podmnogostrukost u $O(n,\mathbf{R})$ matrica pozitivne determinante, dakle njezina dimenzija je $\frac{n(n-1)}{2}$).

7. Hopfova fibracija je preslikavanje $h : S^3 \to S^2$ koje možemo zapisati i na sljedeći način: uzmemo $S^3 \subset \mathbf{C}^2$, $S^2 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{C}$ i definiramo
$$h(x,y) = (|x|^2 - |y|^2, 2x\bar{y}), \;\; x, y \in \mathbf{C}.$$
Pokažite da je h surjektivno preslikavanje i da je njegov push-forward $h_p^* : T_pS^3 \to T_{h(p)}S^2$ surjektivan za svaku točku $p \in S^3$. Je li tada proizvoljna točka $c \in S^2$ regularna vrijednost? Jesu li nivo-skupovi $h^{-1}(c)$ smještene podmnogostrukosti? Koje (ko)dimenzije?

   Uvjerite se da se kružnica $(\cos t, \sin t, 0, 0) \subset S^3$ Hopfovim preslikavanje preslika u točku $(1,0,0) \in S^2$. Vrijedi i općenito – nivo-skupovi $h^{-1}(c)$ su zapravo velike kružnice (Hopfovo preslikavanje kružnice S^1 u S^3 preslikava u točke u S^2.)

6 TENZORI

6.1 Tenzori na vektorskim prostorima

Neka je V realan vektorski prostor dimenzije n, V^* njegov dual.

Kovarijantni k-tenzor na V je multilinearno preslikavanje

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbf{R}.$$

Broj k nazivamo *rangom* tenzora. 0-tenzor je realan broj. Prostor svih kovarijantnih k-tenzora na V označavamo s $T^k(V)$.

Primjer. Linearno preslikavanje $\omega : V \to \mathbf{R}$ je kovarijantni 1-tenzor. Kovarijantni 2-tenzor je realna bilinearna funkcija koja djeluje na dva vektora, naziva se *bilinearnom formom* (primjerice, skalarni produkt). Determinanta, promatrana kao funkcija od n vektora, je kovarijantni n-tenzor.

Kontravarijantni l-tenzor na V je multilinearno preslikavanje

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \to \mathbf{R}.$$

Prostor svih kontravarijantnih l-tenzora na V označavamo s $T_l(V)$.

Mješoviti tenzor tj. *tenzor tipa* $\binom{k}{l}$ ($(k,l)-$tenzor) ili *k-kovarijantni, l-kontravarijantni tenzor na V* je multilinearno preslikavanje

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbf{R}.$$

Prostor svih (k,l)-tenzora na V označavamo s $T_l^k(V)$.

Identifikacije (izomorfizmi):

1° $T_0^k(V) = T^k(V)$, $T_l^0(V) = T_l(V)$,

2° $T^1(V) = V^*$, $T_1(V) = V^{**} = V$, $T^0(V) = \mathbf{R}$,
(kovarijantni 1-tenzori su linearni funkcionali, kontravarijantni 1-tenzori su vektori),

3° $T_1^1(V) = \mathrm{End}(V)$,
(mješoviti $(1,1)-$tenzori su linearni operatori : $V \to V$). Posljednja tvrdnja se realizira izomorfizmom $\Phi : \mathrm{End}(V) \to T_1^1(V)$, $\Phi(A)(\omega, X) = \omega(AX)$.

Tenzorski produkt tenzora $F \in T_l^k(V)$, $G \in T_q^p(V)$ je tenzor $F \otimes G \in T_{l+q}^{k+p}(V)$ definiran s

$$\begin{aligned} &F \otimes G(\omega^1, \ldots, \omega^{l+q}, X_1, \ldots, X_{k+p}) \\ &= F(\omega^1, \ldots, \omega^l, X_1, \ldots, X_k) G(\omega^{l+1}, \ldots, \omega^{l+q}, X_{k+1}, \ldots, X_{k+p}). \end{aligned}$$

Operacija tenzorskog produkta je bilinearna i asocijativna.

Primjer. Ako su $\omega, \bar{\omega}$ 1-kovektori, tada je $\omega \otimes \bar{\omega} : V \times V \to \mathbf{R}$, $\omega \otimes \bar{\omega}(v, \bar{v}) = \omega(v)\bar{\omega}(\bar{v})$ kovarijantni 2-tenzor.

Propozicija 6.1 *Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor, (E_i) baza za V, (ϵ^i) dualna baza. Skup svih tenzora oblika*

$$\mathcal{B} = \{\epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k},\ 1 \le i_1, \ldots, i_k \le n\}$$

je baza za $T^k(V)$. Prostor $T^k(V)$ je dimenzije n^k.

Dokaz. $\mathcal{B}$ je skup izvodnica:
Za bilo kojih k indeksa $i_1, \ldots, i_k$, definirajmo realne brojeve $T_{i_1 \ldots i_k} := T(E_{i_1}, \ldots, E_{i_k})$. Proizvoljan se tenzor $T \in T^k(V)$ može prikazati kao $T = T_{i_1 \ldots i_k} \epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k}$. Jednakost lijeve i desne strane utvrđuje se djelovanjem na proizvoljnih k vektora $E_{j_1}, \ldots, E_{j_k}$ baze od V (kako je T multilinearan, djelovanje tenzora dovoljno je provjeriti na vektorima baze).

$\mathcal{B}$ je linearno nezavisan skup: Iz

$$T_{i_1 \ldots i_k} \epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k}(E_{j_1}, \ldots, E_{j_k}) = 0$$

slijedi $T_{j_1 \ldots j_k} = 0$. □

Posebno:

1° $\dim T^1(V) = n$,

2° $\dim T^2(V) = n^2$, gdje je $T^2(V)$ prostor svih bilinearnih formi na V. Proizvoljna bilinearna forma zadana je kvadratnom matricom n-tog reda (T_{ij}), tj.

$$T = T_{ij} \epsilon^i \otimes \epsilon^j =$$

$$T_{11} \epsilon^1 \otimes \epsilon^1 + \ldots + T_{1n} \epsilon^1 \otimes \epsilon^n + \ldots + T_{n1} \epsilon^n \otimes \epsilon^1 + \ldots + T_{nn} \epsilon^n \otimes \epsilon^n.$$

Neka je $(E_1, \ldots, E_n)$ baza za V, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ dualna baza za V^*. Baza za $T^k_l V$ je dana tenzorima oblika

$$E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_l} \otimes \epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k},$$

gdje su $i_p, j_q \in \{1, \ldots, n\}$, koji djeluju na elemente baze

$$E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_l} \otimes \epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k}(\epsilon^{s_1}, \ldots, \epsilon^{s_k}, E_{r_1}, \ldots, E_{r_k}) = \delta^{s_1}_{j_1} \cdots \delta^{s_l}_{j_l} \delta^{i_1}_{r_1} \cdots \delta^{r_k}_{i_k}.$$

Proizvoljan tenzor $F \in T^k_l(V)$ može se napisati kao linearna kombinacija elemenata baze

$$F = F^{j_1 \cdots j_l}_{i_1 \cdots i_k} E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_l} \otimes \epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k},$$

gdje je

$$F^{j_1 \cdots j_l}_{i_1 \cdots i_k} = F(\epsilon^{j_1}, \ldots, \epsilon^{j_l}, E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}).$$

Trag (*kontrakcija*) snizuje rang tenzora za 2: U specijalnom slučaju $tr : T^1_1(V) \to \mathbf{R}$ je trag od F kao linearnog operatora sa V u V.

Općenito definiramo

$$tr : T^{k+1}_{l+1} \to T^k_l$$

tako da je $tr(F)(\omega^1, \ldots, \omega^l, V_1, \ldots, V_k)$ trag endomorfizma $F(\omega^1, \ldots, \omega^l, \cdot, V_1, \ldots, V_k, \cdot) \in T^1_1(V)$.

Apstraktni tenzorski produkt vektorskih prostora

Cilj: Uvesti $T^k(V)$ kao apstraktnu strukturu

$$T^k(V) = V^* \otimes \cdots \otimes V^*,$$

gdje izraz na desnoj strani zamišljamo kao skup svih linearnih kombinacija tenzorskih produkata elemenata od V^* (motivacija: svaki se kovarijantni k-tenzor može napisati kao linearna kombinacija tenzorskog produkta kovektora).

Neka je S skup. *Slobodan vektorski prostor nad* S, $\mathbf{R}S$, je skup svih konačnih formalnih linearnih kombinacija elemenata iz S sa koeficijentima iz $\mathbf{R}$. Konačna formalna linearna kombinacija je funkcija $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathbf{R}$ takva da je $\mathcal{F}(s) = 0$, za sve osim za konačno mnogo s. Uz operacije zbrajanja i množenja skalarom definirane po točkama, $\mathbf{R}S$ postaje vektorski prostor. Elemente od S identificiramo s elementima od $\mathbf{R}S$ tako da elementu $x \in S$ odgovara funkcija $\mathcal{F} \in \mathbf{R}S$ takva da je $\mathcal{F}(x) = 1$, inače 0. Svaki se element iz $\mathbf{R}S$ može na jedinstven način napisati kao suma $\mathcal{F} = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$, gdje su $x_1, \ldots, x_m$ elementi od S za koje je $\mathcal{F}(x_i) \neq 0$ i $a_i = \mathcal{F}(x_i)$. Baza za $\mathbf{R}S$ je skup S (prema tome, $\mathbf{R}S$ je konačnodimenzionalan ako je S konačan).

Propozicija 6.2 (Karakteristično svojstvo slobodnih vektorskih prostora) *Neka je S skup i W vektorski prostor. Tada svako preslikavanje $F : S \to W$ ima jedinstveno proširenje do linearnog preslikavanja $\bar{F} : \boldsymbol{R}S \to W$.*

Neka su V, W konačnodimenzionalni realni vektorski prostori i neka je $\mathcal{R}$ potprostor slobodnog vektorskog prostora $\mathbf{R}(V \times W)$ razapet s elementima

$$a(v, w) - (av, w)$$

$$a(v, w) - (v, aw)$$

$$(v, w) + (v', w) - (v + v', w)$$

$$(v, w) + (v, w') - (v, w + w').$$

Tenzorski produkt od V i W, $V \otimes W$, je kvocijentni prostor $\mathbf{R}(V \times W)/\mathcal{R}$. Klasa ekvivalencije elementa (v, w) označava se sa $v \otimes w$ i naziva *tenzorskim produktom* od v i w. Svaki element od $V \otimes W$ može se napisati kao linearna kombinacija elemenata oblika $v \otimes w$, no svaki element nije oblika $v \otimes w$.

Propozicija 6.3 (Karakteristično svojstvo tenzorskog produkta) *Neka su V, W konačnodimenzionalni realni vektorski prostori, $A : V \times W \to X$* ***bilinearno*** *preslikavanje u vektorski prostor X. Tada postoji jedinstveno* ***linearno*** *preslikavanje $\bar{A} : V \otimes W \to X$ tako da sljedeći dijagram komutira ($\pi(v, w) = v \otimes w$)*

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\
V \otimes W \arrow[ur, "\bar{A}"'] &
\end{tikzcd}$$

Propozicija 6.4 *Neka su V, W, X konačnodimenzionalni realni vektorski prostori.*

1° *Tada je $V^* \otimes W^*$ kanonski izomorfan s vektorskim prostorom $B(V, W)$ svih bilinearnih formi sa $V \times W$ u $\mathbf{R}$.*

2° *Ako je (E_i) baza za V, (F_j) baza za W, tada je skup svih elemenata oblika $E_i \otimes F_j$ baza za $V \otimes W$. Stoga je* $\dim(V \otimes W) = (\dim V)(\dim W)$.

3° *Postoji jedinstveni izomorfizam sa* $V \otimes (W \otimes X) \to (V \otimes W) \otimes X$ *koji preslikava* $v \otimes (w \otimes x)$ *u* $(v \otimes w) \otimes x$.

Dokaz. 1° Definiramo

$$\Phi : V^* \times W^* \to B(V,W)$$
$$\phi(\omega,\eta)(v,w) = \omega(v)\eta(w).$$

Lako se pokaže da je Φ bilinearno preslikavanje, pa se po Karakterističnom svojstvu faktorizira do jedinstvenog linearnog preslikavanja $\bar{\Phi} : V^* \otimes W^* \to B(V,W)$. Provjerimo da je $\bar{\Phi}$ izomorfizam (konstruirat ćemo njegov inverz).

Neka su (E_i) i (F_j) baze za V i W, (ϵ^i), (φ^j) njihove dualne baze. Prostor $V^* \otimes W^*$ razapet je elementima oblika $\omega \otimes \eta$, $\omega \in V^*$, $\eta \in W^*$, stoga se svaki element $\tau \in V^* \otimes W^*$ može napisati u obliku $\tau = \tau_{ij}\epsilon^i \otimes \varphi^j$ (zapis nije nužno jedinstven).

Sada definiramo preslikavanje $\Psi : B(V,W) \to V^* \otimes W^*$

$$\Psi(b) = b(E_k, F_l)\epsilon^k \otimes \varphi^l.$$

Treba pokazati da je Ψ inverz od $\bar{\Phi}$ i obratno. □

Korolar 6.5 *Neka je* V *konačnodimenzionalan realni vektorski prostor. Tada je prostor* $T^k(V)$ *svih kovarijantnih* k*-tenzora na* V *kanonski izomorfan sa* $V^* \otimes \cdots \otimes V^*$.

6.2 Tenzori na mnogostrukostima

Neka je M glatka mnogostrukost, tenzore konstruiramo na vektorskom prostoru T_pM. Oznaka za prostor tenzora tipa (k,l) u točki $p \in M$ je $T^k_l(T_pM)$. Vektorski svežanj tenzora tipa (k,l) je

$$T^k_l(M) = \coprod_{p \in M} T^k_l(T_pM).$$

Proizvoljan tenzor $F \in T^k_l(T_pM)$ može se lokalno napisati kao

$$F = F^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \otimes dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}$$

Tenzorsko polje je glatki prerez nekog tenzorskog svežnja $T^k_l(M)$.

Oznake: $\mathcal{T}^k$, $\mathcal{T}_l$, $\mathcal{T}^k_l$ za glatke prereze svežnjeva $T^k(M)$, $T_l(M)$, $T^k_l(M)$ redom.

Povlak

Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje. Za svaki $k \geq 0$ i $p \in M$ definiramo preslikavanje $F^* : T^k(T_{F(p)}N) \to T^k(T_pM)$, kojeg nazivamo *povlak* kovarijantnog k-tenzora

$$F^*(S)(X_1, \dots X_k) = S(F_*X_1, \dots, F_*X_k).$$

Uočite svojstva povlaka tenzora (vidi zadatke).

Kao i glatka kovektorska *polja*, definicija povlaka se proširuje na glatka kovarijantna tenzorska polja – oni mogu se *povući* pomoću glatkih preslikavanja. Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje, σ glatko kovarijantno k-tenzorsko polje na N. Definiramo k-tenzorsko polje $F^*\sigma$ na M pomoću

$$(F^*\sigma)_p = F^*(\sigma_{F(p)}),$$

tj.

$$(F^*\sigma)_p(X_1, \dots, X_k) = \sigma_{F(p)}(F_*X_1, \dots, F_*X_k).$$

6.3 Simetrični tenzori, simetrizacija i simetrični produkt

Simetrični (ili kovarijantni ili kontravarijantni) tenzori su oni čija se vrijednost ne mijenja zamjenom argumenata.

Neka je V konačnodimenzionalan realan vektorski prostor. Kovarijantni k-tenzor je *simetričan* ako je

$$T(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k) = T(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k), \quad 1 \leq i < j \leq k.$$

Skup svih simetričnih kovarijantnih k-tenzora na V označavamo sa $\Sigma^k(V)$. To je potprostor od $T^k(V)$.

Projekcija $\mathrm{Sym}\colon T^k(V) \to \Sigma^k(V)$ naziva se *simetrizacijom* i definira na sljedeći način.

Neka je S_k simetrična grupa od k elemenata, $\sigma \in S_k$, $T \in T^k(V)$. Definiramo najprije tenzor

$${}^{\sigma}T((X_1, \dots, X_k) = T(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}).$$

Uočimo da vrijedi ${}^{\tau}({}^{\sigma}T) ={}^{\tau\sigma} T$. Sada definiramo

$$\mathrm{Sym}\, T = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} {}^{\sigma}T.$$

Propozicija 6.6 (Svojstva simetrizacije)

1° *Za svaki kovarijantni tenzor T, $SymT$ je simetričan tenzor.*

2° *Tenzor T je simetričan ako i samo ako je $SymT = T$.*

Za simetrične tenzore S, T na V tenzorski produkt $S \otimes T$ nije općenito simetričan tenzor.

Za simetrične tenzore $S \in \Sigma^k(V)$, $T \in \Sigma^l(V)$ definiramo simetričan produkt kao $(k+l)$-tenzor ST

$$ST = \mathrm{Sym}(S \otimes T).$$

Ili eksplicitno

$$ST(X_1, \dots, X_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} S(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) T(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}).$$

Propozicija 6.7 (Svojstva simetričnog produkta)

1° *Operacija simetričnog produkta je simetrična i bilinearna, tj. vrijedi*

$$ST = TS, \quad (aR + bS)T = aRT + bST$$

2° *Ako su ω i η kovektori, tada*

$$\omega\eta = \frac{1}{2}(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega).$$

Simetrični tenzori na mnogostrukosti. Neka je M glatka manogostrukost. Simetrične tenzore definiramo na vektorskom prostoru T_pM. *Simetrično tenzorsko polje* je kovarijantno tenzorsko polje kojemu je u svakoj točki p pridružen simetrični tenzor. Riemannova metrika na M je glatko, simetrično (kovarijantno) 2-tenzorsko polje koje je pozitivno definitno u svakoj točki.

6.4 Alternirajući tenzori, alternirajuća projekcija i vanjski produkt

Alternirajući tenzori su oni tenzori koji mijenjaju predznak svaki put kad se zamijene dva argumenta.

Primjer. Determinanta kao funkcija od n-vektora (redaka ili stupaca matrice) je alternirajući n-tenzor.

Neka je V konačnodimenzionalan realan vektorski prostor. Kovarijantni k-tenzor nazivamo *alternirajućim* ako je

$$T(X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_j,\ldots,X_k) = -T(X_1,\ldots,X_j,\ldots,X_i,\ldots,X_k),\ \ 1 \leq i < j \leq k.$$

Skup svih alternirajućih k-tenzora označavamo sa $\Lambda^k(V)$. Njegove elemente također nazivamo *k-kovektorima* ili *vanjskim k-formama.*

Propozicija 6.8 *Neka je Ω k-tenzor za koji vrijedi $\Omega(X_1,\ldots,X_k) = 0$, za linearno zavisne $X_1,\ldots X_k$. Tada je Ω alternirajući tenzor i obratno.*

Dokaz. Neka su $X_1,\ldots X_k$ linearno zavisni i $\Omega(X_1,\ldots,X_k) = 0$. Tada je, posebno, $\Omega = 0$ ako su dva vektora jednaka. Iz toga slijedi

$$\begin{gathered} 0 = \Omega(X_1,\ldots,X_i+X_j,\ldots,X_i+X_j,\ldots,X_k) = \\ \Omega(X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_i,\ldots,X_k) + \Omega(X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_j,\ldots,X_k) + \\ \Omega(X_1,\ldots,X_j,\ldots,X_i,\ldots,X_k) + \Omega(X_1,\ldots,X_j,\ldots,X_j,\ldots,X_k) = \\ 0 + * + * + 0. \end{gathered}$$

Odavde slijedi da je Ω alternirajući.

Dokažimo obrat. Uočimo najprije da ako je Ω alternirajući tenzor, tada je

$$\Omega(X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_i,\ldots,X_k) = 0.$$

Ako su $X_1,\ldots X_k$ linearno zavisni, tada se jedan od vektora može izraziti kao linearna kombinacija drugih, odakle slijedi tvrdnja. □

Iz prethodnog slijedi da ne postoje ne-nul alternirajući k-tenzori na V za koje je $k > \dim V$.

Svaki 0-tenzor (realni broj), 1-tenzor (kovektor) je alternirajući (nema argumenata koji se zamjenjuju).

Alternirajući 2-tenzor je antisimetrična bilinearna forma na V. Svaki se 2-tenzor (za tenzore višeg reda ne vrijedi) može napisati kao suma alternirajućeg i simetričnog tenzora

$$T(X,Y) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(T(X,Y) - T(Y,X)\right)}_{\in\Lambda^2(V)} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(T(X,Y) + T(Y,X)\right)}_{\in\Sigma^2(V)}.$$

Projekcija $\mathrm{Alt}\colon T^k(V) \to \Lambda^k(V)$ naziva se *alternirajućom projekcijom* i definira na sljedeći način

$$\mathrm{Alt}T = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(\operatorname{sgn}\sigma)({}^{\sigma}T).$$

Primjer. Ako je T 2-tenzor, tada je

$$\mathrm{Alt}T(X,Y) = \frac{1}{2}\left(T(X,Y) - T(Y,X)\right).$$

Ako je T 3-tenzor, tada je

$$\begin{gathered} \mathrm{Alt}T(X,Y,Z) = \frac{1}{6}\left(T(X,Y,Z) + T(Y,Z,X) + T(Z,X,Y) - \right. \\ \left. T(Y,X,Z) - T(X,Z,Y) - T(Z,Y,X)\right). \end{gathered}$$

Propozicija 6.9 (Svojstva alternirajuće projekcije)

1° *Za svaki kovarijantni tenzor T, $AltT$ je alternirajući tenzor.*

2° *Tenzor T je alternirajući ako i samo ako je $AltT = T$.*

Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor, $(\epsilon^1, \dots, \epsilon^n)$ baza za V^*. Za svaki multi-indeks $I = (i_1, \dots, i_k)$ duljine k, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, definiramo kovarijantni k-tenzor ϵ^I

$$\epsilon^I(X_1, \dots, X_k) = \det \begin{pmatrix} \epsilon^{i_1}(X_1) & \dots & \epsilon^{i_1}(X_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \epsilon^{i_k}(X_1) & \dots & \epsilon^{i_k}(X_k) \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} X_1^{i_1} & \dots & X_k^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ X_1^{i_k} & \dots & X_k^{i_k} \end{pmatrix}.$$

Očito je kovarijantni k-tenzor ϵ^I alternirajući tenzor (iz svojstava determinante). Nazivamo ga *elementarnim alternirajućim tenzorom.*

Primjer. Na $(\mathbf{R}^3)^*$ za dualnu bazu (e^1, e^2, e^3) standardne baze (e_1, e_2, e_3) imamo sljedeće (netrivijalne) elementarne alternirajuće tenzore (zadane djelovanjem na vektore oblika $X = X^i e_i$)

$$e^1(X) = X^1, \;\; e^2(X) = X^2, \;\; e^3(X) = X^3,$$

$$e^{12}(X, Y) = X^1Y^2 - Y^1X^2, \;\; e^{13}(X, Y) = X^1Y^3 - Y^1X^3, \;\; e^{23}(X, Y) = X^2Y^3 - Y^2X^3,$$
$$e^{123}(X, Y, Z) = \det(X, Y, Z).$$

Tenzori kojima se ponavlja indeks su trivijalni.

Propozicija 6.10 *Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor, (ϵ^i) baza za V^*. Tada je za svaki $k \leq n$ skup vektora $\{\epsilon^I\}$, gdje je I rastući multi-indeks duljine k, baza za $\Lambda^k(V)$. Stoga je*

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}.$$

Ako je $k > n$, tada je $\dim \Lambda^k(V) = 0$.

Za alternirajuće tenzore definira se bilinearni, asocijativni i antikomutativan produkt, tzv. *wedge* (*vanjski*) produkt. Ako su $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$, tada je $\omega \wedge \eta$ alternirajući $(k+l)$-tenzor

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!\, l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

Napomena. Koeficijent u definiciji $\wedge$-produkta ispred Alt u literaturi se zna i ispustiti. Navedena definicija omogućuje jednostavnost svojstva 4 u sljedećoj propoziciji:

Propozicija 6.11 (Svojstva vanjskog produkta)

1° *bilinearnost,*

2° *asocijativnost,*

3° *antikomutativnost – za* $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$, *vrijedi*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega,$$

4° $\epsilon^I \wedge \epsilon^J = \epsilon^{IJ}$, *gdje je* $IJ = (i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l)$ *multiindeks dobiven konkatenacijom* I *i* J,

5° *ako je* $(\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n)$ *baza za* V^* *i* $I = (i_1, \ldots, i_k)$ *multiindeks, tada je*

$$\epsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{i_k} = \epsilon^I,$$

6° *za kovektore* $\omega^1, \ldots, \omega^k$ *i vektore* $X_1, \ldots, X_k$ *imamo*

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k(X_1, \ldots, X_k) = \det(\langle \omega^i, X_j \rangle) = \det(\omega^i(X_j)).$$

Konačno, za vektorski prostor V definiramo prostor $\Lambda^*(V)$ kao direktnu sumu

$$\Lambda^*(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V).$$

Vrijedi $\dim \Lambda^*(V) = 2^n$ (slijedi iz Propozicije 6.10).

Zajedno s operacijom vanjskog produkta, $\Lambda^*(V)$ je asocijativna (nekomutativna) algebra. Nazivamo je ***vanjska (Grassmannova) algebra*** od V.

Štoviše, $\Lambda^*(V)$ je:

- antikomutativna algebra, jer vrijedi $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$ i
- graduirana algebra, $\big((\Lambda^k(V))(\Lambda^l(V)) \subset \Lambda^{k+l}(V)\big)$.

6.5 Alternirajući tenzori na glatkoj mnogostrukosti – diferencijalne k-forme i vanjska derivacija

Neka je M glatka mnogostrukost. Podskup od $T^k(M)$ svih alternirajućih tenzora definiramo kao

$$\Lambda^k M = \coprod_{p \in M} \Lambda^k(T_p M).$$

Kao i prije može se pokazati da je $\Lambda^k M$ je glatki vektorski svežanj nad M ranga $\binom{n}{k}$. Prerez svežnja $\Lambda^k M$ naziva se *diferencijalnom* k*-formom.* Broj k naziva se *stupnjem forme.* Vektorski prostor glatkih prereza od $\Lambda^k M$ označavamo sa $\mathcal{A}^k(M)$.

U glatkoj koordinatnoj karti, k-formu možemo zapisati kao

$$\omega = \sum_I{}' \omega_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_I{}' \omega_I dx^I,$$

gdje $'$ označava sumaciju samo po rastućim multi-indeksima $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$.

Primjer. Primjer diferencijalnih k-formi na $\mathbf{R}^3$:

1° 0-forma je neprekidna realna funkcija, 2° 1-forma je oblika $fdx + gdy + hdz$, gdje su f, g, h neprekidne funkcije,

3° 2-forma je oblika $fdx \wedge dy + gdx \wedge dz + hdy \wedge dz$, gdje su f, g, h neprekidne funkcije, primjerice

$$\omega = (\sin xy) dx \wedge dy,$$

$$\eta = dx \wedge dy + dx \wedge dz + dy \wedge dz.$$

4° 3-forma je oblika $fdx \wedge dy \wedge dz$.

Primjer. Odredite vanjski produkt 1-formi (kovektora) $\omega = xdx - ydy$ i $\eta = zdx + xdz$.

Imamo

$$\omega \wedge \eta = x^2 dx \wedge dz + yzdx \wedge dy - xydy \wedge dz.$$

Nadalje, definiramo

$$\mathcal{A}^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{A}^k(M).$$

Uz vanjski produkt $\wedge$, $\mathcal{A}^*(M)$ postaje asocijativna, antikomutativna graduirana algebra.

Vanjska derivacija. Neka je M glatka mnogostrukost. Pokazat ćemo da postoji diferencijalni operator $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ (generalizacija diferencijala realne funkcije) koji zadovoljava

$$d(d(\omega)) = 0.$$

Operator d bit će definiran u koordinatama

$$d\left(\sum_J{}' \omega_J dx^J\right) = \sum_J{}' d\omega_J \wedge dx^J, \tag{6.7}$$

gdje je $d\omega_J$ diferencijal funkcije ω_J.

Sjetimo se i da nisu sve diferencijalne 1-forme (tj. prerezi svežnja $T^*M = \Lambda^1 M$) diferencijali funkcija (tj. egzaktne forme): vrijedi da je $\omega = df$ ako i samo ako ω je zatvorena forma, dakle, u koordinatama zadovoljava

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = 0. \tag{6.8}$$

Ako definiramo 2-formu (uočiti antisimetričnost u i, j u prethodnoj formuli, usporediti s (6.7))

$$d\omega = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\right) dx^i \wedge dx^j$$

slijedi da je ω zatvorena forma ako i samo ako je $d\omega = 0$.

Teorem 6.12 (Vanjska derivacija) *Postoje jedinstvena linearna preslikavanja $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$, $k \geq 0$, koja zadovoljavaju:*

1° *Ako je f realna, glatka funkcija (0-forma), tada je df diferencijal funkcije f*

$$df(X) = Xf.$$

2° *Ako je* $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, $\eta \in \mathcal{A}^l(M)$, *tada je*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

3° $d \circ d = 0$.

Taj operator ima i sljedeća svojstva:

1° *U svakoj glatkoj koordinatnoj karti preslikavanje d je dano sa (6.7).*

2° *Preslikavanje d je lokalne prirode: ako je* $\omega = \omega'$ *na otvorenom skupu* $U \subset M$, *tada je* $d\omega = d\omega'$ *na* U.

Primjer. Neka je ω 1-forma na $\mathbf{R}^3$

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

za neke glatke funkcije P, Q, R. Tada je $d\omega$ sljedeća 2-forma

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz.$$

Neka je ω 2-forma na $\mathbf{R}^3$

$$\omega = \alpha dx \wedge dy + \beta dx \wedge dz + \gamma dy \wedge dz.$$

Tada je $d\omega$ sljedeća 3-forma

$$d\omega = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Napomena. Sjetimo se da je kovektorsko polje ω na M *egzaktno* ako postoji funkcija $f \in C^\infty(M)$ takva da je $\omega = df$ i *zatvoreno* ako zadovoljava (6.8). Pokazali smo da je 1-forma

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

zatvorena, ali nije egzaktna na $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ (egzaktna je, primjerice, na otvorenoj desnoj poluravnini, "lokalno je egzaktna"). Uočili smo da činjenica je li zadano zatvoreno kovektorsko polje egzaktno, ovisi o obliku područja na kojem je polje zadano (zvjezdasti skupovi!).

Proširujući tu definiciju na k-forme, kažemo da je glatka diferencijalna forma $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ *egzaktna* ako postoji $(k-1)$-forma η na M takva da je $\omega = d\eta$, a *zatvorena* ako je $d\omega = 0$. Zbog $d \circ d = 0$, svaka je egzaktna forma zatvorena. Pitamo se vrijedi li obrat? Općenito ne, kako pokazuje gornji primjer.

Instrument za proučavanja egzaktnih i zatvorenih k-formi su invarijante glatkih mnogostrukosti definirane kao grupe De Rhamove kohomologije - one povezuje glatku strukturu mnogostrukosti i njenu topologiju.

Definiramo ih na sljedeći način. Kako je $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ linearni operator, definiramo potprostore

$$\mathcal{Z}^p(M) = Ker(d : \mathcal{A}^p(M) \to \mathcal{A}^{p+1}(M))$$
$$\mathcal{B}^p(M) = Im(d : \mathcal{A}^{p-1}(M) \to \mathcal{A}^p(M)).$$

Prostor $\mathcal{Z}^p(M)$ je prostor zatvorenih p-formi na M, $\mathcal{B}^p(M)$ egzaktnih. Vrijedi $\mathcal{B}^p(M) \subset \mathcal{Z}^p(M)$.

p-ta grupa **de Rhamove kohomologije** je kvocijentni *vektorski prostor*

$$H^p(M) = \frac{\mathcal{Z}^p(M)}{\mathcal{B}^p(M)}.$$

Propozicija 6.13 *Difeomorfne mnogostrukosti imaju izomorfne grupe de Rhamove kohomologije.*

Teorem 6.14 (Poincaré-ova lema) *Ako je* U *zvjezdasti podskup od* $\mathbf{R}^n$, *tada je* $H^p(U) = 0$, *za* $p \geq 1$.

Teorem 6.15 (Prva grupa kohomologije) *Ako je* M *jednostavno povezana glatka mnogostrukost, tada je* $H^1(M) = 0$.

6.6 Orijentacija

Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor. *Orijentacija* od V je klasa ekvivalencije na skupu svih uređenih baza od V, pri čemu je relacija ekvivalencije definirana na sljedeći način: za dvije baze kažemo da su *konzistentno orijentirane*, ako matrica prijelaza iz jedne baze u drugu ima pozitivnu determinantu. (Ta je relacija jedna relacija ekvivalencije i ima točno dvije klase.)

Vektorski prostor s izborom orijentacije (primjerice, klase s predstavnikom $(E_1, \ldots, E_n)$) nazivamo *orijentiranim prostorom.* Svaka baza koja je u klasi s $(E_1, \ldots, E_n)$ naziva se *pozitivno orijentiranom*, inače *negativnom.*

Primjer. Na $\mathbf{R}^n$ postoji standardna orijentacija određena kanonskom bazom $(e_1, \ldots, e_n)$.

Sljedeća tvrdnja opisuje vezu između orijentacije od V i alternirajućih tenzora na V.

Propozicija 6.16 *Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor, $n \geq 1$. Neka je $\Omega \in \Lambda^n(V)$, $\Omega \neq 0$. Skup uređenih baza $(E_1, \ldots, E_n)$ za koje je $\Omega(E_1, \ldots, E_n) > 0$ je orijentacija za V.*

Dokaz. Treba pokazati da taj skup definira točnu jednu klasu ekvivalencije. Ako su $(E_1, \ldots, E_n)$, $(\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n)$ dvije uređene baze povezane matricom A, $\tilde{E}_j = A^i_j E_i$, tada je

$$\Omega(\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n) = \det(A)\Omega(E_1, \ldots, E_n).$$

Prema tome, (E_i), $(\tilde{E}_i)$ su konzistentno orijentirane ($\det(A) > 0$) ako i samo ako vrijednosti $\Omega(\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n)$ i $\Omega(E_1, \ldots, E_n)$ imaju isti predznak. $\square$

Neka je V orijentirani vektorski prostor, Ω n-kovektor koja definira orijentaciju. Kažemo da je Ω *(pozitivno) orijentirani* n-kovektor.

Primjer. $e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$ je pozitivno orijentirani n-kovektor, gdje je (e^i) dualna baza od standardne baze (e_i) od $\mathbf{R}^n$.

Neka je M glatka mnogostrukost. *Orijentacija po točkama* na M je izbor orijentacije na svakom tangencijalnom prostoru. Lokalni reper (E_i) za M je (*pozitivno*) *orijentiran* ako je $(E_i|_p)$ (pozitivno) orijentirana baza za svaki T_pM.

Orijentacija po točkama je *neprekidna* ako je svaka točka od M u domeni neke orijentiranog lokalnog repera. *Orijentacija* od M je neprekidna orijentacija po točkama. *Orijentirana* mnogostrukost je glatka mnogostrukost s izborom orijentacije. *Orijentabilna* mnogostrukost je mnogostrukost za koju postoji orijentacija.

Glatka koordinatna karta je (*pozitivno*) *orijentirana* ako je koordinatni reper $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ pozitivno orijentiran. Kolekcija glatkih koordinatnih karata $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ je *konzistentno orijentirana* ako je ako za svaki α, β funkcija prijelaza $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ ima pozitivan Jacobijan na $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Propozicija 6.17 *Neka je $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ otvoren pokrivač od M s konzistentno orijentiranim glatkim koordinatnim kartama. Tada postoji jedinstvena orijentacija od M takva da je svaka karta orijentirana. Obratno, ako je M orijentirana, tada je kolekcija svih orijentiranih glatkih karata konzistentno orijentirani pokrivač za M.*

Dokaz. Neka je $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ otvoren pokrivač od M s konzistentno orijentiranim glatkim koordinatnim kartama. To znači da matrica prijelaza između takve dvije karte ima pozitivnu determinantu. Time koordinatne baze za dane karte određuju istu orijentaciju na T_pM, što određuje orijentaciju po točkama na M. Svaka točka od M je u domeni barem jedne takve karte, odgovarajući koordinatni reper je orijentiran po definiciji, te je orijentacija po točkama neprekidna.

Obrat slično. □

Propozicija 6.18 *Proizvoljna neiščezavajuća n-forma Ω na M definira jedinstvenu orijentaciju na M za koju je Ω pozitivno orijentirana u svakoj točki. Obratno, ako je na M dana orijentacija, tada postoji neiščezavajuća glatka n-forma pozitivno orijentirana u svakoj točki.*

Neiščezavajuću n-formu Ω nazivamo *orijentacijskom formom.*

Orijentacija hiperploha.

Neka je M glatka mnogostrukost, $S \subset M$ podmnogostrukost dimenzije $n-1$. *Vektorsko polje duž S* je neprekidno preslikavanje $N : S \to TM$ takvo da je $N_p \in T_pM$, $p \in S$. Vektor $N_p \in T_pM$ u točki $p \in S$ naziva se *transverzalnim* na S ako je T_pM razapeto s N_p i T_pS. Vektorsko polje N duž S naziva se *transverzalnim* na S ako je N_p transverzalan na S u svakoj točki $p \in S$.

Unutrašnje množenje ili *kontrakcija* je linearno preslikavanje $i_X : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{k-1}(V)$, V je konačnodimenzionalan vektorski prostor, definirano sa

$$i_X\omega(Y_1, \ldots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{k-1}).$$

Oznaka $i_X\omega = X \lrcorner\, \omega$.

Hiperploha S je (imerzirana ili smještena) podmnogostrukost kodimenzije 1. Pomoću orijentacije na M i transverzalnog polja duž S uvodimo orijentaciju na S na sljedeći način:

Propozicija 6.19 *Neka je M orijentirana glatka n-mnogostrukost, S imerzirana hiperploha u M, N transverzalno vektorsko polje duž S. Tada S ima jedinstvenu orijentaciju takvu da je za svako $p \in S$, $(E_1, \ldots, E_{n-1})$ orijentirana baza za T_pS ako i samo ako je $(N_p, E_1, \ldots, E_{n-1})$ orijentirana baza za T_pM. Ako je Ω orijentacijska forma za M, tada je $(N \lrcorner\, \Omega)$ orijentacijska forma za S s obzirom na tu orijentaciju.*

Zadaci

1. Odredite kriterij/e da tenzorsko polje bude glatko. (Uputa: Postupite analogno kao za vektorska i kovektorska polja.)

2. Neka su $F : M \to N$, $G : N \to P$ glatka preslikavanja, $p \in M$, $S \in T^k(T_{F(p)N})$, $T \in T^l(T_{F(p)N})$. Pokažite da za povlak vrijedi

   (i) $F^* : T^k(T_{F(p)N}) \to T^k(T_{pM})$ je linearno preslikavanje,

   (ii) $F^*(S \otimes T) = F^*S \otimes F^*T$,

   (iii) $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$,

   (iv) $(Id_N^*S = S$.

3. Ako je $\omega = \omega_j dx^j$ 1-forma, pokažite da je $d\omega = \sum_{i<j}(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j})dx^i \wedge dx^j$.

4. Izračunajte:

   (i) $d(ydx - xdy)$,

   (ii) $d(d(ydx - xdy))$,

   (iii) $d(e^{xy}) \wedge (e^x dy - e^y dx)$

4. Neka je ω 1-forma, X, Y glatka vektorska polja. Pokažite da vrijedi

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

   (Uputa. $d\omega$ je 2-forma, za ω je dovoljno uzeti udv i provjeriti jednakost obiju strana.)

5. Ako je V n-dimenzionalni vektorski prostor, $A : V \to V$, $\omega \in \Lambda^n(V)$. Pokažite da vrijedi

$$\omega(AX_1, \ldots, AX_n) = \det A\omega(X_1, \ldots, X_n), \quad X_1, \ldots, X_n \in V.$$

   (Uputa. Usporedite djelovanje ω i $a\epsilon^{1\cdots n}$, $a = const.$)

6. Pokažite da je svaka paralelizabilna mnogostrukost orijentabilna. (Uputa. Postoji globalni glatki reper. Orijentacija po točkama se definira tako da je baza za svaki T_pS pozitivno orijentirana. Tako dobivena orijentacija je neprekidna.)

7. Pokažite da su sve sfere S^n orijentabilne. (Uputa: $N = x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ je jedno transverzalno polje duž S^n.)

8. Neka je M orijentirana glatka mnogostrukost, $S \subset M$ regularan nivo-skup definiran glatkom funkcijom $f : M \to \mathbf{R}$. Pokažite da je S orijentabilna mnogostrukost.

7 RIEMANNOVE MNOGOSTRUKOSTI

7.1 Riemannova metrika

Neka je M glatka mnogostrukost dimenzije n. *Riemannova metrika* na M je (glatko) kovarijantno 2-tenzorsko polje $g \in \mathcal{T}^2(M)$ koje je

1° simetrično tj. $g(X,Y) = g(Y,X)$,

2° pozitivno definitno tj. $g(X,X) > 0$, za $X \neq 0$.

Dakle, Riemannovom metrikom je na svakom tangencijalnom prostoru T_pM određen skalarni produkt. Mnogostrukost sa Riemannovom metrikom, (M,g), naziva se *Riemannova mnogostrukost.*

Riemannova geometrija je proučavanje svojstava Riemannovih mnogostrukosti. Geometrijska svojstva od M koja ovise samo o g nazivaju se *intrinzičnim*, *unutrašnjim* ili *metričkim* svojstvima.

Često pišemo

$$g_p(X,Y) = \langle X,Y \rangle_g,$$

za $X, Y \in T_pM$.

Neka su (x^i) glatke lokalne koordinate na M. Tada Riemannovu metriku možemo zapisati kao

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

gdje je (g_{ij}) simetrična, pozitivno definitna matrica glatkih funkcija, $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$. Koristeći simetrični produkt za tenzore, g možemo pisati kao

$$\begin{aligned} g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j &= \frac{1}{2}(g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} dx^i \otimes dx^j) \\ &= \frac{1}{2}(g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} dx^j \otimes dx^i) = g_{ij} dx^i dx^j. \end{aligned}$$

Primjer. Euklidska metrika $\bar{g}$ na $\mathbf{R}^n$ u standardnim koordinatama definirana je kao

$$\bar{g} = \delta_{ij} dx^i dx^j.$$

Drugačije zapisano

$$\bar{g} = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2$$

ili

$$(\bar{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Primijenimo li $\bar{g}$ na vektore $v, w \in T_p\mathbf{R}^n$ dobivamo

$$\bar{g}_p(v,w) = \delta_{ij} v^i w^j = \sum_{i=1}^n v^i w^i = v \cdot w.$$

Primjer – promjena koordinata. Odredimo koordinatni zapis euklidske metrike na $\mathbf{R}^2$, $\bar{g} = dx^2 + dy^2$, u polarnim koordinatama (r, φ). Znamo $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Imamo

$$\bar{g} = dx^2 + dy^2 = d(r\cos\varphi)^2 + d(r\sin\varphi)^2$$

$$= (\cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi)^2 + (\sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi)^2$$
$$= dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Dakle

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Propozicija 7.1 *Na svakoj se glatkoj mnogostrukosti može definirati Riemannova metrika.*

Dokaz. Neka je $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ otvoren pokrivač za M koordinatnim kartama i neka je ψ_α glatka particija jedinica podređena tom pokrivaču. Definirajmo na U_α

$$g_\alpha(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}) = \delta_{kl}.$$

Sada je na M Riemannova metrika

$$g = \sum_\alpha \psi_\alpha g_\alpha.$$

Kako je prethodna suma konačna u okolini svake točke, prethodnim je izrazom dobro definirano glatko kovarijatno tenzorsko polje. Ono je očito simetrično, a pozitivna definitnost izlazi iz sljedećeg: neka je $X \in T_pM$, $X \neq 0$,

$$g_p(X, X) = \sum_\alpha \psi_\alpha(p) g_\alpha|_p(X, X) \geq 0$$

jer je svaki član sume nenegativan ($\psi_\alpha \neq 0$), no sigurno je i strogo veće od 0, jer postoji ψ_α za koju je $\psi_\alpha(p) > 0$ (te funkcije u zbroju u točki imaju vrijednost 1). Kako je i $g_\alpha|_p(X, X) > 0$, to je $g_p(X, X) > 0$ za $X \neq 0$. □

Uvođenjem Riemannove metrike, u mogućnosti smo određivati duljinu (normu) tangencijalnog vektora i kut između dva tangencijalna vektora. Neka je $X \in T_pM$, tada je duljina (norma) od X

$$|X|_g = g(X, X)^{1/2} = \langle X, X\rangle_g^{1/2}.$$

Neka su $X, Y \in T_pM$, tada je mjera kuta između njih jedinstveni $\theta \in [0, \pi]$ takav da je

$$\cos\theta = \frac{\langle X, Y\rangle_g}{|X|_g |Y|_g}.$$

Za dva vektora $X, Y \in T_pM$ kažemo da su *ortogonalni* ako je $\langle X, Y\rangle_g = 0$.

Primjer – Riemannova podmnogostrukost

Neka je (M, g) Riemannova mnogostrukost, $S \subset M$ imerzirana podmnogostrukost. Definiramo glatko, simetrično 2-kovarijantno tenzorsko polje $g|_S$ na S kao $g|_S = i^* g$, gdje je $i : S \hookrightarrow M$ inkluzija. Po definiciji to znači

$$g|_S(X, Y) = i^* g(X, Y) = g(i_* X, i_* Y) = g(X, Y).$$

Dakle $g|_S$ je upravo restrikcija od g na tangencijalne vektore od S. Kako je restrikcija skalarnog produkta na vektore iz T_pS opet pozitivno definitna, to $g|_S$ definira Riemannovu metriku na S – nazivamo ju *induciranom metrikom.* S tom metrikom, podmnogostrukost S nazivamo *Riemannovom podmnogostrukošću.*

Neka je (M, g) Riemannova mnogostrukost, $S \subset M$ Riemannova podmnogostrukost. Za vektor $N \in T_pM$ kažemo da je *normalan na* S ako je N ortogonalan na T_pS s obzirom na g. Skup $N_pS \subset T_pM$ svih normalnih vektora na S u p je potprostor od T_pM. Naziva se *normalnim prostorom* od S u p. Normalni svežanj definiramo kao

$$NS = \coprod_{p \in S} N_p S.$$

Primjer – Sfera S^n

Inducirani metriku metrike $\bar{g}$ na sferi $S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$, označavamo $\mathring{g}$,

$$\mathring{g} = \bar{g}|_{S^n}$$

i nazivamo *okruglom metrikom.*

Primjer – Riemannova metrika podmnogostrukosti preko parametrizacije

Neka je $U \subset \mathbf{R}^n$ otvoren skup i $M \subset \mathbf{R}^{n+1}$ graf glatke funkcije $f : U \to \mathbf{R}$. Tada je preslikavanje

$$X : U \to \mathbf{R}^{n+1}, \ \ X(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^n, f(u))$$

glatka globalna parametrizacija od M. Odredimo induciranu metriku od M (kao podmnogostrukosti u $\mathbf{R}^{n+1}$) u tim koordinatama

$$X^* \bar{g} = X^*((dx^1)^2 + \cdots (dx^{n+1})^2) = (du^1)^2 + \cdots (du^n)^2 + df^2.$$

Specijalno, metrika gornje polusfere S^2 parametrizirane s

$$X : \mathbf{B}^2 \to \mathbf{R}^3, \ \ X(u,v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$$

dana je s

$$\mathring{g} = X^* \bar{g} = du^2 + dv^2 + (\frac{udu + vdv}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}})^2.$$

Sferu S^2_R radijusa R možemo parametrizirati i na sljedeći način:

$$X : U \to \mathbf{R}^3, \ \ U = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$$

$$X(\varphi, \theta) = R(\cos\varphi \cos\theta, \sin\varphi \cos\theta, \sin\theta).$$

Tada je

$$\begin{aligned} \mathring{g} &= d(R\cos\varphi\cos\theta)^2 + d(R\sin\varphi\cos\theta)^2 + d(R\sin\theta)^2 \\ &= R^2 \cos^2\theta (d\varphi)^2 + R^2 (d\theta)^2. \end{aligned}$$

Primjer – Prva fundamentalna forma za plohe u $\mathbf{R}^3$. Neka je $X : U \to S$ lokalna parametrizacija plohe S, $X = X(u,v)$. Tada su X_u, X_v tangencijalni vektori plohe. Uvodimo

$$E = X_u \cdot X_u, \ \ F = X_u \cdot X_v, \ \ G = X_v \cdot X_v.$$

Pišemo

$$g = (ds)^2 = E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2$$

ili

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Primjer – Produktna metrika

Neka su (M_1, g_1), (M_2, g_2) dvije Riemannove mnogostrukosti. Tada produkt $M_1 \times M_2$ ima prirodno definiranu Riemannovu metriku $g = g_1 \otimes g_2$

$$g(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2),$$

gdje su $X_i, Y_i \in T_{p_i}M_i$, uz identifikaciju $T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) = T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$.

U lokalnim koordinatama $(x^1, \ldots, x^n)$ za M_1 i $(x^{n+1}, \ldots, x^{n+m})$ za M_2, prikaz od g je $g = g_{ij}dx^i dx^j$, gdje je

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (g_1)_{ij} & 0 \\ 0 & (g_2)_{ij} \end{pmatrix}.$$

Specijalno, za torus $T^2 = S^1 \times S^1$ produktna metrika glasi

$$g = (d\varphi)^2 + (d\theta)^2,$$

što je euklidska metrika u koordinatama (φ, θ).

Pritom je metrika na $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ inducirana metrika $g = d\varphi^2$.

Pseudo-Riemannova metrika

Kovarijantni 2-tenzor g na n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V nazivamo *nedegeneriranim* ako je $g(X, Y) = 0$ za svaki $Y \in V$ ako i samo ako je $X = 0$.

Odgovarajućim izborom baze za V, nedegenerirani simetrični 2-tenzor ima za matrični prikaz dijagonalnu regularnu matricu (ako zamjenu baza vršimo ne nužno s ortogonalnom matricom, nego općenitije s regularnom matricom, tada možemo dobiti dijagonalni prikaz kojemu su elementi dijagonale $-1, 1$). Broj pozitivnih i negativnih elemenata dijagonale (na dijagonali nema 0!) ne ovisi o izboru baze (*Sylvesterov teorem o inerciji*). *Signatura* od g je par $(p, n - p)$ pozitivnih i negativnih predznaka u bilo kojem matričnom prikazu.

Pseudo-Riemannova metrika na M je glatko simetrično kovarijantno 2-tenzorsko polje g koje je nedegenerirano u svakoj točki. Pseudo-Riemannova metrika sa signaturom $(n - 1, 1)$ (ponekad: $(-1, 1, \ldots 1)$) naziva se Lorentzovom (Minkowski – Lorentzovom) metrikom.

Općenito, glatka mnogostrukost ne mora dopuštati postojanje Lorentzove metrike.

Primjer: Na $\mathbf{R}^{n+1}$ nedegeneriran simetrični 2-tenzor (pseudo-skalarni produkt) je

$$m(X, X) = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 - (x^{n+1})^2.$$

Izometrije

Neka su (M, g) i $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemannove mnogostrukosti. Glatko preslikavanje $F : M \to \tilde{M}$ naziva se *izometrijom* ako je difeomorfizam za koji vrijedi

$$F^*\tilde{g} = g.$$

Ako postoji *izometrija* između M i $\tilde{M}$, kažemo da su mnogostrukosti M i $\tilde{M}$ *izometrične*.

Općenitije, F nazivamo *lokalnom izometrijom*, ako svaka točka $p \in M$ ima okolinu takvu da je $F|_U$ izometrija sa U na otvoren podskup od $\tilde{M}$.

Riemannovu metriku nazivamo *plosnatom*, ako svaka točka $p \in M$ ima okolinu $U \subset M$ takvu da je $(U, g|_U)$ izometrično sa otvorenim podskupom od $\mathbf{R}^n$ s euklidskom metrikom.

Riemannova geometrija je proučavanje svojstava Riemannovih mnogostrukosti invarijantnih na izometrije.

Neka je $F : M \to M$ izometrija. Kompozicija izometrija od M i inverz izometrije je ponovno izometrija, stoga skup svih izometrija od M čini grupu koju nazivamo *grupom izometrija* (*simetrija*) od M.

Riemannova mnogostrukost kao metrički prostor

Neka je $c : I \to M$ *dopustiva krivulja* (po dijelovima regularna krivulja). *Duljinu luka krivulje* c definiramo kao

$$L(c) = \int_I ||\dot{c}(t)||dt.$$

Definiramo Riemannovu udaljenost $d(p, q)$ na M kao infimum duljina svih dopustivih krivulja od p do q. Na povezanoj Riemannovoj mnogostrukosti, d predstavlja metriku i vrijedi da je topologija inducirana tom metrikom jednaka topologiji mnogostrukosti M.

Volumna forma

Propozicija 7.2 *Na orijentiranoj Riemannovoj n-mnogostrukosti (M, g) postoji jedinstvena n-forma dV koja zadovoljava*

$$dV(E_1, \ldots, E_n) = 1$$

gdje je $(E_1, \ldots, E_n)$ orijentirana ortonormirana baza tangencijalnog prostora T_pM.

n-formu dV nazivamo *Riemannova volumna forma.* Može se pokazati da je u koordinatama dana s

$$dV = \sqrt{\det(g_{ij})}\varphi^1 \wedge \ldots \wedge \varphi^n,$$

gdje je $g_{ij} = g(E_i, E_j)$, $\{\varphi^i\}$ dualna baza za $(E_1, \ldots, E_n)$.

7.2 Prostorne forme

Euklidski prostor

Vektorski prostor $\mathbf{R}^n$ s euklidskim skalarnim produktom

$$\bar{g}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} X^i Y^i.$$

Ako je V neki unitarni n-dimenzionalni prostor (sa skalarnim produktom $\langle\ ,\ \rangle$), $(E_1, \ldots, E_n)$ ONB za V, $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$. Preslikavanje $(X^1, \ldots, X^n) \mapsto \sum_{i=1}^n X^i E_i$, je izometrija između $(\mathbf{R}^n, \bar{g})$ i (V, g), gdje je $g(X, Y) = \langle X, Y\rangle$, $X, Y \in T_pV \cong V$.

Sfera

Sfera S^n_R je Riemannova mnogostrukost s okruglom metrikom $\mathring{g}_R$ radijusa R.

Ortogonalna grupa $O(n+1, \mathbf{R})$ čuva sferu i euklidsku metriku, stoga restrikcija na S^n_R djeluje izometrijama.

Propozicija 7.3 *Ako su dane dvije točke $p, q \in S^n_R$ i ortonormirane baze $\{E_i\}$ za $T_pS^n_R$, $\{\tilde{E}_i\}$ za $T_qS^n_R$, tada postoji $\varphi \in O(n + 1, \mathbf{R})$ takav da je $\varphi(p) = q$ i $\varphi_* E_i = \tilde{E}_i$.*

Dokaz. Dovoljno pokazati da za danu točku $p \in S^n_R$ i ONB $\{E_i\}$ za $T_pS^n_R$, postoji ortogonalan operator koji preslikava "sjeverni pol" $N = (0, \ldots, 0, R)$ u točku p i standardnu bazu $\frac{\partial}{\partial x^i}$ u zadanu bazu $\{E_i\}$.

Neka je $p \in \mathbf{R}^{n+1}$ norme R, $\tilde{p} = p/R$ odgovarajući normirani vektor. Vektori $\{E_1, \ldots, E_n, \tilde{p}\}$ čine ONB za $\mathbf{R}^{n+1}$. Neka je $A \in M_{n+1}(\mathbf{R})$ matrica kojoj su stupci koordinate tih vektora. Tada je $A \in O(n+1, \mathbf{R})$ i djelovanjem A na vektore kanonske baze od $\mathbf{R}^{n+1}$ dobivamo $\{E_1, \ldots, E_n, \tilde{p}\}$. Posebno, $A(0, \ldots 0, R) = p$. Nadalje, kako A djeluje linearno na $\mathbf{R}^{n+1}$, matrični prikaz *push-forward*-a od A u paru odgovarajućih baza je ponovo A, dakle

$$A_* \frac{\partial}{\partial x^i} = E_i, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

$\square$

Kažemo da $O(n+1)$ djeluje *tranzitivno* na ortonormirane baze na S^n_R.

Napomena. *Djelovanje* grupe G na mnogostrukost je preslikavanje sa $G \times M$ u M, $(g, p) \mapsto g \cdot p$, koje zadovoljava

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p, \;\; g_1, g_2 \in G, \;\; p \in M,$$

$$e \cdot p = p, \;\; p \in M.$$

Djelovanje je *tranzitivno* ako za svake dvije točke $p, q \in M$ postoji $g \in G$ takav da je $g \cdot p = q$.

Riemannovu mnogostrukost nazivamo *homogenom* ako dopušta djelovanje Liejeve grupe (izometrijama) koje je glatko i tranzitivno; *izotropnom* ako podgrupa izotropije $G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$ djeluje tranzitivno (tj. djeluje g_*) na skup jediničnih vektora u T_pM.

Prethodnom propozicijom je dokazano da je sfera S^n_R homogena i izotropna Riemannova mnogostrukost.

Za metrike g_1, g_2 na mnogostrukosti M kažemo da su *konformne* ako postoji pozitivna funkcija $f \in C^\infty(M)$ tako da vrijedi

$$g_2 = f g_1.$$

Dvije Riemannove mnogostrukosti (M, g), $(\tilde{M}, \tilde{g})$ su *konformno ekvivalentne* ako postoji difeomorfizam $\varphi : M \to \tilde{M}$ takav da je $\varphi^* \tilde{g}$ konformno sa g.

Vrijedi da su dvije metrike konformne ako i samo ako definiraju jednake kutove (ne nužno i jednake duljine).

Pokažimo da je postoji konformna ekvivalencija između $\mathbf{R}^n$ i sfere S^n_R bez jedne točke. Ostvaruje se stereografskom projekcijom (iz sjevernog pola N)

$$\sigma : S^n_R \setminus \{N\} \to \mathbf{R}^n,$$

gdje je $\sigma(P)$ točka prostora $\mathbf{R}^n$ (hiperravnine u $\mathbf{R}^{n+1}$) u kojoj pravac NP presijeca hiperravninu $\mathbf{R}^n$. Ako je $P = (\xi^1, \ldots, \xi^n, \tau) = (\xi, \tau)$, tada je

$$\sigma(P) = U = (u^1, \ldots, u^n, 0) = (u, 0),$$

a hiperravnina $\mathbf{R}^n$ je zadana s $\tau = 0$ u $\mathbf{R}^{n+1}$. Prema tome, U je određena kao $\overrightarrow{NU} = \lambda \overrightarrow{NP}$, za neki λ. Dobivamo

$$u^i = \lambda \xi^i,$$

$$-R = \lambda(\tau - R).$$

Eliminacijom λ iz druge jednadžbe, dobivamo

$$\sigma(\xi, \tau) = u = \frac{R\xi}{R - \tau}.$$

Očito je σ glatko preslikavanje na $S^n_R \setminus \{N\}$. Da bismo pokazali da je difeomorfizam, odredimo mu inverz

$$\xi^i = \frac{u^i}{\lambda}, \quad \tau = R\frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Kako točka inverza leži na sferi, to vrijedi $|\xi|^2 + \tau^2 = R^2$

$$\frac{|u|^2}{\lambda^2} + R^2\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2} = R^2,$$

odakle je

$$\lambda = \frac{|u|^2 + R^2}{2R^2}.$$

Sada je

$$\sigma^{-1}(u) = (\xi, \tau) = \left(\frac{2R^2 u}{|u|^2 + R^2}, R\frac{|u|^2 - R^2}{|u|^2 + R^2}\right),$$

odakle je vidljivo da je σ difeomorfizam.

Propozicija 7.4 *Stereografska projekcija je konformna ekvivalencija između $S^n_R \setminus \{N\}$ i $\mathbf{R}^n$.*

Dokaz. Pomoću lokalne parametrizacije $\sigma^{-1} : \mathbf{R}^n \to S^n_R \setminus \{N\}$, odredimo povlak metrike $\overset{\circ}{g}_R$. Neka je $q \in \mathbf{R}^n$, $V \in T_q\mathbf{R}^n$. Tada po definiciji okrugle metrike vrijedi

$$(\sigma^{-1})^* \overset{\circ}{g}_R (V, V) = \overset{\circ}{g}_R (\sigma_*^{-1}V, \sigma_*^{-1}V) = \bar{g}(\sigma_*^{-1}V, \sigma_*^{-1}V),$$

gdje je $\bar{g}$ euklidska metrika na $\mathbf{R}^{n+1}$.
Ako pišemo $V = V^i\frac{\partial}{\partial u^i}$, $\sigma^{-1}(u) = (\xi(u), \tau(u))$, tada je

$$\begin{aligned}\sigma_*^{-1}V &= V^i\frac{\partial \xi^j}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial \xi^j} + V^i\frac{\partial \tau}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial \tau}\\ &= V\xi^j\frac{\partial}{\partial \xi^j} + V\tau\frac{\partial}{\partial \tau}.\end{aligned}$$

Nadalje je

$$V\xi^j = V\left(\frac{2R^2u^j}{|u|^2 + R^2}\right) = \frac{2R^2V^j}{|u|^2 + R^2} - \frac{4R^2u^j\langle V, u\rangle}{(|u|^2 + R^2)^2},$$

$$V\tau = V\left(R\frac{|u|^2 - R^2}{|u|^2 + R^2}\right) = \frac{2R\langle V, u\rangle}{|u|^2 + R^2} - \frac{2R(|u|^2 - R^2)\langle V, u\rangle}{(|u|^2 + R^2)^2} = \frac{4R^3\langle V, u\rangle}{(|u|^2 + R^2)^2},$$

gdje smo označili $V(|u|^2) = 2\sum_k V^k u^k = 2\langle V, u\rangle$.
Prema tome,

$$(\sigma^{-1})^* \overset{\circ}{g}_R = \frac{4R^4}{(|u|^2 + R^2)^2}\bar{g},$$

gdje je $\bar{g}$ euklidska metrika na $\mathbf{R}^n$. $\square$

Odavde vidimo da je sfera *lokalno konformno plosnata.*

Hiperbolički prostor

Za svaki $R > 0$ u idućoj propoziciji definiramo *hiperbolički prostor radijusa* R, oznaka $\mathbf{H}^n_R$. Ako je $R = 1$, pripadni prostor nazivamo *hiperboličkim prostorom*, oznaka $\mathbf{H}^n$.

Propozicija 7.5 *Za zadani $R > O$ sljedeće su Riemannove mnogostrukosti izometrične:*

1° ***(Hiperbolički model)*** $\boldsymbol{H}^n_R$ *je gornja ploha ($\tau > 0$) dvoplošnog hiperboloida u $\mathbf{R}^{n+1}$, danog u koordinatama $(\xi^1, \ldots, \xi^n, \tau)$ jednadžbom $|\tau|^2 - |\xi|^2 = R^2$ s metrikom*

$$h^1_R = i^* m,$$

gdje je $i : H^n_R \to \mathbf{R}^{n+1}$ inkluzija, a m metrika Minkowskog $m = (d\xi^1)^2 + \cdots (d\xi^n)^2 - (d\tau)^2$.

2° ***(Poincaré-ov model kugle)*** *Neka je $\boldsymbol{B}^n_R$ (otvorena) kugla u $\mathbf{R}^n$ s metrikom danom u koordinatama $(u^1, \ldots, u^n)$*

$$h^2_R = 4R^4 \frac{(du^1)^2 + \cdots + (du^n)^2}{(R^2 - |u|^2)^2}.$$

3° ***(Poincaré-ov model gornjeg poluprostora)*** *Neka je $\boldsymbol{U}^n_R$ gornji poluprostor u $\mathbf{R}^n$ definiran u koordinatama $(x^1, \ldots, x^{n-1}, y)$ kao $y > 0$ i s metrikom*

$$h^3_R = R^2 \frac{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^{n-1})^2 + (dy)^2}{y^2}.$$

Dokaz. Difeomorfizam

$$\pi : \mathbf{H}^n_R \to \mathbf{B}^n_R$$

je izomorfizam između metrika iz prvog i drugog dijela tvrdnje definiran na sljedeći način: Neka je $S = (0, \ldots, 0, -R)$. Za svaku točku $P = (\xi^1, \ldots, \xi^n, \tau)$ definiramo $\pi(P) = u$, gdje je $U = (u, 0)$ točka u kojoj pravac SP presijeca hiperravninu $\tau = 0$. Preslikavanje π nazivamo *hiperboličkom stereografskom projekcijom.* Kao i kod stereografske projekcije sfere, dobivamo

$$\pi(\xi, \tau) = \frac{R\xi}{R + \tau},$$

$$\pi^{-1}(u) = (\frac{2R^2 u}{R^2 - |u|^2}, R\frac{R^2 + |u|^2}{R^2 - |u|^2}).$$

Treba pokazati $(\pi^{-1})^* h^1_R = h^2_R$.

Uočimo da odavde također slijedi da je h^1_R pozitivno definitno.

Sada definiramo difeomorfizam

$$\kappa : \mathbf{B}^n_R \to \mathbf{U}^n_R$$

$$\kappa(u, v) = (x, y) = \left(\frac{2R^2 u}{|u|^2 + (v - R)^2}, R\frac{R^2 - |u|^2 - v^2}{|u|^2 + (v - R)^2} \right),$$

$$\kappa^{-1}(x, y) = \left(\frac{2R^2 x}{|x|^2 + (y + R)^2}, R\frac{|x|^2 + |y|^2 - R^2}{|x|^2 + (y + R)^2} \right),$$

gdje je $(u, v) = (u^1, \ldots, u^{n-1}, v)$. Treba pokazati $(\kappa^{-1})^* h^3_R = h^2_R$. □

Uočimo: hiperbolička metrika je lokalno konformno plosnata.

Napomena – Simetrije od $\mathbf{H}^n_R$. Označimo sa $O(n, 1)$ grupu linearnih operatora na $\mathbf{R}^{n+1}$ koja čuva metriku Minkowskog. Grupa $O(n, 1)$ naziva se *Lorentzovom grupom.* Svaki element grupe $O(n, 1)$ čuva i dvoplošni hiperboloid $\{\tau^2 - |\xi|^2 = R^2\}$, a sa $O_+(n, 1)$ označujemo podgrupu koja čuva gornju plohu $\tau > 0$. Stoga $O_+(n, 1)$ čuva $\mathbf{H}^n_R$ i m, te djeluje na $\mathbf{H}^n_R$ kao izometrije.

Propozicija 7.6 *$O_+(n, 1)$ djeluje tranzitivno na skup ortonormiranih baza na $\boldsymbol{H}^n_R$. Stoga je $\boldsymbol{H}^n_R$ homogena i izotropna Riemannova mnogostrukost.*

7.3 Koneksija

Cilj: "Povezati" različite tangencijalne prostore mnogostrukosti kako bi se računala usmjerena derivacija vektorskih polja.

Neka je $\pi : E \to M$ vektorski svežanj na M, $\mathcal{E}(M)$ prostor glatkih prereza od E. Koneksija od E je preslikavanje

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M),$$

pišemo $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, koje zadovoljava

(a) $\nabla_X Y$ je linearno nad $C^\infty(M)$ u X,

(b) $\nabla_X Y$ je linearno nad $\mathbf{R}$ u Y,

(b) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$.

$\nabla_X Y$ se čita *kovarijantna derivacija* od Y u smjeru X.

Ako je E tangencijalni svežanj TM, pripadnu koneksiju nazivamo *linearnom koneksijom.*

Neka je $\{E_i\}$ lokalni reper za TM na otvorenom skupu $U \subset M$ (primjerice koordinatni reper $\frac{\partial}{\partial x^i}$). Možemo pisati

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k.$$

n^3 funkcija Γ_{ij}^k nazivaju se *Christoffelovi simboli* od ∇ u danom reperu.

Propozicija 7.7 *Neka je ∇ linearna koneksija, $X, Y \in \mathcal{T}(U)$, $X = X^i E_i$, $Y = Y^i E_i$. Tada je*

$$\nabla_X Y = (XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E_k. \tag{7.9}$$

Primjer. Euklidska koneksija

$$\bar{\nabla}_X (Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = (XY^j) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Drugim riječima, $\bar{\nabla}_X Y$ je vektorsko polje kojemu su komponente usmjerene derivacije koordinata od Y u smjeru X. Svi su Christoffelovi simboli jednaki 0.

Propozicija 7.8 *Svaka mnogostrukost dopušta linearnu koneksiju.*

Dokaz. Neka je $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ otvoren pokrivač za M koordinatnim kartama i neka je ψ_α glatka particija jedinice podređena tom pokrivaču.

Na U_α konstruiramo ∇^α zadavanjem Christoffelovih simbola za koordinatni reper $\frac{\partial}{\partial x^i}$ i korištenjem formule (7.9). Još trebamo "polijepiti" definirane ∇^α. Koristimo particiju jedinice i definiramo

$$\nabla_X Y = \sum_\alpha \psi_\alpha \nabla_X^\alpha Y.$$

Ovako definirano preslikavanje je glatko, linearno nad $\mathbf{R}$ u Y i linearno nad $C^\infty(M)$ u X. Trebamo provjeriti produktno pravilo (paziti! za dane linearne koneksije ∇^1 i ∇^2 niti $\frac{1}{2}\nabla^1$, niti $\nabla^1 + \nabla^2$ ne zadovoljavaju produktno pravilo). Vrijedi

$$\begin{aligned}
\nabla_X(fY) &= \sum_\alpha \psi_\alpha \nabla_X^\alpha (fY) \\
&= \sum_\alpha \psi_\alpha ((Xf)Y + f\nabla_X^\alpha Y) \\
&= (Xf)Y + f \sum_\alpha \psi_\alpha \nabla_X^\alpha Y = (Xf)Y + f\nabla_X Y.
\end{aligned}$$

□

8 RIEMANNOVA KONEKSIJA, ZAKRIVLJENOSTI I RIEMANNOVE PODMNOGOSTRUKOSTI

8.1 Vektorska polja duž krivulje

Neka je $c : I \to M$ krivulja (glatko preslikavanje $: I \to M$, $I \subset \mathbf{R}$ otvoren interval). *Vektorsko polje duž* c je glatko preslikavanje $V : I \to TM$ takvo da je $V(t) \in T_{c(t)}M$, $t \in I$.

Primjer:

- Vektorsko polje brzine $\dot{c}(t) := c_*(d/dt)$, $\dot{c}(t)f = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)$.
- Ako je $c : I \to \mathbf{R}^2$, tada definiramo $N(t) = J\dot{c}(t)$, gdje je J pozitivna rotacija za $\pi/2$. Polje n se naziva *normalno polje* krivulje c.
- Ako je $\tilde{V} \in \mathcal{T}(M)$, za $t \in I$ definiramo $V(t) = \tilde{V}_{c(t)}$.

Za vektorsko polje V duž c kažemo da se *može proširiti* (engl. *extendible*), ako postoji vektorsko polje $\tilde{V}$ u okolini slike od c za koje vrijedi $V(t) = \tilde{V}_{c(t)}$.

Označimo sad sa $\mathcal{T}(c)$ skup svih vektorskih polja duž c. Uz uobičajeno definirane operacije $\mathcal{T}(c)$ je realan vektorski prostor.

Propozicija 8.1 *Neka je ∇ linearna koneksija na M. Tada za svaku krivulju $c : I \to M$, ∇ definira jedinstveno preslikavanje*

$$D_t : \mathcal{T}(c) \to \mathcal{T}(c)$$

koji zadovoljava sljedeća svojstva:

1° *Linearnost nad* $\mathbf{R}$,

2° *Produktno pravilo* $D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV$, $f \in C^\infty(I)$,

3° *Ako se V može proširiti, tada za bilo koje proširenje $\tilde{V}$ vrijedi*

$$D_tV(t) = \nabla_{\dot{c}(t)}\tilde{V}.$$

Linearni operator D_tV naziva se *kovarijantna derivacija od V duž c.*

Dokaz. [Skica.] U koordinatnoj okolini točke $c(t_0)$ možemo pisati

$$V(t) = V^j(t)\partial_j.$$

Kako se polja ∂_j mogu proširiti, to vrijedi

$$\begin{aligned} D_tV(t_0) &= \dot{V}^j(t_0)\partial_j + V^j(t_0)\nabla_{\dot{c}(t_0)}\partial_j \\ &= \left(\dot{V}^k(t_0) + V^j(t_0)\dot{c}^i(t_0)\Gamma^k_{ij}(c(t_0))\right)\partial_k. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Time je pokazana jedinstvenost.

Egzistencija. Ako je krivulja c sadržana u jednoj karti, tada se D_tV definira formulom (8.10) (pokazati da zadovoljava tražena svojstva). Ako je potrebno $c(I)$ pokriti s više koordinatnih karata, u svakoj se karti definira D_tV, a jedinstvenost povlači da se njihove definicije podudaraju na presjeku karata. □

Napomena. Linearna koneksija inducira koneksiju i na svakom tenzorskom svežnju nad M. Specijalno na T^0M

$$\nabla_X f = Xf.$$

8.2 Geodetske krivulje i paralelni pomak

Motivacija. Generalizirati svojstva (koja?) pravca iz $\mathbf{R}^n$. Geodetske krivulje ćemo definirati kao krivulje *akceleracije jednake 0.* Mogu se opisati i kao krivulje koje (lokalno) minimiziraju udaljenost - tehnički zahtjevnije. Ili kao krivulje (geodetske) zakrivljenosti 0.

Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇ i neka je c krivulja u M. *Akceleracija* od c je vektorsko polje $D_t\dot{c}$ duž c. Krivulja se naziva *geodetskom* s obzirom na ∇ ako je

$$D_t\dot{c} \equiv 0.$$

Teorem 8.2 (Egzistencija i jedinstvenost geodetskih krivulja) *Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇. Za svaku točku $p \in M$, tangencijalni vektor $V \in T_pM$ i $t_0 \in \mathbf{R}$, postoji otvoreni interval $I \subset \mathbf{R}$, $t_0 \in I$, i geodetska krivulja $c : I \to M$ koja zadovoljava $c(t_0) = p$, $\dot{c}(t_0) = V$. Svake dvije takve geodetske krivulje poklapaju se na presjeku domena.*

Dokaz. Neka su (x^i) koordinate u okolini U od p. Koristeći (8.10) vidimo da je krivulja

$$c(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$$

geodetska ako i samo ako vrijedi

$$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma^k_{ij}(x(t)) = 0.$$

Dobili smo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda za funkcije $x^i(t)$. Uvođenjem varijabli

$$\dot{x}^k(t) = v^k(t),$$

$$\dot{v}^k(t) = -v^i(t)v^j(t)\Gamma^k_{ij}(x(t))$$

dobivamo ekvivalentni sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Egzistenciju i jedinstvenost rješenja tog sustava garantira teorija. $\square$

Maksimalna geodetska krivulja je geodetska krivulja koja se ne može proširiti na veći interval. Naziva se i geodetskom krivuljom s početnom točkom p i početnim vektorom brzine V.

Neka je M mnogostrukost s linearnom koneksijom ∇. Vektorsko polje V duž c je *paralelno* duž c s obzirom na ∇ ako vrijedi

$$D_tV \equiv 0.$$

Za vektorsko polje na M kažemo da je *paralelno* ako je paralelno duž svake krivulje. To vrijedi ako i samo ako $\nabla V \equiv 0$ (totalna kovarijantna derivacija).

Sljedeća tvrdnja kaže da se svaki tangencijalni vektor u nekoj točki krivulje može jedinstveno proširiti do paralelnog vektorskog polja duž cijele krivulje:

Teorem 8.3 (Paralelni pomak) *Neka je $c : I \to M$ krivulja, $t_0 \in I$, $V_0 \in T_{c(t_0)}M$. Tada postoji jedinstveno paralelno vektorsko polje V duž c takvo da je $V(t_0) = V_0$.*

Vektorsko polje iz teorema naziva se *paralelni pomak* od V_0 duž c.

Dokaz. [Skica.] Ako je $c(I)$ sadržano u jednoj koordinatnoj karti, tada je V paraleno duž c ako i samo ako je

$$\dot{V}^k(t) = -V^j(t)\dot{c}^i(t)\Gamma^k_{ij}(c(t)), \;\; k = 1, \ldots n.$$

To je sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi za $(V^1(t), \ldots, V^n(t))$. Teorem egzistencije i jedinstvenosti garantira postojanje rješenja za svaki $t \in I$ za bilo koji početni uvjet $V(t_0) = V_0$. $\square$

Ako je $c : I \to M$ krivulja, $t_o, t_1 \in I$, tada paralelni pomak definira operator

$$P_{t_0 t_1} : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t_1)}M$$

$$P_{t_0 t_1} V_0 = V(t_1),$$

gdje je V paralelni pomak od V_0 duž c. Za operator $P_{t_0 t_1}$ može se provjeriti da je linearni izomorfizam. Osim toga vrijedi

$$D_t V(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{P_{t_0 t}^{-1} V(t) - V(t_0)}{t - t_0}.$$

8.3 Riemannova koneksija

Motivacija. Riemannove podmnogostrukosti – akceleracija geodetske krivulje ima trivijalnu projekciju na tangencijalni potprostor podmnogostrukosti. Preciznije, neka je $M \subset \mathbf{R}^n$, V vektorsko polje na M kojeg (pomoću particije jedinice) možemo proširiti do vektorskog polja na $\mathbf{R}^n$. Definiramo preslikavanje

$$\nabla^\top : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$$

$$\nabla^\top_X Y = \pi^\top(\bar{\nabla}_X Y),$$

gdje je $\pi^\top$ je ortogonalna projekcija, $\pi^\top : T_p\mathbf{R}^n \to T_pM$.

Propozicija 8.4 *Operator $\nabla^\top$ je koneksija na M.*

Linearna koneksija $\nabla^\top$ se naziva *tangencijalna koneksija* na M.

Euklidska koneksija na $\mathbf{R}^n$ (sa Riemannovom metrikom $\langle\,,\,\rangle$) ima svojstvo

$$\bar{\nabla}_X \langle Y, Z\rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, Z\rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X Z\rangle.$$

Isto svojstvo ima i tangencijalna koneksija.

Svojstvo se može poopćiti na Riemannove (pseudo)-mnogostrukosti. Neka je g Riemannova (ili pseudo-Riemannova mnogostrukost) na M. Za linearnu koneksiju ∇ kažemo da je *usklađena* (*kompatibilna*) s g ako zadovoljava

$$\nabla_X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle. \tag{8.11}$$

Propozicija 8.5 *Sljedeća svojstva linearne koneksije ∇ na Riemannovoj mnogostrukosti su ekvivalentna:*

1° *∇ je usklađena s g,*

2° *$\nabla g \equiv 0$,*

3° *Ako su V, W vektorska polja duž krivulje c, tada*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle,$$

4° *Ako su V, W paralelna vektorska polja duž krivulje c, tada je $\langle V, W\rangle$ konstantno,*

5° *Paralelni prijenos $P_{t_0 t_1} : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t_1)}M$ je izometrija za svaki t_0, t_1.*

Za linearnu koneksiju kažemo da je *simetrična* ako njena *torzija*, tj. $(2,1)$-tenzor $\tau : \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M \to \mathcal{T}M$

$$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

iščezava, tj. vrijedi

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y].$$

Teorem 8.6 (Fundamentalni teorem Riemannove geometrije) *Neka je (M,g) Riemannova (ili pseudo-Riemannova) mnogostrukost. Tada postoji jedinstvena linearna koneksija ∇ na M koja je simetrična i usklađena s g.*

Ta se koneksija naziva *Riemannovom* ili *Levi-Civita* koneksijom od g.

Dokaz. Dokažimo najprije jedinstvenost. Neka je ∇ koneksija sa traženim svojstvima i neka su $X,Y,Z \in \mathcal{T}(M)$ vektorska polja. Tada uvjet usklađenosti (8.11) (ciklički) napisan za polja X,Y,Z daje

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

$$Y\langle Z,X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

$$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle.$$

Korištenjem simetričnosti koneksije dobivamo

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle$$

$$Y\langle Z,X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle + \langle Z, [Y,X]\rangle$$

$$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle + \langle X, [Z;Y]\rangle.$$

Zbrojimo li prve dvije jednadžbe i oduzmemo treću, dobivamo

$$X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle = 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y,[X,Z]\rangle + \langle Z,[Y,X]\rangle - \langle X,[Z,Y]\rangle.$$

Odavde slijedi

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\left(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle\right).$$

Prethodna relacija se naziva *Koszulova formula.*

Pretpostavimo sada da su ∇^1, ∇^2 dvije koneksije koje su simetrične i usklađene s g. Kako desna strana Koszulove formule ne ovisi o koneksiji, slijedi

$$\langle \nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y, Z\rangle = 0,$$

za sve X,Y,Z. To vrijedi ako i samo ako je $\nabla^1_X Y = \nabla^2_X Y$ za sve X,Y, odakle slijedi $\nabla^1 = \nabla^2$.

Dokažimo sada egzistenciju. Dovoljno je pokazati da postoji tražena koneksija u koordinatnoj karti, jer će tada po jedinstvenosti slijediti da se koneksije konstruirane za različite karte podudaraju na presjeku karata.

Neka je $(U,(x^i))$ koordinatna karta i neka su $(\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i})$ koordinatna vektorska polja lokalnog repera. Kako je njihova Liejeva zagrada jednaka 0, to iz Koszulove formule slijedi

$$\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l\rangle = \frac{1}{2}\left(\partial_i\langle\partial_j,\partial_l\rangle + \partial_j\langle\partial_l,\partial_i\rangle - \partial_l\langle\partial_i,\partial_j\rangle\right).$$

Imali smo

$$g_{ij} = \langle\partial_i,\partial_j\rangle, \;\; \nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^m_{ij}\partial_m.$$

Korištenjem prethodnih formula, dobivamo

$$\Gamma_{ij}^m g_{ml} = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right). \tag{8.12}$$

Množenjem obje strane s inverznom matricom (g^{lk}) matrice (g_{ij}), $g_{ml}g^{lk} = \delta_m^k$, slijedi

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right).$$

Ovom je formulom u karti definirana koneksija (sjetimo se da koneksiju određuju Christoffelovi simboli!) i očito vrijedi $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ iz čega slijedi simetričnost koneksije. Još treba provjeriti usklađenost s metrikom. U tu svrhu provjeravamo $\nabla g = 0$. Komponente od ∇g s obzirom na lokalne koordinate su

$$g_{ij,k} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \Gamma_{kj}^l g_{il}.$$

Sada koristeći (8.12) dobivamo

$$\Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il} = \frac{1}{2}\left(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ki}\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{kj}\right) = \partial_k g_{ij}$$

što povlači

$$g_{ij,k} = 0.$$

□

Na Riemannovoj mnogostrukosti standardno uzimamo Riemannovu koneksiju i s obzirom na nju promatramo, primjerice, geodetske krivulje.

Propozicija 8.7 *(Riemannove) geodetske krivulje su krivulje konstantne brzine.*

Dokaz. Neka je c geodetska krivulja. Kako je $\dot{c}$ paralelno duž c, to je $|\dot{c}| = \langle \dot{c}, \dot{c}\rangle^{1/2}$ konstantno. □

Propozicija 8.8 *Neka je $\varphi : (M, g) \to (\widetilde{M}, \tilde{g})$ izometrija. Tada φ preslikava:*

1° *Riemannovu koneksiju ∇ u Riemannovu koneksiju $\widetilde{\nabla}$;*

2° *geodetske krivulje u geodetske.*

Primjer: Geodetske krivulje prostornih formi

1° Euklidski prostor $(\mathbf{R}^n, \bar{g})$. Znamo da su Christoffelovi simboli jednaki 0, Riemannova koneksija je euklidska koneksija. Geodetske krivulje su pravci. Paralelna vektorska polja su polja s konstantnim koeficijentima.

2° Sfera $(S_R^n, \overset{\circ}{g})$. Geodetske krivulje su velike (glavne) kružnice (presjeci 2–ravninama kroz ishodište) s parametrizacijom konstantne brzine.

3° Hiperbolički prostor

(a) (H_R^n, h_R^1). Geodetske krivulje su "velike hiperbole" tj. presjeci H_R^n 2-ravninama kroz ishodište s parametrizacijom konstantne brzine.

(b) (H_R^n, h_R^2). Geodetske krivulje su dužine kroz ishodište i kružni lukovi unutar kruga koji ortogonalno sijeku rub kruga s parametrizacijom konstantne brzine.

(c) (H_R^n, h_R^3). Geodetske krivulje su vertikalni polupravci i polukružnice sa središtem u hiperravnini $y = 0$ s parametrizacijom konstantne brzine.

8.4 Zakrivljenost

Neka je M Riemannova mnogostrukost. *Riemannov endomorfizam zakrivljenosti* je preslikavanje $R : \mathcal{T}(M)\times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ definiran s

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Riemannov endomorfizam zakrivljenosti je jedno $(3,1)$-tenzorsko polje (pokazati multilinearnost).

Tenzor R možemo zapisati preko lokalnog repera (uz dogovor da će zadnji indeks biti kontravarijantan)

$$R = R^l_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes d^k \otimes \partial_l.$$

Pritom su koeficijenti R^l_{ijk} definirani na sljedeći način

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R^l_{ijk}\partial_l.$$

Riemannov tenzor zakrivljenosti Rm je kovarijantni 4-tenzor koji se dobiva od endomorfizma R "*spuštanjem indeksa*"

$$Rm(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle.$$

Zapis Riemannovog tenzora zakrivljenosti pomoću lokalnih koordinata glasi

$$Rm = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes d^k \otimes dx^l,$$

gdje je

$$R_{ijkl} = g_{lm}R^m_{ijk}$$

Može se pokazati da vrijedi

$$R_{ijkl} = g_{lm}\left(\frac{\partial \Gamma^m_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^j} + (\Gamma^s_{jk}\Gamma^m_{is} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^m_{js})\right).$$

Propozicija 8.9 *Riemannov endomorfizam zakrivljenosti R i Riemannov tenzor zakrivljenosti Rm su invarijante lokalne izometrije.*

Sjetimo se da smo *plosnatu* mnogostrukost definirali kao mnogostrukost koja je lokalno izometrična s euklidskim prostorom.

Teorem 8.10 *Riemannova mnogostrukost je plosnata ako i samo ako njen tenzor zakrivljenosti iščezava.*

Uvjet za "plosnatost":

$$\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z = \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Ricci-jeva zakrivljenost Rc je kovarijantan 2-tenzor definiran kao trag Riemannovog endomorfizma zakrivljenosti u prvom i zadnjem indeksu. Komponente od Rc označavaju se sa R_{ij} i za njih vrijedi

$$R_{ij} = R^k_{kij} = g^{km}R_{kijm}.$$

Skalarna zakrivljenost je funkcija S definirana kao trag Riccijeve zakrivljenosti

$$S = \mathrm{tr}_g Rc = R^i_i = g^{ij}R_{ij}.$$

8.5 Riemannove podmnogostrukosti

Neka je $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ Riemannova mnogostrukost dimenzije m, M mnogostrukost dimenzije n, $i : M \hookrightarrow \widetilde{M}$ imerzija. Ako mnogostrukost M snabdijemo induciranom Riemannovom metrikom $g := i^*\tilde{g}$, tada imerziju i nazivamo *izometričkom imerzijom.* Ako je uz to preslikavanje i injektivno (ili smještenje), tada M postaje imerzirana (ili smještena) podmnogostrukost od $\widetilde{M}$, tzv. Riemannova podmogostrukost. U toj se situaciji $\widetilde{M}$ naziva *ambijentnom mnogostrukosti* od M.

Neka je, dakle, i imerzija. Kako su svi računi lokalne prirode i kako je imerzija lokalno smještenje, možemo pretpostaviti da je M smještena Riemannova podmnogostrukost.

Skup

$$T\widetilde{M}|_M := \coprod_{p\in M} T_p\widetilde{M}$$

je glatki vektorski svežanj nad M s lokalnom trivijalizacijom određenom vektorskim poljima $\partial_1, \ldots, \partial_m$ s obzirom na kartu od $\widetilde{M}$. Svežanj $T\widetilde{M}|_M$ naziva se *ambijentnim tangencijalnim svežnjem* nad M.

Svako se glatko vektorsko polje na $\widetilde{M}$ može restringirati na glatki prerez od $T\widetilde{M}|_M$ i obratno, svaki se glatki prerez od $T\widetilde{M}|_M$ može proširiti do glatkog vektorskog polja od $\widetilde{M}$ (koristeći particiju jedinice).

U svakoj točki $p \in M$ ambijentni tangencijalni prostor $T_p\widetilde{M}$ ima rastav na ortogonalnu direktnu sumu

$$T_p\widetilde{M} = T_pM \oplus N_pM,$$

gdje je $N_pM := (T_pM)^\perp$. Svežanj $NM = \coprod_{p\in M} N_pM$ naziva se *normalnim svežnjem* od M.

Druga fundamentalna forma podmnogostrukosti.

Neka su X, Y vektorska polja na $\mathcal{T}(M)$. Možemo ih proširiti do vektorskih polja na $\widetilde{M}$, primijeniti $\widetilde{\nabla}$ i napraviti rastav

$$\widetilde{\nabla}_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\top + (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Druga fundamentalna forma od M je preslikavanje $II : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{N}(M)$

$$II(X, Y) = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp,$$

pri čemu su X, Y prošireni do polja na $\widetilde{M}$. Kako $\pi^\perp$ preslikava glatke prereze u glatke, to je $II(X, Y)$ glatki prerez od NM.

Propozicija 8.11 (Svojstva druge fundamentalne forme) *Druga fundamentalna forma je*

1° *neovisna o proširenjima X, Y,*

2° *bilinearna nad $C^\infty(M)$,*

3° *simetrična u X, Y.*

Teorem 8.12 (Gaussova formula) *Neka su $X, Y \in \mathcal{T}M$ i prošireni do vektorskih polja na $\widetilde{M}$, tada na M vrijedi*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y).$$

Teorem 8.13 (Weingartenova jednadžba) *Neka su $X, Y \in \mathcal{T}M$ i $N \in \mathcal{N}(M)$. Ako su X, Y, N prošireni na $\widetilde{M}$, tada vrijedi*

$$\langle \widetilde{\nabla}_X N, Y \rangle = -\langle N, II(X, Y) \rangle.$$

Teorem 8.14 (Gaussova jednadžba) *Za $X, Y, Z, W \in T_pM$ vrijedi sljedeća jednadžba*

$$\widetilde{Rm}(X,Y,Z,W) = Rm(X,Y,Z,W) - \langle II(X,W), II(Y,Z)\rangle + \langle II(X,Z), II(Y,W)\rangle.$$

Hiperplohe u euklidskom prostoru

Neka je M hiperploha u $(\mathbf{R}^{n+1}, \bar{g})$ s induciranom metrikom. U svakoj točki od M postoje točno dvije jedinične normale. Izborom jedne od njih, tj. izborom glatkog prereza od NM, hiperploha M postaje orijentirana.

Skalarna druga fundamentalna forma je simetričan kovarijantan 2-tenzor h definiran s

$$h(X,Y) = \langle II(X,Y), N\rangle.$$

Operator oblika plohe je tenzorsko polje $s \in \mathcal{T}_1^1(M)$ definirano s

$$\langle X, sY\rangle = h(X,Y), \ \ X,Y \in \mathcal{T}(M).$$

Kako je forma h simetrična, to je operator s simetričan

$$\langle sX, Y\rangle = \langle X, sY\rangle.$$

Specijalizacijom Teorema 8.12, 8.13, 8.14 dobivamo:

- **Gaussova formula**
$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)N,$$
- **Weingartenova jednadžba**
$$\langle \bar{\nabla}_X N, Y\rangle = -h(X,Y) = -\langle sX, Y\rangle,$$
  ili
$$\bar{\nabla}_X N = -sX,$$
- **Gaussova jednadžba**
$$Rm(X,Y,Z,W) = h(X,W)h(Y,Z) - h(X,Z)h(Y,W).$$

Glavne zakrivljenosti su svojstvene vrijednosti operatora oblika plohe. *Gaussova zakrivljenost* definirana je sa

$$K = \det s,$$

a *srednja zakrivljenost* sa

$$H = \frac{1}{n}\operatorname{tr} s.$$

Teorem 8.15 (Gaussov Theorema Egregium) *Neka je $M \subset \mathbf{R}^3$ 2-dimenzionalna podmnogostrukost i g inducirana metrika na M. Tada je za svaku točku $p \in M$ i svaku bazu (X,Y) od T_pM, Gaussova zakrivljenost dana s*

$$K = \frac{Rm(X,Y,Y,X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}. \tag{8.13}$$

Prema tome, Gaussova zakrivljenost je izometrička invarijanta od (M, g).

Motivirani time, za apstraktne Riemannove 2-mnogostrukosti (M, g) definiramo Gaussovu zakrivljenost formulom (8.13), gdje je (X, Y) bilo koji lokalni reper.

Propozicija 8.16 *Gaussova zakrivljenost Riemannove 2-mnogostrukosti povezana je s tenzorom zakrivljenosti, Riccijevim tenzorom i skalarnom zakrivljenošću sljedećim formulama*

$$RM(X,Y,Z,W) = K\left(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle\right),$$

$$Rc(X,Y) = K\langle X,Y\rangle,$$

$$S = 2K.$$

Gaussova zakrivljenost K ne ovisi o izboru lokalnog repera i u potpunosti određuje tenzor zakrivljenosti.

Sekcijska zakrivljenost. Neka je M Riemannova n-dimenzionalna mnogostrukost. Intuitivno, *ravninski presjek* S_Π od M je 2-dimenzionalna podmnogostrukost od M koju čine geodetske krivulje od M kroz neku točku $p \in M$ kojima početni tangencijalni vektori leže u odabranoj 2-dimenzionalnoj ravnini Π u T_pM. Sekcijska zakrivljenost $K(\Pi)$ od M s obzirom na Π je Gaussova zakrivljenost 2-mnogostrukosti S_Π s obzirom na induciranu metriku. Ako je (X, Y) baza za Π, tada pišemo i $K(X, Y)$ umjesto $K(\Pi)$.

Propozicija 8.17 *Vrijedi*

$$K(X,Y) = \frac{Rm(X,Y,Y,X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}.$$

Sekcijska zakrivljenost u potpunosti određuje tenzor zakrivljenosti:

Lema 8.18 *Neka su $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ dva kovarijantna 4-tenzora na unitarnom prostoru V koji imaju svojstva (simetrije) kao tenzor zakrivljenosti. Ako za bilo koja dva nezavisna vektora $X, Y \in V$ vrijedi*

$$\frac{\mathcal{R}_1(X,Y,Y,X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2} = \frac{\mathcal{R}_2(X,Y,Y,X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2},$$

tada je $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

Slično se može pokazati da je Riccijev tenzor $Rc(V, V)$ jednak zbroju svih sekcijskih zakrivljenosti određenim ravninama razapetim s V i još jednim vektorom tangencijalne ravnine s kojim čini ONB:

$$Rc(V,V) = R_{11} = R^k_{k11} = \sum_{k=1}^{n} Rm(E_k, E_1, E_1, E_k) = \sum_{k=2}^{n} K(E_1, E_k).$$

Skalarna zakrivljenost jednaka je zbroju svih sekcijskih zakrivljenosti određenim s ravninama koje su razapete s ONB:

$$S = R^j_j = \sum_{j=1}^{n} Rc(E_j, E, j) = \sum_{j,k=1}^{n} Rm(E_k, E_j, E_j, E_k) = \sum_{j\neq k} K(E_j, E_k).$$

Primjer. Sekcijska zakrivljenost prostornih formi:

1° Od $\mathbf{R}^n$ jednaka je 0;

2° Od S^n_R jednaka je $\frac{1}{R^2}$;

3° Od H^n_R jednaka je $-\frac{1}{R^2}$.

Zadaci

1. Neka je $c : I \to M$ krivulja na Riemannovoj mnogostrukosti (M, g). Duljina luka krivulje c definira se kao realan broj
$$l(c) = \int_I |c'(t)|_g dt.$$
Pokažite da duljina luka krivulje c ne ovisi o (re)parametrizaciji od c.

2. Neka je B_R^2 Poincaré-ov krug (otvoren krug radijus R u $\mathbf{R^2}$ s hiperboličkom metrikom). Neka je $c : [0, 1\rangle \to B_R^2$, $c(t) = t(\cos\varphi, \sin\varphi)$, gdje je $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$ zadan, krivulja u B_R^2. Pokažite da c ima beskonačnu duljinu.

3. Riemannova metrika na torusu T^2 može se realizirati kao Rimennova metrika produktne mnogostrukosti $T^2 = S^1 \times S^1$ i kao Riemannove podmnogostrukosti u $\mathbf{R}^3$. Pokažite da te Riemannove mnogostrukosti nisu izometrične.

4. Pokažite da je na vektorskom prostoru matrica $M_{mn}(\mathbf{R})$ sa $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\tau B)$ definiran skalarni produkt. Time $M_{mn}(\mathbf{R})$ postaje Riemannova mnogostrukost, a $GL(n, \mathbf{R})$, $SL(n, \mathbf{R})$, $O(n, \mathbf{R})$, $SO(n, \mathbf{R})$ Riemannove podmnogostrukosti.

5. Pokažite da je na Riemannovoj mnogostrukosti (M, g) na sljedeći način dobro definirano jedno vektorsko polje (nazivamo ga gradijent realne funkcije f na M, oznaka $\mathrm{grad} f$):
$$g(\mathrm{grad} f, X) = df(X) = Xf, \quad X \in \mathcal{T}(M).$$
   (i) Pokažite da u lokalnim koordinatama (x^i) $\mathrm{grad} f$ ima prikaz
   $$\mathrm{grad} f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j},$$
   gdje je (g^{ij}) inverzna matrica od matrice Riemannove metrike (g_{ij}).

   (ii) Izvedite prikaz of $\mathrm{grad} f$ na $\mathbf{R}^n$ u standardnim koordinatama.

   (iii) Izvedite prikaz of $\mathrm{grad} f$ na $\mathbf{R}^2$ u polarnim koordinatama.