Matematička gimnazija, Beograd
Dodatna nastava za drugi razred, šk. 2005/06.

KOMPLEKSNI BROJEVI U GEOMETRIJI

Kada se suočimo sa planimetrijskim zadatkom bez vidljivog elementarnog pristupa, pokušamo da ga sračunamo. Računskih tehnika ima više. Naredni tekst posvećujemo jednoj od njih - primeni kompleksnih brojeva. Ravan događanja posmatramo kao kompleksnu ravan u kojoj je svakoj tački dodeljen neki kompleksan broj. Tako tačke često, umesto velikim slovima, označavamo malim: $a, b, c, d, \ldots$, kao kompleksne brojeve.

Sledeće formule se mogu direktno pokazati.

FORMULE I TEOREME

Teorema 1.

- $ab \parallel cd$ ako i samo ako $\dfrac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = \dfrac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}$.
- a, b, c kolinearne ako i samo ako $\dfrac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = \dfrac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}}$.
- $ab \perp cd$ ako i samo ako $\dfrac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = -\dfrac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}$.
- $\varphi = \angle acb$ (od a do b u pozitivnom smeru) ako i samo ako $\dfrac{c-b}{|c-b|} = e^{i\varphi}\dfrac{c-a}{|c-a|}$.

Teorema 2. Svojstva jediničnog kruga:

- za tetivu ab je $\dfrac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = -ab$.
- ako je tačka c na tetivi ab tada je $\overline{c} = \dfrac{a+b-c}{ab}$.
- presek tangenti iz tačaka a i b je tačka $\dfrac{2ab}{a+b}$.
- podnožje normale proizvoljne tačke c na tetivu ab je tačka $p = \dfrac{1}{2}\Big(a+b+c-ab\overline{c}\Big)$.
- presek tetiva ab i cd je tačka $\dfrac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$.

Teorema 3. Tačke a, b, c, d su konciklične ako i samo ako je

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \mathbf{R}.$$

Teorema 4. Trouglovi abc i pqr su slični i jednako orijentisani ako i samo ako je

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{p-r}{q-r}.$$

Teorema 5. Površina orijentisanog trougla abc je

$$p = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4}\Big(a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} - \overline{a}\,b - \overline{b}\,c - \overline{c}\,a.\Big)$$

Teorema 6.

- tačka c deli duž ab u odnosu $\lambda \neq -1$ ako i samo ako je $c = \dfrac{a+\lambda b}{1+\lambda}$.
- tačka t je težište trougla abc ako i samo ako je ispunjeno $t = \dfrac{a+b+c}{3}$.
- za ortocentar h i centar opisanog kruga o trougla abc važi $h + 2o = a + b + c$.

Teorema 7. Neka je jedinični krug upisan u trougao abc i neka dodiruje stranice bc, ca, ab, redom u tačkama p, q, r.

- važi $a = \dfrac{2qr}{q+r}, b = \dfrac{2rp}{r+p}$ i $c = \dfrac{2pq}{p+q}$;
- za ortocentar h trougla abc važi $h = \dfrac{2(p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2+pqr(p+q+r))}{(p+q)(q+r)(r+p)}$.
- za centar opisanog kruga o trougla abc važi $o = \dfrac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(r+p)}$.

Teorema 8.

- za svaki trougao abc upisan u jedinični krug postoje brojevi u, v, w takvi da je $a = u^2, b = v^2, c = w^2$, a središta lukova ab, bc, ca koja ne sadrže tačke c, a, b, su tačke $-uv, -vw, -wu$, redom.
- za prethodno opisani trougao i njegov centar upisanog kruga i važi $i = -(uv+vw+wu)$.

Teorema 9. Posmatra se trougao $\triangle$ kod koga je jedno teme 0, a preostala dva x i y.

- ukoliko je h ortocentar trougla $\triangle$, tada je $h = \dfrac{(\overline{x}\,y + x\overline{y}\,)(x-y)}{x\overline{y} - \overline{x}\,y}$.
- ukoliko je o centar opisanog kruga trougla $\triangle$, tada je $o = \dfrac{xy(\overline{x} - \overline{y}\,)}{\overline{x}\,y - x\overline{y}}$.

KOMPLEKSNI BROJEVI I VEKTORI. ROTACIJA.

U ovaj deo svrstani su zadaci koji koriste osnovna svojstva interpretacije kompleksnih brojeva kao vektora (teorema 6) i posledice poslednjeg dela teoreme 1. Naime, ukoliko se tačka b dobija rotacijom tačke a oko tačke c za ugao φ (u pozitivnom smeru), tada je $b - c = e^{i\varphi}(a-c)$.

1. (Savezno 1990, 3-4 raz) Neka je S centar opisanog kruga , a H ortocentar trougla $\triangle ABC$. Neka je, dalje, Q takva tačka da je S središte duži HQ i neka su T_1, T_2 i T_3, redom, težišta trouglova $\triangle BCQ$, $\triangle CAQ$ i $\triangle ABQ$. Dokazati da je

$$AT_1 = BT_2 = CT_3 = \frac{4}{3}R,$$

gde je R poluprečnik opisanog kruga trougla $\triangle ABC$.

2. (BMO 1984) Neka je $ABCD$ tetivan četvorougao i H_A, H_B, H_C i H_D ortocentri trouglova BCD, CDA, DAB i ABC respektivno. Dokazati da su četvorouglovi $ABCD$ i $H_AH_BH_CH_D$ podudarni.

3. (Mala Olimpijada 1992) Na stranicama BC, CA i AB trougla ABC konstruisani su u njegovoj spoljašnjosti kvadrati $BCDE$, $CAFG$ i $ABHI$. Neka su $GCDQ$ i $EBHP$ paralelogrami. Dokazati da je trougao APQ jednakokrako-pravougli.

4. (Savezno 1993, 3-4 raz) Na stranicama BC, CD, DA konveksnog četvorougla $ABCD$ konstruisani su u njegovoj spoljašnosti jednakostranični trouglovi BCB_1, CDC_1 i DAD_1. Ako su P i Q redom središta stranica B_1C_1 i C_1D_1 i R središte stranice AB, dokazati da je trougao PQR jednakostaničan.

5. U ravni je dat trougao $A_1A_2A_3$ i tačka P_0. Označimo sa $A_s = A_{s-3}$, za svaki prirodan broj $s > 3$. Konstruišimo niz tačaka $P_0, P_1, P_2, \ldots$, tako da se tačka P_{k+1} dobija rotacijom tačke P_k za 120^o u smeru kretanja kazaljke na satu oko tačke A_{k+1}. Dokazati da ako je $P_{1986} = P_0$, tada trougao $A_1A_2A_3$ mora biti jednakostraničan.

6. (IMO 1992, predlog) Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao kod koga je $AC = BD$. Na stranama četvorougla konstruisani su jednakostranični trouglovi. Neka su O_1, O_2, O_3 i O_4 centri tih trouglova konstruisanih nad AB, BC, CD i DA, tim redom. Dokazati da su prave O_1O_3 i O_2O_4 normalne.

RASTOJANJE. PRAVILNI MNOGOUGLOVI.

U ovom delu od posebne koristi biće jedna od osnovnih relacija kompleksnih brojeva $|a|^2 = a\overline{a}$. Takođe, kod dokazivanja jednakosti suma nekih rastojanja od posebne je koristi ukoliko su pomenuta rastojanja između kolinearnih tačaka ili tačaka na međusobno paralelnim pravama. Zato je u mnogim situacijama veoma korisno koristiti rotacije koje odgovarajuće tačke prevoditi u spomenuti položaj.

Razmotrimo sada pravilne mnogouglove. Poznato je da jednačina $x^n = 1$ u kompleksnim brojevima ima tačno n rešenja i sva ona su $x_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, za $0 \le k \le n-1$. Dalje, kako opisane tačke $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ čine pravilan mnogougao, to je logično da i za bilo koji drugi pravilni n-tougao uzimamo upravo tačke $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ za njegova temena. Sada imamo da je $x_0 = 1$ i $x_k = \varepsilon^k$, za $1 \le k \le n-1$, gde je $x_1 = \varepsilon$.

Objasnimo prethodno opisano sledećim primerom:

Primer. Neka je $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ pravilan sedmougao. Dokazati da je

$$\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_3}.$$

Dokaz. Kao što je napomenuto u prethodnim razmatranjima uzmimo da je $a_k = \varepsilon^k$, za $0 \le k \le 6$, gde je $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. Dalje, rotacijom oko tačke $a_0 = 1$ za ugao ε, odnosno $\omega = e^{i\frac{2\pi}{14}}$, tačke a_1, odnosno a_2 se prevode u tačke a_1', odnosno a_2', koje su kolinearne sa a_3. Sada je dovoljno dokazati da je $\dfrac{1}{a_1'-1} = \dfrac{1}{a_2'-1} + \dfrac{1}{a_3-1}$. Dalje, kako je $\varepsilon = \omega^2$ i $a_1' = \varepsilon(a_1-1)+1$ i $a_2' = \omega(a_2-1)+1$, to je dovoljno dokazati da je

$$\frac{1}{\omega^2(\omega^2-1)} = \frac{1}{\omega(\omega^4-1)} + \frac{1}{\omega^6-1}.$$

Posle sređivanja ovo se svodi na $\omega^6+\omega^4+\omega^2+1 = \omega^5+\omega^3+\omega$. Kako je $\omega^5 = -\omega^{12}$, $\omega^3 = -\omega^{10}$ i $\omega = -\omega^8$ (što se lako vidi sa jediničnog kruga), jednakost sledi na osnovu $0 = \omega^{12}+\omega^{10}+\omega^8+\omega^6+\omega^4+\omega^2+1 = \varepsilon^6+\varepsilon^5+\varepsilon^4+\varepsilon^3+\varepsilon^2+\varepsilon+1 = \dfrac{\varepsilon^7-1}{\varepsilon-1} = 0$.

7. Neka je $A_0A_1\ldots A_{14}$ pravilan petnaestougao. Dokazati da je

$$\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_4} + \frac{1}{A_0A_7}.$$

8. Neka je $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ pravilan n-tougao upisan u krug poluprečnika r. Dokazati da za proizvoljnu tačku P koja leži na opisanom krugu i prirodan broj $m < n$ važi jednakost

$$\sum_{k=0}^{n-1} PA_k^{2m} = \binom{2m}{m} nr^{2m}.$$

9. (Mala Olimpijada 2003) Neka su M i N različite tačke u ravni trougla ABC takve da je

$$AM : BM : CM = AN : BN : CN.$$

Dokazati da prava MN sadrži centar opisanog kruga trougla $\triangle ABC$.

10. Neka su $h_1, h_2, \ldots, h_n$ rastojanja proizvoljne tačke P manjeg luka A_0A_{n-1} kruga opisanog oko pravilnog poligona $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ od pravih koje sadrže stranice $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_0$, redom, dokazati da je

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \cdots + \frac{1}{h_{n-1}} = \frac{1}{h_n}.$$

MNOGOUGLOVI UPISANI U KRUG

U zadacima u kojima su mnogouglovi upisani u krug od velike je koristi za jedinični krug uzeti upravo taj krug. Naime, iz teoreme 2. vidimo mnoge od prednosti jediničnog kruga (pre svega prvo tvrđenje) i u praksi će se pokazati da se mnogi ovakvi zadaci mogu vrlo jednostavno rešiti na ovaj način. Posebno za svaki trougao imamo da je on upisan u njegov opisani krug, pa je u mnogim zadacima vezanim za jedan trougao vrlo korisno uzeti za jedinični krug baš krug opisani oko tog trougla. Jedini problem u ovom slučaju je pronalaženje centra upisanog kruga. Za to pogledati neko od sledeća dva dela.

11. Dat je četvorougao $ABCD$ upisan u krug čiji je prečnik AC. Prave AB i CD seku se u tački M, a tangente na krug konstruisane u tačkama B i D u tački N. Dokazati da je MN normalno na AC.

12. (IMO 1996, predlog) Neka je H ortocentar trougla $\triangle ABC$, a P proizvoljna tačka na njegovom opisanom krugu. Neka je E podnožje visine BH neka su $PAQB$ i $PARC$ paralelogrami i neka se AQ i HR seku u X. Dokazati da su prave EX i AP paralelne.

13. Dat je tetivan četvorougao $ABCD$. Tačke P i Q su simetrične tački C u odnosu na prave AB i AD, respektivno. Dokazati da prava PQ prolazi kroz ortocentar trougla $\triangle ABD$.

14. (IMO 1998, predlog) Neka je ABC trougao, H njegov ortocentar, O centar opisanog kruga, i R poluprečnik opisanog kruga. Neka je D tačka simetrična tački A u odnosu na BC, E tačka simetrična tački B u odnosu na CA i F tačka simetrična tački C u odnosu na AB. Dokazati da su tačke D, E i F kolinearne akko $OH = 2R$.

15. (Interno 2004) Dat je trougao $\triangle ABC$. Tangenta u temenu A na krug opisan oko $\triangle ABC$ seče srednju liniju trougla paralelnu sa BC u tački A_1. Analogno definišemo tačke B_1 i C_1. Dokazati da tačke A_1, B_1, C_1 leže na pravoj i da je ta prava normalna na Ojlerovu pravu trougla ABC.

16. (MOP 1995) Neka su AA_1 i BB_1 visine trougla $\triangle ABC$ i neka $AB \neq AC$. Neka je M središte duži BC, H ortocentar trougla $\triangle ABC$ i D presek BC i B_1C_1. Dokazati da je DH normalno na AM.

17. (IMO 1996, predlog) Neka je ABC oštrougli trougao kod koga je $BC > CA$. Neka je O centar opisanog kruga, H ortocentar i F podnožje visine CH. Neka se normala iz F na OF i stranica CA seku u P. Dokazati da je $\angle FHP = \angle BAC$.

18. (Rumunija 2005) Neka je $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ konveksan šestougao upisan u krug. Neka su A_0', A_2', A_4' tačke istog krugu, takve da je

$$A_0A_0' \parallel A_2A_4, \quad A_2A_2' \parallel A_4A_0 \quad A_4A_4' \parallel A_2A_0.$$

Neka se prave $A_0'A_3$ i A_2A_4 seku u tački A_3', prave $A_2'A_5$ i A_0A_4 seku u tački A_5' i prave $A_4'A_1$ i A_0A_2 u tački A_1'. Dokazati da ako su prave A_0A_3, A_1A_4 i A_2A_5 konkurentne, da su tada i prave A_0A_3', A_4A_1' i A_2A_5' takođe konkurentne.

19. (**Simsonova prava**) Ako su A, B, C tačke na krugu, tada su podnožja normala iz proizvoljne tačke D na tom krugu na stranice trougla ABC kolinearne tačke.

20. Neka su A, B, C, D četiri tačke na krugu. Dokazati da presek Simsonove prave kroz A u odnosu na trougao BCD sa Simsonovom pravom kroz B u odnosu na trougao $\triangle ACD$ leži na pravoj koja prolazi kroz C i ortocentar trougla $\triangle ABD$.

21. Označimo sa $l(S; PQR)$ Simsonovu pravu tačke S u odnosu na trougao PQR. Neka tačke A, B, C, D pripadaju jednom krugu. Dokazati da se prave $l(A; BCD), l(B; CDA), l(C, DAB), l(D, ABC)$ seku u jednoj tački.

22. (Tajvan 2002) Neka su A, B i C fiksirane tačke u ravni, a tačka D pokretna tachka na krugu opisanom oko trougla ABC. Neka je I_A Simsonova prava tačke A u odnosu na trougao BCD. Slično definišemo i prave I_B, I_C i I_D. Naći geometrijsko mesto tačaka svih preseka pravih I_A, I_B, I_C i I_D kada se D pomera po datom krugu.

23. (BMO 2003) Neka je trougao $\triangle ABC$ takav da $AB \neq AC$. Neka je D tačka preseka tangente na opisanu kružnicu trougla ABC u tački A i prave BC. Neka su E i F tačke na simetralama duži AB i AC redom, takve da su BE i CF normalne na BC. Dokazati da su tačke D, E i F kolinearne.

24. (**Paskalova teorema**) Ako je šestougao $ABCDEF$ tetivan, dokazati da su tačke $AB \cap DE, BC \cap EF, CD \cap FA$ kolinearne.

25. (**Brokarova teorema**) Neka je $ABCD$ tetivni četvorougao. Prave AB i CD se seku u E, prave AD i BC se seku u F i prave AC i BD se seku u G. Dokazati da je O ortocentar trougla EFG

26. (Iran 2005) Neka je ABC jednakokraki trougao kod koga je $AB = AC$. Neka je tačka P na produžetku stranice BC i neka su tačke X i Y na stranicama AB i AC takve da je

$$PX \parallel AC, \quad PY \parallel AB.$$

Neka je T središte luka BC. Dokazati da je $PT \perp XY$.

27. Neka je $ABCD$ tetivni četvorougao i neka su K, L, M, N središta stranica AB, BC, CA, DA, redom. Dokazati da ortocentri trouglova $\triangle AKN$, $\triangle BKL$, $\triangle CLM$, $\triangle DMN$ obrazuju paralelogram.

MNOGOUGLOVI OPISANI OKO KRUGA

Kao i u prethodnom delu i u ovom slučaju od velike je koristi uzeti za jedinični krug upravo krug upisan u dati mnogougao. Od posebne koristi je ponovo teorema 2 i to posebno njen treći deo. Ukoliko je dati mnogougao trougao tada koristimo i formule opisane u teoremi 7. Primetimo da u ovom slučaju znamo koordinate i opisanog i upisanog kruga, što u prethodnom delu nije bio slučaj. Takođe, primetimo da su formule date u teoremi 7 dosta komplikovane, pa kada god je to moguće treba za jedinični krug uzimati krug opisan oko trougla.

28. Upisani krug sa centrom u O trougla ABC dodiruje stranice AB, BC, CA u tačkama M, K, E. Neka je presek pravih MK i AC tačka P. Dokazati da je OP normalno na BE.

29. Krug sa centrom O upisan je u četvorougao $ABCD$ i dodiruje stranice AB, BC, CD i DA redom u tačkama K, L, M i N. Prave KL i MN seku se u tački S. Dokazati da je OS normalno na BD.

30. (BMO 2005) Neka je ABC oštrougli trougao, čiji upisani krug dodiruje stranice AB i AC u D i E, redom. Neka su X i Y tačke preseka simetrala uglova $\angle ACB$ i $\angle ABC$ sa pravom DE i neka je Z središte BC. Dokazati da je trougao XYZ jednakostraničan ako i samo ako je $\angle A = 60°$.

31. (**Njutnova teorema**) Dat je tangentni četvorougao $ABCD$. Neka su M i N središta dijagonala AC i BD, i S centar upisanog kruga. Dokazati da su M, N i S kolinearne.

32. Neka je $ABCD$ chetvorougao, i neka njegov upisani krug dodiruje stranice AB, BC, CD, DA redom u tachkama M, N, P, Q. Dokazati da su prave AC, BD, MP, NQ konkurentne.

33. (Iran 1995) Upisani krug trougla $\triangle ABC$ dodiruje stranice BC, CA i AB redom u tačkama D, E i F, a X, Y i Z su središta stranica EF, FD i DE respektivno. Dokazati da centar upisanog kruga pripada pravoj određenoj centrima krugova opisanih oko trouglova $\triangle XYZ$ i $\triangle ABC$.

34. Neka krug sa cenrom u I upisani u trougao ABC dodiruje stranice BC, CA, AB u tačkama D, E, F, redom. Neka se prave AI i EF seku u tački K, prave ED i KC u tački L, a prave DF i KB u tački M. Dokazati da je LM paralelno sa BC.

35. (25. Turnir gradova) Dat je trougao $\triangle ABC$. U njemu je tačka H presek visina, I centar upisane kružnice, O centar opisane kružnice, K tačka dodira upisanog kruga sa stranicom BC. Zna se da su odsečci IO i BC paralelni. Dokazati da su odsečci AO i HK paralelni.

36. (IMO 2000, 6.zad) Neka su AH_1, BH_2, CH_3 visine oštrouglog trougla ABC. Kružnica upisana u trougao ABC dodiruje stranice BC, CA, AB redom u tačkama T_1, T_2, T_3. Neka su prave l_1, l_2, l_3 simetrične pravama H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 u odnosu na prave T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2, redom. Dokazati da prave l_1, l_2, l_3 određuju trougao čija temena pripadaju kružnici upisanoj u trougao ABC.

SREDIŠTE LUKA

Ne retko se u zadacima tačka definiše kao središte luka i to recimo onog koji ne sadrži datu tačku. Jedan od većih problema pri korišćenju kompleksnih brojeva je razdvajanje pojmova koji se definišu na isti način. U ovom slučaju problem je razlikovati središta dva luka jednog kruga. Naime, ukoliko uzmemo da je središte luka presek simetrale tetive, koja ograničava taj luk, i kruga, dobićemo dva rešenja, jer su na ovaj način definisane dve takve tačke. Dati problem se relativno lako rešava prvim delom teoreme 8. I više, drugi deo teoreme 8 daje jedan alternatini način rešavanja zadataka sa upisanim i opisanim krugom. Primetimo da su tada koordinate značajnih tačaka trougla dosta jednostavnije nego u prethodnom delu. Međutim, do problema dolazi pri izračunavanju tačaka d, e, f, dodira upisanog kruga sa stranicama (izračuanjte ih!), pa se zato u ovim situacijama često koriste metode iz prethodnog dela. Takođe, u slučaju mnogouglova sa više od tri stranice koristi se prethodni deo.

37. (Kvant M769) Neka je centar upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ tačka L, a produženi duži AL, BL i CL seku opisani krug trougla $\triangle ABC$ u tačkama A_1, B_1 i C_1, redom. Neka je R poluprečnik opisanog, a r poluprečnik upisanog kruga trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je:

(a) $\dfrac{LA_1 \cdot LC_1}{LB} = R$; (b) $\dfrac{LA \cdot LB}{LC_1} = 2r$; (c) $\dfrac{S(ABC)}{S(A_1B_1C_1)} = \dfrac{2r}{R}$.

38. (Kvant M860) Neka su O i R redom centar i poluprečnik kružnice opisane oko trougla $\triangle ABC$, a Z i r redom centar i poluprečnik kružnice upisane u isti trougao. Ako je K težište trougla koga čine dodiri upisane kružnice i stranica trougla dokazati da se Z nalazi na duži OK i da je $OZ : ZK = 3R/r$.

39. Neka je tačka P presek dijagonala AC i BD konveksnog četvorougla $ABCD$ u kom je $AB = AC = BD$. Neka su O i I centar opisanog i upisanog kruga trougla ABP. Dokazati da ako je $O \neq I$, onda su prave OI i CD normalne.

40. Neka je I centar upisanog kruga trougla ABC, kod koga je $AB \neq AC$. Tačka O_1 je simetrična centru opisanog kruga trougla ABC u odnosu na pravu BC. Dokazati da su tačke A, I, O_1 kolinearne ako i samo ako je $\angle A = 60^o$.

41. Dat je trougao $\triangle ABC$. Neka su A_1, B_1 i C_1 središta stranica BC, CA i AB, P, Q i R dodirne tačke stranica BC, CA i AB sa upisanim krugom k, P_1, Q_1 i R_1 središta lukova QR, RP i PQ na koje tačke P, Q i R razlažu krug k i P_2, Q_2 i R_2 središta lukova QPR, RQP i PRQ. Dokazati da se prave A_1P_1, B_1Q_1 i C_1R_1, kao i prave A_1P_1, B_1Q_2 i C_1R_2, seku u jednoj tački.

„ISTAKNUTE” TAČKE. ČETVOROUGLOVI.

U prethodna tri dela tačke koje su uzimane za početne, tj. one koje su imale „poznate” koordinate bile su međusobno ravnopravne, tj. sve su imale ista svojstva (to su bile ili neke tačke istog kruga, ili preseci nekih tangenti istog kruga...). Međutim, u mnogim zadacima moguće je neku tačku izdvojiti iz ostalih i to pre svega zbog njenog uticaja na preostale tačke. Tu tačku najčešće smeštamo u koordinatni početak. Ovo je posebno korisno u slučaju četvorouglova (koji nisu ni tangentni ni tetivni) kog kojih za koordinatni početak uzimamo tačku preseka dijagonala. Tu su od posebne koristi formule iz teoreme 9.

42. U spoljašnjosti trougla ABC konstruisani su kvadarati $ABB'B''$, $ACC'C''$, $BCXY$. Neka je tačka P centar kvadrata $BCXY$. Dokazati da se CB'', BC'', AP seku u jednoj tački.

43. Neka je $ABCD$ četvorougao, O presek njegovih dijagonala, M središte stranice AB i N središte stranice CD. Dokazati da ako je $OM \perp CD$ i $ON \perp AB$ da je $ABCD$ tetivan.

44. Neka je F tačka osnovice AB trapeza $ABCD$, takva da je $DF = CF$, $E = AC \cap BD$ i O_1 i O_2 centri opisanih krugova trouglova ADF i FBC, redom. Dokazati da je $FE \perp O_1O_2$.

45. (IMO 2005, 5.zad) Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao čije su stranice BC i AD jednake i nisu paralelne. Neka su E i F unutrašnje tačke stranica BC i AD redom, takve da je $BE = DF$. Prave AC i BD seku se u P, prave BD i EF seku se u Q, prave EF i AC seku se u R. Razmotrimo trouglove PQR koji se dobijaju za sve takve tačke E i F. Dokazati da sve opisane kružnice ovih trouglova imaju zajedničku tačku različitu od P.

46. Neka se dijagonale konveksnog četvorougla $ABCD$ seku u tački O. Neka su T_1 i T_2 težišta trouglova $\triangle AOD$ i $\triangle BOC$, a H_1 i H_2 ortocentri trouglova $\triangle AOB$ i $\triangle COD$. Dokazati da su prave T_1T_2 i H_1H_2 normalne.

NEJEDNOZNAČNI PRESECI I VIETOVE FORMULE

Tačku preseka dve prave računamo iz sistema dve jednačine od kojih svaka predstavlja uslov pripadnosti jednoj od datih pravim. Međutim, pri ovakvom algebarskom određivanju tačaka može doći do komplikacija. Naime, kao što je to i napomenuto u pretprošlom delu standardni metodi mogu dovesti do nejedinstvenog određivanja tačaka. Tako npr. ukoliko određujemo tačku preseka data dva kruga iz pripadnosti jednom i pripadnosti drugom dobićemo kvadratnu jednačinu koja u opštem slučaju ima dva rešenja (što je i za očekivati, jer se data dva kruga mogu seći u dve tačke). Takođe, u mnogim zadacima nam ni nisu potrebne obe ove tačke, nego npr. samo pravac prave koju oni određuju. Isto tako moguće je da nam je jedna od datih tačaka poznata. U oba slučaja mnogo je bolje koristiti Vietova pravila i na taj način određivati zbirove i proizvode datih tačaka nego računanje njihovih eksplicitnih vrednosti, jer pri tome može doći do „vađenja" korena iz kompleksnog broja, što nije dozvoljeno.

Napomenimo ovde i da ukoliko nam je eksplicitno potrebna npr. jedna od dve presečne tačke dva kruga, a drugu ne znamo, gotovo je jedina šansa da dati zadatak rešimo kompleksnim brojevima ukoliko datu tačku uzmemo za jednu od početnih tačaka.

47. Neka se tangente kruga Γ u tačkama A i B seku u C. Krug Γ_1 koji prolazi kroz tačku C i dodiruje pravu AB u tački B seče krug Γ u tački M. Dokazati da prava AM polovi duž BC.

48. (Republičko 2004, 3 raz) Dat je krug k i njegov prečnik AB. Neka je P proizvoljna tačka tog kruga različita od A i B. Projekcija tačke P na AB je Q. Krug sa centrom P i poluprečnikom PQ seče krug k u C i D. Presek pravih CD i PQ je tačka E. Neka je F središte AQ, a G podnožje normale iz F na CD. Dokazati da je $EP = EQ = EG$ i da su tačke A, G i P kolinearne.

49. (Kina 1996) Neka je H ortocentar trougla $\triangle ABC$. Tangente iz A na krug sa prečnikom BC dodiruju krug u tačkama P i Q. Dokazati da su tačke P, Q i H kolinearne.

50. Neka je P tačka na produžetku dijagonale AC pravougaonika $ABCD$ preko C, takva da je $\angle BPD = \angle CBP$. Odrediti $PB : PC$.

51. (IMO 2004, 5.zad) U konveksnom četvorouglu $ABCD$ dijagonala BD nije simetrala niti ugla ABC niti ugla CDA. Tačka koja se nalazi unutar $ABCD$ je takva da je

$$\angle PBC = \angle DBA \text{ i } \angle PDC = \angle BDA.$$

Dokazati da je četvorougao $ABCD$ tetivan akko je $AP = CP$.

RAZNI ZADACI - RAZNE METODE

U ovom delu dati su zadaci koji nisu striktno vezani ni za jedan od prethodnih delova, ili koriste ideje iz više njih. Opšte pravilo za rešavanje takvih zadataka je da dobro razmislite o tome koje ćete tačke uzeti za početne, šta treba uzeti za koordinatni početak, a šta za jedinični krug. Kao što ćete to i sami videti osnovni problem kod rešavanja bilo kojih zadataka kompleksnim brojevima biće vam vreme. Zato ukoliko na takmičenjima želite da koristite kompleksne brojeve od velike je važnosti rutina i mogućnost procene koliko vam vremena treba da određene stvari sračunate. Ovo je i jedan od razloga zbog kojih vam držimo ove stvari već na početku druge godine, jer ćete jedino tako moći da već na takmičenjima u trećoj godini ovladate potpuno ovom tehnikom i spoznate njenu široku primenu.

U ovom delu biće dato i nekoliko zadataka koji koriste teoreme 3,4 i 5.

52. Data su četiri kruga k_1, k_2, k_3, k_4 tako da je $k_1 \cap k_2 = \{A_1, B_1\}, k_2 \cap k_3 = \{A_2, B_2\}, k_3 \cap k_4 = \{A_3, B_3\}, k_4 \cap k_1 = \{A_4, B_4\}$. Ako su tačke A_1, A_2, A_3, A_4 konciklične ili kolinearne, dokazati da su i tačke B_1, B_2, B_3, B_4 konciklične ili kolinearne.

53. Dat je paralelogram $ABCD$. Nad njegovim stranicama CD i CB konstruisani su slični istoorijentisani trouglovi $\triangle CDE$ i $\triangle FBC$. Dokazati da je i trougao $\triangle FAE$ sličan i istoorijentisan sa prva dva.

54. S iste strane duži PQ konstruisana su tri trougala KPQ, QLP i PQM takva da je $\angle QPM = \angle PQL = \alpha, \angle PQM =$

$\angle QPK = \beta$ i $\angle PQK = \angle QPL = \gamma$, pri čemu je $\alpha < \beta < \gamma$ i $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$. Dokazati da je trougao KLM sličan sa prva tri.

55. *(Iran 2005) Neka je H_1 konveksan n-tougao i neka je n prost. Dalje se konstruišu poligoni $H_2, \ldots, H_n$ rekurentno: temena poligona H_{k+1} se dobijaju od svakog temena H_k simetrijom kroz k-tog suseda (u pozitivnom smeru). Dokazati da su H_1 i H_n slični.

56. Dokazati da površina trougla čija su temena podnožja normala spuštenih iz proizvoljnog temena tetivnog petougla na njegove stranice ne zavisi od izbora temena petougla.

57. Tačke A_1, B_1, C_1 su odabrane u trouglu ABC na visinama iz A, B, C redom. Ako je

$$S(ABC_1) + S(BCA_1) + S(CAB_1) = S(ABC),$$

dokazati da je čevorougao $A_1B_1C_1H$ tetivan.

58. (IMO 1997, predlog) Podnožja visina iz temena A, B i C trougla $\triangle ABC$ su redom D, E i F. Prava kroz D paralelna sa EF seče prave AC i AB redom u tačkama Q i R. Prava EF seče BC u tački P. Dokazati da krug opisan oko trougla PQR prolazi kroz središte stranice BC.

59. (BMO 2004) Neka je O unutrašnja tačka oštrouglog trougla $\triangle ABC$. Krugovi sa centrima u središtima stranica trougla $\triangle ABC$, koji prolaze kroz tačku O, međusobno se seku u tačkama K, L i M, različitim od O. Dokazati da je O centar upisanog kruga u trougao $\triangle KLM$ ako i samo ako je O centar opisanog kruga oko trougla $\triangle ABC$.

60. U ravni su data dva kruga k_1 i k_2. Neka je A njihova zajednička tačka. Po krugovima se kreću tačke M_1 i M_2 konstantnim brzinama. One prolaze kroz tačku A u istim momentima vremena. Dokazati da postoji nepokretna tačka P koja je u svakom trenutku podjednako udaljena od tačaka M_1 i M_2.

61. (Mala Olimpijada 2004) Dat je kvadrat $ABCD$ i kružnica γ sa prečnikom AB. Neka je P proizvoljna tačka stranice CD, M i N redom preseci duži AP i BP sa γ koji su različiti od A i B, a Q tačka preseka pravih DM i CN. Dokazati da je $Q \in \gamma$ i da važi jednakost $AQ : QB = DP : PC$.

62. (IMO 1995, predlog) Neka je dat trougao ABC. Krug koji prolazi kroz B i C seče stranice AB i AC opet u tačkama C' i B', redom. Dokazati da su prave BB', CC' i HH' konkurentne, gde su H i H' ortocentri trouglova ABC i $A'B'C'$, redom.

63. (IMO 1998, predlog) Neka su M i N tačke unutar trougla ABC takve da važi $\angle MAB = \angle NAC$ i $\angle MBA = \angle NBC$. Dokazati da je

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1.$$

64. (IMO 1998, predlog) Neka je $ABCDEF$ konveksan šestougao takav da je $\angle B + \angle D + \angle F = 360^o$ i $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$. Dokazati da je

$$BC \cdot AE \cdot FD = CA \cdot EF \cdot DB.$$

65. (IMO 1998, predlog) Neka je ABC trougao takav da je $\angle A = 90^o$ i $\angle B < \angle C$. Tangenta u A na njegov opisani krug ω seče pravu BC u tački D. Neka je E slika tačke A pri osnoj simetriji u odnosu na pravu BC, X podnožje normale iz A na BE i Y središte duži AX. Neka prava BY seče ω još u Z. Dokazati da je prava BD tangenta na opisani krug trougla ADZ.
Uputstvo: primeniti prvo neku inverziju...

66. (Interno 1997, 3-4 raz) Dat je trougao $\triangle ABC$ i na njegovim stranicama tačke $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ i $C_1 \in AB$ takve da su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ slični. Dokazati da ako se ortocentri ili centri upisanih krugova trouglova $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ poklapaju, tada je trougao $\triangle ABC$ jednakostranični.

67. (**Ptolomejeva nejednakost**) Za svaki konveksni čtvorougao $ABCD$ važi nejednakost

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD.$$

68. (Kina 1998) Naći geometrijsko mesto tačaka D za koje važi

$$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA.$$

MANE KOMPLEKSNIH BROJEVA

Najveći problemi pri korišćenju kompleksnih brojeva javljaju se sa presecima pravih (što možemo videti iz petog dela teoreme 2, iako su tu u pitanju tetive kruga) i ukoliko se u zadatku pojavljuje više od jedan krug. Zato zadatke u kojima se javlja ili dosta pravih u opštem položaju bez ijednog istaknutog kruga, ili više od dva kruga treba izbegavati. Takođe, stvari se dosta komplikuju i ukoliko su imamo dva kruga u opštem položaju, pa osim u izuzetnim situacijamo ni ovde nije preporučljivo koristiti kompleksne brojeve. I na kraju, zadaci u kojima kao uslov dobijamo jednakost nekih zbirova rastojanja između nekolinearnih tačaka mogu biti vrlo nezgodni i ponekad praktično neuradivi.

Naravno, ovo su samo očigledna mesta na kojima može doći do problema. Postoje mnogi na izgled jednostavni zadaci čije će izračunavanje zadavati neverovatne teškoće i koji će biti praktično neuradivi u realnom vremenu.

radmarko@yahoo.com
oktobar-novembar 2005.

REŠENJA I UPUTSTVA

Pre samih rešenja evo i nekoliko napomena za korišćenje istih:

- u svim zadacima uzeto je da tačkama označenim velikim slovima odgovaraju kompleksni brojevi označeni odgovarajućim malim brojevima (osim u nekim slučajevima u kojima je za jedinični krug uzet krug upisan u trougao, a njegov centar označen sa o).
- pri pozivanju na teoreme korišćene su skraćenice. Tako npr. pozivanje na T1.3, predstavlja pozivanje na treći deo teoreme 1.
- rešenja kao rešenja su totalno beskorisna ukoliko učenik ne uzme i sam proba da uradi odgovarajući zadatak. Naime, još jednom ponavljam da je rutina jedna od najvažnijih stvari i da je bez nje poznavanje ove metode praktično beskorisno.
- u zadacima nisu najasnije objašnjena sva rastavljanja izraza (pošto je to tehnički gotovo neizvodljivo), a kao po pravilu to je jedan od problema koji se često javlja ovakvim načinom rada. Zato napomenimo neke osnovne ideje pri rastavljanju. Prvo: svi izrazi koji su nekako „podjednako” povezani sa npr. a i sa b verovatno su i deljivi sa $a-b$ ili $a+b$. Drugo: ukoliko trebate proveriti neki od uslova, i neke od izraza unutar njega lako računate, onda posmatrate kako bi trebalo da izgledaju preostali izrazi da bi dato tvrđene važilo. Treće: velika većina izraza će se moći rastaviti, pa je uvek korisnije utrošiti malo vremena i rastaviti dati izraz, nego „vući” kroz ceo zadatak duži, nerastavljeni oblik.
- iz tehničnih razloga u zadacima nisu izvršena mnoga konjugovanja. Međutim sva ona su veoma jednostavno, jer će se u njima najčešće nalaziti kompleskni brojevi sa jediničnog kruga, a za njih je $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$.
- ukoliko još niste uvereni da je ovaj metod korisno naučiti, probajte da rešavate ove zadatke i na neki drugi način, ne verujem da ćete ih sve rešiti. Tako na primer za zadatak br. 41 još nije pronađeno elementarno rešenje, a za neke od zadataka su rešenja kompleksnim brojevima čak i neuporedivo kraća od npr. elementarnih rešenja.
- autor se trudio da ova rešenja što pre završi, tako da su moguće greške. Za sve uočene greške, eventualna alternativna rešenja (kompleksnim brojevima) i ostale sugestije, molim da me kontaktirate preko već spomenute adrese.

1. Neka je krug opisani oko trougla abc jedinični, tj. $s=0$ i $|a|=|b|=|c|=1$. Po T6.3 je $h=a+b+c$, a po T6.1 i $h+q=2s=0$, tj. $q=-a-b-c$. Po T6.2 imamo da je $t_1=\dfrac{b+c+q}{3}=-\dfrac{a}{3}$ i slično $t_2=-\dfrac{b}{3}$ i $t_3=-\dfrac{c}{3}$. Sada je $|a-t_1|=\left|a+\dfrac{a}{3}\right|=\left|\dfrac{4a}{3}\right|=\dfrac{4}{3}$ i slično $|b-t_2|=|c-t_3|=\dfrac{4}{3}$. Ovim je dokaz završen, jer smo pretpostavili da je $R=1$, a to ne umanjuje opštost.

2. Neka je krug opisan oko četvorougla $abcd$ jedinični. Prema T6.3 je $h_a=b+c+d, h_b=c+d+a, h_c=d+a+b$ i $h_d=a+b+c$. Da bismo dokazali da su četvorouglovi $abcd$ i $h_ah_bh_ch_d$ podudarni dovoljno je dokazati da je $|x-y|=|h_x-h_y|$, za svaka dva $x,y\in\{a,b,c,d\}$, što se lako proverava.

3. Primetimo da se tačka h dobija rotacijom tačke a oko tačke b za ugao $\dfrac{\pi}{2}$ u pozitivnom smeru. Kako je $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, prema T1.4 imamo da je $(a-b)i=a-h$, tj. $h=(1-i)a+ib$. Slično dobijamo $d=(1-i)b+ic$ i $g=(1-i)c+ia$. Kako je četvorougao $BCDE$ kvadrat, on je i paralelogram, pa se središta stranica ce i bd poklapaju, a samim tim po T6.1 imamo $d+b=e+c$, odnosno $e=(1+i)b-ic$. Slično je i $g=(1+i)c-ia$. Dalje, kako su i četvorouglovi $beph$ i $cgqd$ paralelolgrami, to je $p+b=e+h$ i $c+q=g+d$, odnosno

$$p=ia+b-ic, \quad q=-ia+ib+c.$$

Da bismo dokaz završili dovoljno je dokazati da se q dobija rotacijom tačke p oko tačke a za ugao $\dfrac{\pi}{2}$, što je prema T1.4 ekvivalentno sa

$$(p-a)i=p-b.$$

Poslednje se lako proverava.

4. Tačke b_1,c_1,d_1, dobijaju se rotacijama tačaka b,c odnosno d oko tačaka c,d i a za ugao $\dfrac{\pi}{3}$ u pozitivnom smeru. Samim tim uz oznaku $e^{i\pi/3}=\varepsilon$ prema T1.4 imamo

$$(b-c)\varepsilon=b_1-c, \quad (c-d)\varepsilon=c_1-d, \quad (d-a)\varepsilon=d_1-a.$$

Kako je p središte duži b_1c_1 prema T6.1 imamo

$$p = \frac{b_1 + c_1}{2} = \frac{\varepsilon b + c + (1-\varepsilon)d}{2}.$$

Slično dobijamo i $q = \dfrac{\varepsilon c + d + (1-\varepsilon)a}{2}$. Takođe, ponovo po T6.1 imamo i da je $r = \dfrac{a+b}{2}$. Da bismo dokaz završili potrebno je pokazati da se tačka q dobija rotacijom tačke p oko tačke r za ugao $\dfrac{\pi}{3}$, u pozitivnom smeru. Poslednje je po T1.4 ekvivalentno sa

$$(p-r)\varepsilon = q - r,$$

što sledi iz

$$p - r = \frac{-a + (\varepsilon - 1)b + c + (1-\varepsilon)}{2}, \quad q - r = \frac{-\varepsilon a - b + \varepsilon c + d}{2},$$

i $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$ (jer je $0 = \varepsilon^3 + 1 = (\varepsilon + 1)(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1)$).

5. Neka je $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Prema T1.4 imamo $p_{k+1} - a_{k+1} = (p_k - a_{k+1})\varepsilon$. Sada je

$$p_{k+1} = \varepsilon p_k + (1-\varepsilon)a_{k+1} = \varepsilon(\varepsilon p_{k-1} + (1-\varepsilon)a_k) + (1-\varepsilon)a_{k+1} = \ldots = \varepsilon^{k+1}p_0 + (1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{k+1}\varepsilon^{k+1-i}a_i.$$

Sada je $p_{1996} = p_0 + 665(1-\varepsilon)(\varepsilon^2 a_1 + \varepsilon a_2 + a_3)$, jer je $\varepsilon^3 = 1$. Znači $p_{1996} = p_0$ ako i samo ako je $\varepsilon^2 a_1 + \varepsilon a_2 + a_3 = 0$. Ukoliko još uzmemo da je $a_1 = 0$, to je $a_3 = -\varepsilon a_2$, pa je jasno da se tačka a_2 dobija rotacijom tačke a_3 oko tačke $0 = a_1$, za ugao $\dfrac{\pi}{3}$ u pozitivnom smeru. Ovo završava naš dokaz.

6. Kako se tačka a dobija rotacijom tačke b oko tačke o_1 za ugao $\dfrac{2\pi}{3} = \varepsilon$, u pozitivnom smeru, to je prema T1.4 $(o_1 - b)\varepsilon = o_1 - a$, tj. $o_1 = \dfrac{a - b\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Analogno je i

$$o_2 = \frac{b - c\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad o_3 = \frac{c - d\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad o_4 = \frac{d - a\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Kako je $o_1o_3 \perp o_2o_4$ ekvivalentno sa $\dfrac{o_1 - o_3}{\overline{o_1} - \overline{o_3}} = -\dfrac{o_2 - o_4}{\overline{o_2} - \overline{o_4}}$, to je dovoljno dokazati da je

$$\frac{a - c - (b-d)\varepsilon}{\overline{a-c} - \overline{(b-d)\varepsilon}} = -\frac{b - d - (c-a)\varepsilon}{\overline{b-d} - \overline{(c-a)\varepsilon}},$$

tj. da je

$$(a-c)\overline{b-d} - (b-d)\overline{b-d}\,\varepsilon + (a-c)\overline{a-c}\,\overline{\varepsilon} - (b-d)\overline{a-c}\,\varepsilon\overline{\varepsilon} = -\overline{a-c}\,(b-d) + (b-d)\overline{b-d}\,\overline{\varepsilon} - (a-c)\overline{a-c}\,\varepsilon + (a-c)\overline{b-d}\,\varepsilon\overline{\varepsilon}.$$

Poslednje sledi iz $\overline{\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon}$ i $|a-c|^2 = (a-c)\overline{a-c} = |b-d|^2 = (b-d)\overline{b-d}$.

7. Možemo uzeti da je $a_k = \varepsilon^k$, za $0 \le k \le 12$, gde je $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{15}}$. Dalje, rotacijom tačaka a_1, a_2 i a_4 oko tačke $a_0 = 1$ za uglove ω^6, ω^5, odnosno ω^3 (gde je $\omega = e^{i\pi/15}$), dobijamo tačke a_1', a_2' i a_4', takve da su $a_0, a_7, a_1', a_2', a_4'$ kolinearne. Sada je dovoljno dokazati da je

$$\frac{1}{a_1' - 1} = \frac{1}{a_2' - 1} + \frac{1}{a_4' - 1} + \frac{1}{a_7 - 1}.$$

Kako je prema T1.4 $a_1' - a_0 = (a_1 - a_0)\omega^6, a_2' - a_0 = (a_2 - a_0)\omega^5$ i $a_4' - a_0 = (a_4 - a_0)\omega^3$, a i $\varepsilon = \omega^2$ i $\omega^{30} = 1$, to se poslednje svodi na

$$\frac{1}{\omega^6(\omega^2 - 1)} = \frac{1}{\omega^5(\omega^4 - 1)} + \frac{1}{\omega^3(\omega^8 - 1)} - \frac{\omega^{14}}{\omega^{16} - 1}.$$

Dovođenjem na zajednički imenilac i skraćivanjem sa $\omega^2 - 1$ dobijamo da je potrebno dokazati

$$\omega^8 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1 = \omega(\omega^{12} + \omega^8 + \omega^4 + 1) + \omega^3(\omega^8 + 1) - \omega^{20}.$$

Kako je $\omega^{15} = -1 = -\omega^{30}$, to je i $\omega^{15-k} = -\omega^{30-k}$. Sada traženo sledi na osnovu

$$0 = \omega^{28} + \omega^{26} + \omega^{24} + \omega^{22} + \omega^{20} + \omega^{18} + \omega^{16} + \omega^{14} + \omega^{12} + \omega^{10} + \omega^8 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1 = \frac{\omega^{30} - 1}{\omega^2 - 1} = 0.$$

8. [Preuzeto od Uroša Rajkovića] Uvedimo kompleksnu ravan tako da centar mnogougla bude koordinatni početak i neka je $z = e^{i\frac{\pi}{k}}$. Sada je koordinata tačke A_k u kompleksnoj ravni z^{2k}. Neka je koordinata tačke P kompleksni broj p, gde je $|p| = 1$. Označimo levu stranu jednakosti sa S. Trebamo da dokažemo da je $S = \binom{2m}{m} \cdot n$. Sada je

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} PA_k^{2m} = \sum_{k=0}^{n-1} \left|z^{2k} - p\right|^{2m}$$

Primetimo da su argumenti kompleksnih brojeva $(z^{2k}-p)\cdot z^{-k}$, gde je $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, jednaki sa argumentom kompleksnog broja $(1-p)$, pa je

$$\frac{(z^{2k} - p) \cdot z^{-k}}{1 - p}$$

pozitivan realan broj . Pošto je $|z^{-k}| = 1$ dobijamo da važi:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^{2k} - p|^{2m} = |1 - p|^{2m} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{z^{2k} - p}{1 - p}\right)^{2m} = |1 - p|^{2m} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (z^{2k} - p)^{2m}}{(1 - p)^{2m}}.$$

Kako je S pozitivan realan broj dobijamo da je:

$$S = \left|\sum_{k=0}^{n-1} (z^{2k} - p)^{2m}\right|.$$

Sada iz Njutnove binomne formule dobijamo da važi:

$$S = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{i=0}^{2m} \binom{2m}{i} \cdot z^{2ki} \cdot (-p)^{2m-i}\right] \cdot z^{-2mk}\right|.$$

Sređivanjem dobijamo:

$$S = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{2m} \binom{2m}{i} \cdot z^{2k(i-m)} \cdot (-p)^{2m-i}\right|,$$

ili

$$S = \left|\sum_{i=0}^{2m} \binom{2m}{i} \cdot (-p)^{2m-i} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} z^{2k(i-m)}\right|.$$

Kako za $i \neq m$ važi:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^{2k(i-m)} = \frac{z^{2n(i-m)} - 1}{z^{2(i-m)} - 1},$$

gde je $z^{2n(i-m)} - 1 = 0$ i $z^{2(i-m)} - 1 \neq 0$, pa je

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^{2k(i-m)} = 0.$$

Kada je pak $i = m$ važi:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^{2k(i-m)} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

Iz svega ovoga sledi:

$$S = \left|\binom{2m}{m} \cdot (-p)^m \cdot n\right| = \binom{2m}{m} \cdot n \cdot |(-p)^m|.$$

Zbog $|p| = 1$ dobijamo konačno:

$$S = \binom{2m}{m} \cdot n$$

što je i trebalo dokazati.

9. Neka je krug opisani oko trougla abc jedinični. Tada je $o = 0$ i $\overline{a} = \frac{1}{a}$. Prva od datih proporcija može se zapisati i kao

$$1 = \frac{|a-m||b-n|}{|a-n||b-m|} \Rightarrow 1 = \frac{|a-m|^2|b-n|^2}{|a-n|^2|b-m|^2} = \frac{(a-m)(\overline{a} - \overline{m})(a-n)(\overline{a} - \overline{n})}{(a-n)(\overline{a} - \overline{n})(b-m)(\overline{b} - \overline{m})}$$

Prostim računom dobijamo $(a-m)(\overline{a}-\overline{m})(b-n)(\overline{b}-\overline{n}) = (1-\frac{m}{a}-a\overline{m}+m\overline{m})(1-\frac{n}{b}-b\overline{n}+n\overline{n}) = 1-\frac{m}{a}-a\overline{m}+m\overline{m}-\frac{n}{b}+\frac{mn}{ab}+\frac{a\overline{m}\,n}{b}-\frac{m\overline{m}\,n}{b}-b\overline{n}+\frac{bm\overline{n}}{a}+ab\overline{m}\,\overline{n}-bm\overline{m}\,\overline{n}+n\overline{n}-\frac{mn\overline{n}}{a}-a\overline{m}\,n\overline{n}+m\overline{m}\,n\overline{n}$. Vrednost izraza $(a-n)(\overline{a}-\overline{n})(b-m)(\overline{b}-\overline{m})$ dobijamo iz prethodnog, tako što svako pojavljivanje a zamenimo sa b i obrnuto. Polazna jednakost se sada svodi na

$$1-\frac{m}{a}-a\overline{m}+m\overline{m}-\frac{n}{b}+\frac{mn}{ab}+\frac{a\overline{m}\,n}{b}-\frac{m\overline{m}\,n}{b}-b\overline{n}+\frac{bm\overline{n}}{a}+ab\overline{m}\,\overline{n}-bm\overline{m}\,\overline{n}+n\overline{n}-\frac{mn\overline{n}}{a}-a\overline{m}\,n\overline{n}+m\overline{m}\,n\overline{n}=$$

$$1-\frac{m}{b}-b\overline{m}+m\overline{m}-\frac{n}{a}+\frac{mn}{ab}+\frac{b\overline{m}\,n}{a}-\frac{m\overline{m}\,n}{a}-a\overline{n}+\frac{am\overline{n}}{b}+ab\overline{m}\,\overline{n}-am\overline{m}\,\overline{n}+n\overline{n}-\frac{mn\overline{n}}{b}-b\overline{m}\,n\overline{n}+m\overline{m}\,n\overline{n},$$

pa oduzimanjem i izvlačenjem $a-b$ dobijamo

$$\frac{m}{ab}-\overline{m}-\frac{n}{ab}+\frac{(a+b)\overline{m}\,n}{ab}-\frac{m\overline{m}\,n}{ab}+\overline{n}-\frac{(a+b)m\overline{n}}{ab}+m\overline{m}\,\overline{n}+\frac{mn\overline{n}}{ab}-\overline{m}\,n\overline{n}=0.$$

Kako važi relacija $AM/CM = AN/CM$, to važi i izraz koji se dobija iz prethodnog kada se svako pojavljivanje b zameni sa c i obrnuto. Oduzimanjem ovako dobijenog izraz od prethodnog i izvlačenjem $b-c$ dobijamo

$$-\frac{m}{abc}+\frac{n}{abc}-\frac{\overline{m}\,n}{bc}+\frac{m\overline{m}\,n}{abc}+\frac{m\overline{n}}{bc}-\frac{mn\overline{n}}{abc}=0.$$

Zapisivanjem istog izraza u kome bc zamenjujemo sa ac (koji se takođe dobija iz početnih proporcija zbog simetrije), oduzimanjem i izvlačenjem dobijamo $m\overline{n}-n\overline{m}=0$. Sada je $\frac{m-o}{\overline{m}-\overline{o}}=\frac{n-o}{\overline{n}-\overline{o}}$, pa su po T1.2 tačke m,n,o kolinearne.

10. [Preuzeto od Uroša Rajkovića] Prvo ćemo dokazati da za tačke jediničnog kruga p, a i b važi da je rastojanje tačke p od prave koja sadrži tačke a i b jednako:

$$\frac{1}{2}|(a-p)(b-p)|.$$

Ako sa q označimo podnožje normale iz p na pravu koja sadrži tačke a i b po T2.4 važi:

$$q=\frac{1}{2}\Big(p+a+b-\frac{ab}{p}\Big).$$

Sada je traženo rastojanje jednako:

$$|q-p|=\frac{1}{2}\left|-p+a+b-\frac{ab}{p}\right|.$$

Pošto je $|p|=1$ smemo izraz sa desne strane množiti sa $-p$ i posle množenja dobijamo:

$$\left|\frac{1}{2}(p^2-(a+b)p+ab)\right|.$$

Sada se lako vidi da je traženo rastojanje zaista jednako:

$$\frac{1}{2}|(a-p)(b-p)|.$$

Ako označimo $z=e^{i\frac{2\pi}{2n}}$, tada će koordinata tačke A_k biti z^{2k}. Sada je:

$$2\cdot h_k=|(z^{2k}-p)(z^{2k-2}-p)|.$$

Vektor $(z^{2k}-p)\cdot z^{-k}$ je kolinearan sa $1-p$, pa je

$$\frac{(z^{2k}-p)\cdot z^{-k}}{1-p}$$

pozitivan realan broj. Odavde sledi da za $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ važi:

$$h_k=\frac{(z^{2k}-p)\cdot(z^{2k-2}-p)\cdot z^{-(2k-1)}}{2\cdot(1-p)^2}\cdot|1-p|^2,$$

pošto je $|z|=1$. Važi i da je:

$$h_n=\frac{(1-p)\cdot(z^{2n-2}-p)\cdot z^{-(n-1)}}{2\cdot(1-p)^2}\cdot|1-p|^2.$$

Mi treba da dokažemo da je:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\dfrac{(z^{2k}-p)\cdot(z^{2k-2}-p)\cdot z^{-(2k-1)}}{2\cdot(1-p)^2}\cdot|1-p|^2} = \frac{1}{\dfrac{(1-p)\cdot(z^{2n-2}-p)\cdot z^{-(n-1)}}{2\cdot(1-p)^2}\cdot|1-p|^2}.$$

Posle skraćivanja i množenja sa z dobijamo:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{z^{2k}}{(z^{2k}-p)\cdot(z^{2k-2}-p)} = \frac{-1}{(1-p)\cdot(z^{2n-2}-p)},$$

pošto je $z^n=-1$. Označimo levu stranu jednakosti sa S. Važi da je:

$$S-\frac{1}{z^2}S = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(z^{2k}-p)-(z^{2k-2}-p)}{(z^{2k}-p)\cdot(z^{2k-2}-p)}.$$

Odavde sledi da je:

$$(1-\frac{1}{z^2})S = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{z^{2k-2}-p}-\frac{1}{z^{2k}-p}\right).$$

Posle skraćivanja dobijamo:

$$(1-\frac{1}{z^2})S = \frac{1}{1-p}-\frac{1}{z^{2n-2}-p} = \frac{(z^{2n-2}-p)-(1-p)}{(1-p)\cdot(z^{2n-2}-p)}.$$

Pošto je $z^{2n-2}=\dfrac{1}{z^2}$ (sledi iz $z^n=1$) dobijamo da je zaista:

$$S = \frac{-1}{(1-p)\cdot(z^{2n-2}-p)},$$

što je i trebalo dokazati.

11. Neka je krug opisani oko četvorougla $abcd$ jedinični. Kako je ac njegov prečnik to je $c=-a$. Dalje, po T2.5, imamo da je

$$m=\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}=\frac{2bd+ad-ab}{d+b}.$$

Po T2.3 imamo da je $n=\dfrac{2bd}{b+d}$, pa je $m-n=\dfrac{a(d-b)}{b+d}$ i $\overline{m}-\overline{n}=\dfrac{b-d}{a(b+d)}$. Sada je

$$\frac{m-n}{\overline{m}-\overline{n}}=-\frac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}}=a^2,$$

pa je po T1.3 $mn\perp ac$, što je i trebalo dokazati.

12. Neka je krug opisan oko trougla abc jedinični. Prema T6.3 je $h=a+b+c$, a prema T2.4 $e=\dfrac{1}{2}\Big(a+b+c-\dfrac{ac}{b}\Big)$. Kako je $paqb$ paralelogram to se središta duži pq i ab poklapaju, pa je prema T6.1 $q=a+b-p$ i analogno $r=a+c-p$. Kako su tačke x,a,q kolinearne, to je prema T1.2

$$\frac{x-a}{\overline{x}-\overline{a}}=\frac{a-q}{\overline{a}-\overline{q}}=\frac{p-b}{\overline{p}-\overline{b}}=-pb,$$

odnosno $\overline{x}=\dfrac{pb+a^2-ax}{abp}$. Dalje, kako su i tačke h,r,x kolinearne, to je po istoj teoremi i

$$\frac{x-h}{\overline{x}-\overline{h}}=\frac{h-r}{\overline{h}-\overline{r}}=\frac{b+p}{\overline{b}+\overline{p}}=bp,$$

odnosno

$$\overline{x}=\frac{x-a-b-c+p+\dfrac{bp}{a}+\dfrac{bp}{c}}{bp}.$$

Izjednačavanjem izraza dobijenih za $\overline{x}$ imamo

$$x=\frac{1}{2}\Big(2a+b+c-p-\frac{bp}{c}\Big).$$

Po T1.1 potrebno je dokazati da je

$$\frac{e-x}{\overline{e}-\overline{x}}=\frac{a-p}{\overline{a}-\overline{p}}=-ap.$$

Poslednje sledi iz

$$e-x=\frac{1}{2}\Big(p+\frac{bp}{c}-a-\frac{ac}{b}\Big)=\frac{bcp+b^2p-abc-ac^2}{2bc}=\frac{(b+c)(bp-ac)}{2bc},$$

konjugovanjem.

13. Kao što je i prethodno napomenuto pretpostavićemo da je krug opisan oko četvorougla $abcd$ jedinični. Korišćenjem T2.4 i T6.1 dobijamo

$$p=a+b-\frac{ab}{c},\quad q=a+d+\frac{ad}{c}\quad (1).$$

Neka je H ortocentar trougla ABD. Tada je T6.3 $h=a+b+d$, pa je po T1.2 dovoljno dokazati da je

$$\frac{p-h}{\overline{p}-\overline{h}}=\frac{q-h}{\overline{q}-\overline{h}}.\quad (2)$$

Zamenom vrednosti za p iz (1) dobijamo

$$\frac{p-h}{\overline{p}-\overline{h}}=\frac{a+b-\dfrac{ab}{c}-a-b-d}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{c}{ab}-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{d}}=\frac{abd}{c},$$

pa kako je ovaj izraz simetričan po b i d, to je (2) očigledno ispunjeno.

14. Neka je krug opisani oko trougla abc jedinični i neka su a',b',c' podnožja visina iz temena a,b,c, redom. Prema T2.4 imamo

$$a'=\frac{1}{2}\Big(a+b+c-\frac{bc}{a}\Big),\quad b'=\frac{1}{2}\Big(a+b+c-\frac{ca}{b}\Big),\quad c'=\frac{1}{2}\Big(a+b+c-\frac{ab}{c}\Big).$$

Kako su a',b',c' središta duži ad,be,cf, redom, to je prema T6.1 i

$$d=b+c-\frac{bc}{a},\quad e=a+c-\frac{ac}{b},\quad f=a+b-\frac{ab}{c}.$$

Prema T1.2 kolinearnost tačaka d,e,f ekvivalentna je sa

$$\frac{d-e}{\overline{d}-\overline{e}}=\frac{f-e}{\overline{f}-\overline{e}}.$$

Kako je $d-e=b-a+\dfrac{ac}{b}-\dfrac{bc}{a}=(b-a)\dfrac{ab-c(a+b)}{ab}$ i slično $f-e=(b-c)\dfrac{bc-a(b+c)}{bc}$, to se konjugovanjem i sređivanjem poslednje svodi na

$$0=(a^2b+a^2c-abc)(c-a-b)-(c^2a+c^2b-abc)(a-b-c)=(c-a)(abc-a^2b-ab^2-a^2c-ac^2-b^2c-bc^2).\quad (1)$$

Odredimo sada i potreban i dovoljan uslov da je $|h|=2$ (poluprečnik kruga je 1). Kvadriranjem dobijamo

$$4=|h|^2=h\overline{h}=(a+b+c)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)=\frac{a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+3abc}{abc}.\quad (2)$$

Sada je jasno da je (1) ekvivalentno sa (2), što završava naš dokaz.

15. Neka je krug opisani oko trougla abc jedinični i neka su a',b',c' središta stranica bc,ca,ab. Kako je $aa_1\perp ao$ i kako su tačke a_1,b',c' kolinearne, po T1.3, odnosno T1.2, imamo da je

$$\frac{a-a_1}{\overline{a}-\overline{a_1}}=-\frac{a-o}{\overline{a}-\overline{o}}=-a^2,\quad \frac{b'-c'}{\overline{b'}-\overline{c'}}=\frac{b'-a_1}{\overline{b'}-\overline{a_1}}.$$

Iz prve jednakosti je $\overline{a_1}=\dfrac{2a-a_1}{a^2}$, a kako je iz T6.1 $b'=\dfrac{a+c}{2}$ i $c'=\dfrac{a+b}{2}$, to je i $\overline{a_1}=\dfrac{ab+bc+ca-aa_1}{2abc}$. Izjednačvanjem dobijamo $a_1=\dfrac{a^2(a+b+c)-3abc}{a^2-2bc}$. Simetrično je $b_1=\dfrac{b^2(a+b+c)-3abc}{2(b^2-ac)}$ i $c_1=\dfrac{c^2(a+b+c)-3abc}{2(c^2-2ab)}$. Sada je

$$a_1-b_1=\frac{a^2(a+b+c)-3abc}{2(a^2-bc)}-\frac{b^2(a+b+c)-3abc}{2(b^2-ac)}=-\frac{c(a-b)^3(a+b+c)}{2(a^2-bc)(b^2-ac)},$$

pa se lako proverava uslov za $a_1b_1 \perp ho$, koji je prema T1.3

$$\frac{a_1 - b_1}{\overline{a_1} - \overline{b_1}} = -\frac{h - o}{\overline{h} - \overline{o}} = -\frac{(a+b+c)abc}{ab+bc+ca}.$$

Simetrično je i $a_1c_1 \perp ho$, pa su tačke a_1, a_2 i a_3 kolinearne.

16. Neka je kug opisan oko trougla abc jedinični. Po T2.4 imamo da je $b_1 = \frac{1}{2}\Big(a+b+c-\frac{ac}{b}\Big)$ i $c_1 = \frac{1}{2}\Big(a+b+c-\frac{ab}{c}\Big)$, po T6.1 $m = \frac{b+c}{2}$ i po T6.3 $h = a+b+c$. Odredimo tačku d. Kako je d na tetivi bc to je prema T2.2 $\overline{d} = \frac{b+c-d}{bc}$. Dalje, kako su tačke b_1, c_1 i d kolinearne, to je prema T1.2

$$\frac{d - b_1}{\overline{d} - \overline{b_1}} = \frac{b_1 - c_1}{\overline{b_1} - \overline{c_1}} = \frac{a\Big(\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\Big)}{\frac{1}{a}\Big(\frac{c}{b} - \frac{b}{c}\Big)} = -a^2.$$

Sada je i $\overline{d} = \frac{a^2\overline{b_1} + b_1 - d}{a^2}$, pa izjednačavanjem dobijamo

$$d = \frac{a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 - b^2c - bc^2 - 2abc}{2(a^2 - bc)}.$$

Da bismo dokazali da je $dh \perp am$, po T1.3 dovoljno je dokazati da je $\frac{d-h}{\overline{d} - \overline{h}} = -\frac{m-a}{\overline{m} - \overline{a}}$. Ovo sledi iz

$$d - h = \frac{b^2c + bc^2 + ab^2 + ac^2 - a^2b - a^2c - 2a^3}{2(a^2 - bc)} = \frac{(b+c-2a)(ab+bc+ca+a^2)}{2(a^2-bc)}$$

i $m - a = \frac{b+c-2a}{2}$, prostim konjugovanjem.

17. Uzećemo da je krug opisani oko trougla abc jedinični. Po T2.4 imamo da je $f = \frac{1}{2}\Big(a+b+c-\frac{ab}{c}\Big)$. Takođe, kako su a, c, p kolinearne i ac tetiva jediničnog kruga to je prema T2.2 i $\overline{p} = \frac{a+c-p}{ac}$. Kako je $fo \perp pf$ to je prema T1.3

$$\frac{f - o}{\overline{f} - \overline{o}} = -\frac{p - f}{\overline{p} - \overline{f}}.$$

Iz poslednje dve realcije dobijamo

$$p = f\frac{2ac\overline{f} - (a+c)}{ac\overline{f} - f} = \frac{\Big(a+b+c-\frac{ab}{c}\Big)c^2}{b^2+c^2}.$$

Neka je $\angle phf = \varphi$, tada je

$$\frac{f - h}{\overline{f} - \overline{h}} = e^{i2\varphi}\frac{p - h}{\overline{p} - \overline{h}}.$$

Kako je $p - h = -b\frac{ab+bc+ca+c^2}{b^2+c^2}$ i konjugovanjem $\overline{p} - \overline{h} = -\frac{c(ab+bc+ca+b^2)}{ab(b^2+c^2)}$, odnosno sa druge strane $f - h = \frac{ab+bc+ca+c^2}{2c}$ i konjugovanjem $\overline{f} - \overline{h} = \frac{ab+bc+ca+c^2}{2abc}$, to je $e^{i2\varphi} = \frac{c}{b}$. S druge strane imamo i da je $\frac{c-a}{\overline{c} - \overline{a}} = e^{i2\alpha}\frac{b-a}{\overline{b} - \overline{a}}$, tj. uz pomoć T1.2 i da je $e^{i2\alpha} = \frac{c}{b}$. Ovim smo dokazali da je $\alpha = \pi + \varphi$ ili $\alpha = \varphi$, pa kako je prvo nemoguće dokaz je završen.

18. Prvo ćemo dokazati sledeću korisnu lemu:

Lema. Ako tačke a, b, c, a', b', c' leže na jediničnom krugu, tada su prave aa', bb', cc' konkurentne ili kolinearne ako i samo ako je

$$(a - b')(b - c')(c - a') = (a - c')(b - a')(c - b').$$

Dokaz. Neka je presek pravih aa' i bb' tačka x, a pravih aa' i cc' tačka y. Prema T2.5 imamo

$$x = \frac{aa'(b+b') - bb'(a+a')}{aa' - bb'}, \quad y = \frac{aa'(c+c') - cc'(a+a')}{aa' - cc'}.$$

Ovde smo pretpostavili da date tačke postoje (tj. da nije $aa' \parallel bb'$ i $aa' \parallel cc'$). Jasno je da su prave aa', bb', cc' konkurentne ako i samo ako je $x = y$, tj. ako i samo ako je

$$(aa'(b + b') - bb'(a + a'))(aa' - cc') = (aa'(c + c') - cc'(a + a'))(aa' - bb').$$

Sređivanjem ovo se svodi na $aa'b + aa'b' - abb' - a'b'b - bcc' - b'cc' = aa'c + aa'c' - bc'c - bb'c' - acc' - a'cc'$, a kako je to ekvivalentno sa $(a - b')(b - c')(c - a') = (a - c')(b - a')(c - b')$, lema je dokazana.

$\square$

Pređimo sada i na dokaz zadatka. Neka je krug opisan oko datog šestougla jedinični. Prema T1.1 imamo

$$\frac{a_2 - a_4}{\overline{a_2} - \overline{a_4}} = \frac{a_0 - a_0'}{\overline{a_0} - \overline{a_0'}}, \quad \frac{a_4 - a_0}{\overline{a_4} - \overline{a_0}} = \frac{a_2 - a_2'}{\overline{a_2} - \overline{a_2'}}, \quad \frac{a_2 - a_0}{\overline{a_2} - \overline{a_0}} = \frac{a_4 - a_4'}{\overline{a_4} - \overline{a_4'}},$$

pa je $a_0' = \dfrac{a_2 a_4}{a_0}, a_2' = \dfrac{a_0 a_4}{a_2}$ i $a_4' = \dfrac{a_0 a_2}{a_4}$. Takođe, prema T2.5 imamo i

$$a_3' = \frac{a_0' a_3(a_2 + a_3) - a_2 a_3(a_0' + a_3)}{a_0' a_3 - a_2 a_4} = \frac{a_4(a_3 - a_2) + a_3(a_2 - a_0)}{a_3 - a_0}.$$

Analogno je i

$$a_5' = \frac{a_0(a_5 - a_4) + a_5(a_4 - a_2)}{a_5 - a_2}, \quad a_1' = \frac{a_2(a_1 - a_0) + a_1(a_0 - a_4)}{a_1 - a_4}.$$

Neka su tačke a_3'', a_1'', a_5'' drugi preseci jediničnog kruga i pravih $a_0 a_3', a_4 a_1', a_2 a_5'$, redom. Sada je prema T1.2

$$\frac{a_3' - a_0}{\overline{a_3'} - \overline{a_0}} = \frac{a_3'' - a_0}{\overline{a_3''} - \overline{a_0}} = -a_3'' a_0,$$

pa kako je $a_0 - a_3' = \dfrac{a_3(2a_0 - a_2 - a_4) + a_2 a_4 - a_0^2}{a_3 - a_0}$, to je

$$a_3'' - a_4 = \frac{(a_0 - a_2)^2(a_3 - a_4)}{a_0 a_2(a_3 - a_0)(\overline{a_0} - \overline{a_3'})}, \quad a_3'' - a_2 = \frac{(a_0 - a_4)^2(a_3 - a_2)}{a_0 a_4(a_3 - a_0)(\overline{a_0} - \overline{a_3'})}.$$

Analogno dobijamo i

$$a_1'' - a_0 = a_3'' - a_4 = \frac{(a_2 - a_4)^2(a_1 - a_0)}{a_2 a_4(a_1 - a_4)(\overline{a_4} - \overline{a_1'})}, \quad a_1'' - a_2 = a_3'' - a_4 = \frac{(a_4 - a_0)^2(a_1 - a_2)}{a_0 a_4(a_1 - a_4)(\overline{a_4} - \overline{a_1'})},$$

$$a_5'' - a_0 = a_3'' - a_4 = \frac{(a_2 - a_4)^2(a_5 - a_0)}{a_2 a_4(a_5 - a_0)(\overline{a_2} - \overline{a_5'})}, \quad a_5'' - a_4 = a_3'' - a_4 = \frac{(a_0 - a_2)^2(a_5 - a_4)}{a_0 a_2(a_5 - a_4)(\overline{a_2} - \overline{a_5'})}.$$

Sada je po lemi jasno da iz konkurentnosti pravih $a_0 a_3, a_1 a_4$ i $a_2 a_5$, tj. iz $(a_0 - a_1)(a_2 - a_3)(a_4 - a_5) = (a_0 - a_5)(a_2 - a_1)(a_4 - a_3)$, sledi i konkurentnost pravih $a_0 a_3'', a_4 a_1''$ i $a_2 a_5''$, tj. $(a_0 - a_1'')(a_2 - a_3'')(a_4 - a_5'') = (a_0 - a_5'')(a_2 - a_1'')(a_4 - a_3'')$, jer se one očigledno seku.

19. [Preuzeto od Uroša Rajkovića] Neka je krug opisan oko trougla ABC jedinični krug kompleksne ravni. Kako su A_1, B_1 i C_1 podnožja normala, po T2.4 važe formule:

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(b + c + m - \frac{bc}{m}\right), \; b_1 = \frac{1}{2}\left(a + c + m - \frac{ac}{m}\right) \text{ i } c_1 = \frac{1}{2}\left(a + b + m - \frac{ab}{m}\right).$$

Iz njih dobijamo:

$$\frac{a_1 - c_1}{b_1 - c_1} = \frac{c - a + \dfrac{ab - bc}{m}}{c - b + \dfrac{ab - ac}{m}} = \frac{(c - a)(m - b)}{(c - b)(m - a)} = \frac{\bar{a}_1 - \bar{c}_1}{\bar{b}_1 - \bar{c}_1},$$

pa su, prema T1.2, tačke A_1, B_1 i C_1 kolinearne.

20. Četvorugao $ABCD$ je tetivan, pa uzmimo da je njegov opisani krug jedinični. Neka su a_1, a_2 i a_3 podnožja normala iz tačke a na prave bc, cd i db, redom, a b_1, b_2 i b_3 podnožja normala iz tačke b na prave ac, cd i da, redom. Prema T2.4 imamo da je

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{bc}{a}\right), \; a_2 = \frac{1}{2}\left(a + b + d - \frac{bd}{a}\right), \; a_3 = \frac{1}{2}\left(a + c + d - \frac{cd}{a}\right)$$

$$b_1=\frac{1}{2}\Big(b+a+c-\frac{ac}{b}\Big),\ b_2=\frac{1}{2}\Big(b+c+d-\frac{cd}{b}\Big),\ b_3=\frac{1}{2}\Big(b+d+a-\frac{da}{b}\Big)$$

Tačku x određujemo iz dva uslova kolinearnosti. Prvo iz kolinearnosti tačaka x,a_1,a_2, pa T1.2 imamo da je

$$\frac{x-a_1}{\overline{x}-\overline{a_1}}=\frac{a_1-a_2}{\overline{a_1}-\overline{a_2}}=\frac{\frac{1}{2}\Big(c-d+\frac{bd}{a}-\frac{bc}{a}\Big)}{\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}+\frac{a}{bd}-\frac{a}{bc}\Big)}=\frac{bcd}{a},$$

tj. posle sređivanja

$$\overline{x}=\frac{x-\frac{1}{2}\Big(a+b+c+d-\frac{abc+acd+abd+bcd}{a^2}\Big)}{bcd}a.$$

Slično iz kolinearnosti tačaka x,b_1 i b_2 dobijamo da je $\overline{x}=\dfrac{x-\frac{1}{2}\Big(a+b+c+d-\frac{abc+acd+abd+bcd}{b^2}\Big)}{acd}b$, pa se izjednačavanjem dobija

$$x=\frac{1}{2}\Big(a+b+c+d\Big).$$

Neka je $h=a+c+d$ (po T6) ortocentar trougla acd. Da bismo dokaz završili, po T1.2 dovoljno je dokazati da je

$$\frac{x-c}{\overline{x}-\overline{c}}=\frac{h-c}{\overline{h}-\overline{c}}=\frac{a+b+d-c}{\overline{a}+\overline{b}+\overline{d}-\overline{c}}$$

S druge strane je $x-c=\dfrac{1}{2}\Big(a+b+d-c\Big)$, odakle je jednakost očigledna.

21. Prema prethodnom zadatku imamo da je presek pravih $l(a;bcd)$ i $l(b;cda)$ tačka $x=\dfrac{1}{2}\Big(a+b+c+d\Big)$, što je simetričan izraz, pa je ova tačka i presek svake dve od datih pravih.

22. Prema prethodna dva zadatka traženo geometrijsko mesto tača je skup svih tačaka $x=\dfrac{1}{2}\Big(a+b+c+d\Big)$, kada se d pomera po krugu. To je ustvari krug sa poluprečnikom $\dfrac{1}{2}$ i centrom u $\dfrac{a+b+c}{2}$, što je središte duži koja spaja centar datog kruga i ortocentar trougla abc.

23. Neka je jedinični krug opisani oko trougla abc. Iz T1.3 i uslova $ad\perp ao$ imamo da je

$$\frac{d-a}{\overline{d}-\overline{a}}=-\frac{a-o}{\overline{a}-\overline{o}}=-a^2,$$

tj. sređivanjem $\overline{d}=\dfrac{2a-d}{a^2}$. Dalje, kako su tačke b,c,d kolinearne, a bc tetiva jediničnog kruga, to je prema T2.2 $\overline{d}=\dfrac{b+c-d}{bc}$, pa se rešavanjem datog sistema dobija $d=\dfrac{a^2(b+c)-2abc}{a^2-bc}$. Kako je e na simetrali duži ab, to je $oe\perp ab$, a samim tim po T1.3 i $\dfrac{e-o}{\overline{e}-\overline{o}}=-\dfrac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=ab$, tj. $\overline{e}=\dfrac{e}{ab}$. Iz $be\perp bc$, opet po T1.3 dobijamo $\dfrac{b-e}{\overline{b}-\overline{e}}=-\dfrac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}}=bc$, tj. $\overline{e}=\dfrac{c-b+e}{bc}=\dfrac{e}{ab}$ i na kraju $e=\dfrac{a(c-b)}{c-a}$. Simetrično je i $f=\dfrac{a(b-c)}{b-a}$. Da bismo dokaz završili po T1.2 dovoljno je dokazati da je $\dfrac{d-f}{\overline{d}-\overline{f}}=\dfrac{f-e}{\overline{f}-\overline{e}}$. Primetimo da je

$$d-f=\frac{a^2(b+c)-2abc}{a^2-bc}-\frac{a(b-c)}{b-a}=\frac{a^2b^2+3a^2bc-ab^2c-2a^3b-abc^2}{(a^2-bc)(b-a)}=\frac{ab(a-c)(b+c-2a)}{(a^2-bc)(b-a)},$$

i slično $d-e=\dfrac{ac(a-b)(b+c-2a)}{(a^2-bc)(c-a)}$, pa se konjugovanjem traženi uslov lako proverava.

24. [Preuzeto od Uroša Rajkovića] Neka je u dati krug upisan šestougao $ABCDEF$. Neka je, bez gubljenja opštosti, taj krug jedinični. Konjugovanjem T2.5 imamo:

$$\overline{m}=\frac{a+b-(d+e)}{ab-de},\ \overline{n}=\frac{b+c-(e+f)}{bc-ef},\ \overline{p}=\frac{c+d-(f+a)}{cd-fa},$$

pa dobijamo:

$$\overline{m}-\overline{n}=\frac{(b-e)(bc-cd+de-ef+fa-ab)}{(ab-de)(bc-ef)},$$

i analogno:

$$\overline{n} - \overline{p} = \frac{(c-f)(cd-de+ef-fa+ab-bc)}{(bc-ef)(cd-fa)}.$$

Odavde je:

$$\frac{\overline{m} - \overline{n}}{\overline{n} - \overline{p}} = \frac{(b-e)(cd-fa)}{(f-c)(ab-de)}.$$

Kako su brojevi $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$, $\overline{e}$ i $\overline{f}$ jednaki $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{e}$ i $\frac{1}{f}$, respektivno, sledi da je lako proveriti da je kompleksan broj sa leve strane poslednje jednakosti jednak svom konjugovano kompleksnom broju, pa je samim tim realan. Sada su po T1.2 tačke M, N i P kolinearne, što smo i trebali dokazati.

25. Pretpostavimo da je četvorougao $abcd$ upisan u jedinični krug. Po T2.5 imamo da je

$$e = \frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd},\ f = \frac{ad(b+c)-bc(a+d)}{ad-bc} \quad \text{i } g = \frac{ac(b+d)-bd(a+c)}{ac-bd}.(1)$$

Da bismo dokazali da je $o = 0$ ortocentar trougla efg, dovoljno je dokazati da je $of \perp eg$ i $og \perp ef$, a zbog simetričnosti dovoljno je dokazati jednu od ove dve relacije. Dakle, po T1.3 dovoljno je dokazati da je

$$\frac{f-o}{\overline{f} - \overline{o}} = \frac{e-g}{\overline{e} - \overline{g}} \quad (2).$$

Iz (1) imamo da je

$$\frac{f-o}{\overline{f} - \overline{o}} = \frac{\dfrac{ad(b+c)-bc(a+d)}{ad-bc}}{\dfrac{(b+c)-(a+d)}{bc-ad}} = \frac{ad(b+c)-bc(a+d)}{a+d-(b+c)}, (3)$$

odnosno

$$\begin{aligned} e-g &= \frac{(a-d)(ab^2d-ac^2d)+(b-c)(bcd^2-a^2bc)}{(ab-cd)(ac-bd)} \\ &= \frac{(a-d)(b-c)((b+c)ad-(a+d)bc)}{(ab-cd)(ac-bd)} \quad (4) \end{aligned}$$

i konjugovanjem

$$\overline{e} - \overline{g} = \frac{(a-d)(b-c)(b+c-(a+d))}{(ab-cd)(ac-bd)} \quad (5).$$

Upoređivanjem izraza (3),(4) i (5) dobijamo traženo.

26. Neka je krug opisan oko trougla abc jedinični i neka je pri tome $a = 1$. Tada je $c = \overline{b}$ i $t = -1$. Kako je p na tetivi bc, po T2.2 imamo da je $\overline{p} = b + \frac{1}{b} - p$. Kako je x na tetivi ab, to je na isti način $\overline{x} = \frac{1+b-x}{b}$, a kako je $px \parallel ac$, to je po T1.1 i

$$\frac{p-x}{\overline{p} - \overline{x}} = \frac{a-c}{\overline{a} - \overline{c}} = -\frac{1}{b},$$

tj. $\overline{x} = pb + \overline{p} - xb$. Izjednačavanjem dobijamo $x = \frac{b(p+1)}{b+1}$. Slično dobijamo $y = \frac{p+1}{b+1}$. Po T1.3 dovoljno je još dokazati da je $\frac{x-y}{\overline{x} - \overline{y}} = -\frac{p-t}{\overline{p} - \overline{t}} = -\frac{p+1}{\overline{p}+1}$. Ovo pak sledi iz $x - y = \frac{(p+1)(b-1)}{b+1}$ i konjugovanjem

$$\overline{x} - \overline{y} = \frac{(\overline{p}+1)\left(\dfrac{1}{b} - 1\right)}{\dfrac{1}{b} + 1} = -\frac{(\overline{p}+1)(b-1)}{b+1}.$$

27. Neka je krug opisani oko četvorougla $abcd$ jedinični. Po T6.1 imamo da je $k = \frac{a+b}{2}$, $l = \frac{b+c}{2}$, $m = \frac{c+a}{2}$ i $n = \frac{d+a}{2}$. Odredimo koordinatu ortocentra trougla akn. Neka je to tačka h_1 i neka su ortocentri trouglova bkl, clm i dmn tačke h_2, h_3 i h_4, redom. Tada je $kh_1 \perp an$ i $nh_1 \perp ak$, pa je po T1.3

$$\frac{k-h_1}{\overline{k} - \overline{h_1}} = -\frac{a-n}{\overline{a} - \overline{n}} \quad \text{i} \quad \frac{n-h_1}{\overline{n} - \overline{h_1}} = -\frac{a-k}{\overline{a} - \overline{k}}. \quad (1)$$

Kako je

$$\frac{a-n}{\overline{a}-\overline{n}}=\frac{a-d}{\overline{a}-\overline{d}}=-ad,$$

to je

$$\overline{h_1}=\frac{\overline{k}\,ad-k+h_1}{ad}.$$

Slično iz druge od jednačina u (1) dobijamo da je

$$\overline{h_1}=\frac{\overline{n}\,ab-n+h_1}{ab}.$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo da je

$$h_1=\frac{2a+b+d}{2}.$$

Simetrično dobijamo da je

$$h_2=\frac{2b+c+a}{2},\ h_3=\frac{2c+d+b}{2},\ h_4=\frac{2d+a+c}{2},$$

pa kako je $h_1+h_3=h_2+h_4$, to se po T6.1 središta duži h_1h_3 i h_2h_4 poklapaju, pa je i četvorougao $h_1h_2h_3h_4$ paralelogram.

28. Neka je krug upisan u trougao abc jedinični. Po T2.3 imamo da je $a=\dfrac{2em}{e+m}$ i $b=\dfrac{2mk}{m+k}$. Odredimo tačku p. Kako su tačke m,k,p kolinearne i mk tetiva jediničnog kruga, to je po T2.2 $\overline{p}=\dfrac{m+k-p}{mk}$. Dalje, imamo da su tačke p,e,c kolinearne, ali ovde je mnogo produktivnije da primetimo da je $pe\perp oe$, pa na osnovu T1.3 imamo

$$\frac{e-p}{\overline{e}-\overline{p}}=-\frac{e-o}{\overline{e}-\overline{o}}=-e^2$$

i sređivanjem $\overline{p}=\dfrac{2e-p}{e^2}$. Izjednačavanjem dva dobijena izraza za $\overline{p}$ dobijamo

$$p=e\frac{(m+k)e-2mk}{e^2-mk}.$$

Da bismo dokaz završili na osnovu T1.3 dovoljno je dokazati da je $\dfrac{p-o}{\overline{p}-\overline{o}}=-\dfrac{e-b}{\overline{e}-\overline{b}}$. Ovo će slediti iz

$$e-b=\frac{e(m+k)-2mk}{m+k},$$

odnosno konjugovanjem $\overline{e}-\overline{b}=\dfrac{m+k-2e}{(m+k)e}$ i $\overline{p}=\dfrac{m+k-2e}{mk-e^2}$.

29. Neka je krug upisani u $abcd$ jedinični. Iz T2.3 imamo da je

$$a=\frac{2nk}{n+k},\quad b=\frac{2kl}{k+l},\quad c=\frac{2lm}{l+m},\quad d=\frac{2mn}{m+n}.\quad (1)$$

Po T2.5 imamo da je

$$s=\frac{kl(m+n)-mn(k+l)}{kl-mn}.\quad (2)$$

Sada je po T1.1 dovoljno proveriti da je

$$\frac{s-o}{\overline{s}-\overline{o}}=\frac{b-d}{\overline{b}-\overline{d}}.$$

Iz (1) imamo da je $b-d=2\dfrac{kl(m+n)-mn(k+l)}{(k+l)(m+n)}$ (3), odnosno konjugovanjem $\overline{b}-\overline{d}=\dfrac{m+n-(k+l)}{(k+l)(m+n)}$ (4). Iz (2) imamo da je

$$\frac{s}{\overline{s}}=\frac{kl(m+n)-mn(k+l)}{kl-mn},\quad (5)$$

pa upoređivanjem izraza (3),(4) i (5) dobijamo traženo.

30. [preuzeto od Uroša Rajkovića] Neka je P dodirna tačka upisanog kruga sa pravom BC. Neka je upisani krug jedinični. Prema T2.3 koordinate tačaka A, B i C su

$$a=\frac{2qr}{q+r},\quad b=\frac{2pr}{p+r}\ \text{i}\ c=\frac{2pq}{p+q}.$$

Dalje, prema T6.1 je $x = \dfrac{1}{2}(b+c) = \dfrac{pr}{p+r} + \dfrac{pq}{p+q}$, $y = \alpha b = \alpha\dfrac{2pr}{p+r}$ i $z = \beta c = \beta\dfrac{2pq}{p+q}$ $(\alpha, \beta \in R)$. Vrednosti α i β lako nalazimo iz uslova $y \in rq$ i $z \in rq$:

$$\alpha = \frac{(p+r)(q+r)}{2(p+q)r} \text{ i } \beta = \frac{(p+q)(r+q)}{2(p+r)q}.$$

Odavde dobijamo koordinate tačaka y i z preko p, q i r:

$$y = \frac{p(q+r)}{(p+q)} \text{ i } z = \frac{p(r+q)}{(p+r)}.$$

Mi trebamo da dokažemo da je:

$$\angle RAQ = 60^\circ \iff XYZ \text{ je jednakostraničan.}$$

Prvi uslov je ekvivalentan sa $\angle QOR = 60^\circ$ tj. sa

$$r = q \cdot e^{i2\pi/3}.$$

Drugi uslov je ekvivalentan sa $(z-x) = (y-x) \cdot e^{i\pi/3}$. Primetimo da je:

$$y - x = \frac{p(q+r)}{(p+q)} - \left(\frac{pr}{p+r} + \frac{pq}{p+q}\right) = \frac{pr(r-q)}{(p+q)(p+r)} \text{ i}$$

$$z - x = \frac{p(p+q)}{(p+r)} - \left(\frac{pr}{p+r} + \frac{pq}{p+q}\right) = \frac{pq(q-r)}{(p+q)(p+r)}.$$

Sada je drugi uslov ekvivalentan sa: $\dfrac{pq(q-r)}{(p+q)(p+r)} = \dfrac{pr(r-q)}{(p+q)(p+r)}\ e^{i\pi/3}$, tj. sa

$$q = -r\ e^{i\pi/3}.$$

Preostaje još da dokažemo ekvivalenciju:

$$r = q\ e^{i2\pi/3} \iff q = -r\ e^{i\pi/3},$$

koja očigledno važi.

31. Po T1.1 dovoljno je dokazati da je

$$\frac{m-o}{\overline{m}-\overline{o}} = \frac{n-o}{\overline{n}-\overline{o}}.$$

Ukoliko su p, q, r, s tačke dodira upisanog kruga sa stranicama ab, bc, cd, da, redom, tada je po T2.3

$$m = \frac{a+c}{2} = \frac{ps}{p+s} + \frac{qr}{q+r} = \frac{pqs + prs + pqr + qrs}{(p+s)(q+r)},$$

odnosno konjugovanjem $\overline{m} = \dfrac{p+q+r+s}{(p+s)(q+r)}$ i samim tim

$$\frac{m}{\overline{m}} = \frac{pqr + ps + prs + qrs}{p+q+r+s}.$$

Kako je poslednji izraz simetričan po p, q, r, s, to je $\dfrac{m}{\overline{m}} = \dfrac{n}{\overline{n}}$, kao što je i traženo.

32. Neke je krug upisan u četvorougao $abcd$ jedinični. Dokazćemo da se presek pravih mp i nq nalazi na pravoj bd. Tada simetrično zaključujemo i da je ta tačka na pravoj ac, pa će samim tim prave mp, nq, ac i bd biti konkurentne. Prema T2.3 imamo da je

$$b = \frac{2mn}{m+n}, \quad d = \frac{2pq}{p+q}.$$

Ako je x tačka preseka pravih mp i nq, tada je prema T2.5

$$x = \frac{mp(n+q) - nq(m+p)}{mp - nq}.$$

Potrebno je dokazati da su tačke x, b, d kolinearne, što je prema T1.2 ekvivalentno sa

$$\frac{b-d}{\overline{b}-\overline{d}} = \frac{b-x}{\overline{b}-\overline{x}}.$$

Ovo sledi iz $b-d=\dfrac{2mn}{m+n}-\dfrac{2pq}{p+q}=2\dfrac{mn(p+q)-pq(m+n)}{(m+n)(p+q)}$ i

$$b-x=\frac{2mn}{m+n}-\frac{mp(n+q)-nq(m+p)}{mp-nq}=\frac{m^2np-mn^2q-m^2pq+n^2pq+m^2nq-mn^2p}{(mp-nq)(m+n)}=\frac{(m-n)(mn(p+q)-pq(m+n))}{(m+n)(mp-nq)},$$

konjugovanjem.

33. Neka je krug upisani u trougao abc jedinični. Po T7.3 imamo da je centar opisanog kruga trougla

$$o=\frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)}.$$

Odredimo i koordinatu centra opisanog kruga o_1 trougla xyz. Prvo, po T6.1 imamo da je $x=\dfrac{e+f}{2}, y=\dfrac{d+f}{2}$ i $z=\dfrac{d+e}{2}$.

Dalje, po T1.3 imamo da je $\dfrac{o_1-\dfrac{x+y}{2}}{\overline{o_1}-\dfrac{\overline{x+y}}{2}}=-\dfrac{x-y}{\overline{x}-\overline{y}}=\dfrac{(e-d)/2}{(\overline{e}-\overline{d})/2}=-ed$, odnosno sređivanjem

$$\overline{o_1}=\frac{-\dfrac{f}{2}+\dfrac{ed}{2f}+o_1}{ed},$$

i slično $\overline{o_1}=\dfrac{-\dfrac{d}{2}+\dfrac{ef}{2d}+o_1}{ef}$. Izjednačavanjem dobijamo $o_1=\dfrac{e+f+d}{2}$. Sada je po T1.2 dovoljno dokazati da je $\dfrac{o_1-i}{\overline{o_1}-\overline{i}}=\dfrac{o-i}{\overline{o}-\overline{i}}$, što se dobijamo jednostavnim konjugovanjem prethodno dobijenih izraza za o i o_1.

34. Neka je upisani krug trougla abc jedinični. Po T7.1 imamo da je $b=\dfrac{2fd}{f+d}$ i $c=\dfrac{2ed}{e+d}$. Iz elementarne geometrije lako je zaključiti da je k središte duži ef, pa je po T6.1 i $k=\dfrac{e+f}{2}$. Odredimo koordinatu tačke m. Kako je m na tetivi fd, to je po T2.2 $\overline{m}=\dfrac{f+d-m}{fd}$. Takođe imamo i da su tačke b,m,k kolinearne pa je prema T1.2 $\dfrac{k-m}{\overline{k}-\overline{m}}=\dfrac{b-k}{\overline{b}-\overline{k}}$, tj. $\overline{m}=m\dfrac{\overline{b}-\overline{k}}{b-k}+\dfrac{\overline{k}b-k\overline{b}}{b-k}$. Sada se izjednačavanjem izraza za $\overline{m}$ dobija

$$m=\frac{(f+d)(b-k)+(k\overline{b}-\overline{k}b)fd}{(\overline{b}-\overline{k})fd+b-k}.$$

Kako je $b-k=\dfrac{3fd-de-f^2-ef}{2(f+d)}$ i $k\overline{b}-\overline{k}b=\dfrac{(e+f)(e-d)fd}{e(f+d)}$ dobijamo

$$m=\frac{4ef^2d+efd^2-e^2d^2-e^2f^2-2f^2d^2-f^3e}{6efd-e^2d-ed^2-ef^2-e^2f-d^2f-df^2}$$

i simetrično

$$n=\frac{4e^2fd+efd^2-f^2d^2-e^2f^2-2e^2d^2-e^3f}{6efd-e^2d-ed^2-ef^2-e^2f-d^2f-df^2}.$$

Po T1.3 u zadatku je dovoljno dokazati da je $\dfrac{m-n}{\overline{m}-\overline{n}}=-\dfrac{i-d}{\overline{i}-\overline{d}}=-d^2$. Ovo sledi iz

$$m-n=\frac{(e-f)(4efd-ed^2-fd^2-fe^2-f^2e)}{6efd-e^2d-ed^2-ef^2-e^2f-d^2f-df^2},$$

prostim konjugovanjem.

35. Neka je krug upisan u trougao abc jedinični i neka dodiruje stranice bc, ca, ab u tačkama k,l,m, redom. Po T7 imamo da je

$$o=\frac{2klm(k+l+m)}{(k+l)(l+m)(m+k)},\quad h=\frac{2(k^2l^2+l^2m^2+m^2k^2+klm(k+l+m))}{(k+l)(l+m)(m+k)}.$$

Kako su odsečci io i bc paralelni, to je $io \perp ik$, što je po T1.3 ekvivalentno sa $\dfrac{o-i}{\overline{o}-\overline{i}} = -\dfrac{k-i}{\overline{k}-\overline{i}} = -k^2$. Poslednje se konjugovanjem već napisane vrednosti za o svodi na

$$klm(k+l+m)+k^2(kl+lm+mk)=0. \quad (*)$$

Dokažimo da je uz ovaj uslov i $ao \parallel hk$. Po T1.1 dovoljno je dokazati da je $\dfrac{a-o}{\overline{a}-\overline{o}} = \dfrac{h-k}{\overline{h}-\overline{k}}$. Prema T7.1 imamo $a = \dfrac{2ml}{m+l}$, pa je

$$a-o = \frac{2ml}{m+l} - \frac{2klm(k+l+m)}{(k+l)(l+m)(m+k)} = \frac{2m^2l^2}{(k+l)(l+m)(m+k)}.$$

Sada konjugovanjem dobijamo da je dovoljno dokazati da je

$$\frac{h-k}{\overline{h}-\overline{k}} = \frac{l^2m^2}{k^2}.$$

Primetimo da je

$$h-k = \frac{2(k^2l^2+l^2m^2+m^2k^2+klm(k+l+m))}{(k+l)(l+m)(m+k)} - k = \frac{k^2l^2+k^2m^2+2l^2m^2+k^2lm+kl^2m+klm^2-k^2l-k^3m-k^2lm}{(k+l)(l+m)(m+k)} =$$

$$= \frac{klm(k+l+m)-k^2(k+l+m)+k^2l^2+2l^2m^2+m^2l^2}{(k+l)(l+m)(m+k)} = \Big(\text{prema } (*)\Big) = \frac{(kl+lm+mk)^2+l^2m^2}{(k+l)(l+m)(m+k)} = \Big(\text{prema } (*)\Big) =$$

$$= \frac{(kl+lm+mk)^2((k+l+m)^2+k^2)}{(k+l+m)^2(k+l)(l+m)(m+k)}.$$

Konjugovanjem pretposlednjeg izraza za $h-k$

$$\overline{h}-\overline{k} = \frac{(k+l+m)^2+k^2}{(k+l)(l+m)(m+k)},$$

i korišćenjem poslednjeg izraza za $h-k$ dobijamo

$$\frac{h-k}{\overline{h}-\overline{k}} = \frac{(kl+lm+mk)^2}{(k+l+m)^2} = \Big(\text{prema } (*)\Big) = \frac{l^2m^2}{k^2},$$

što završava naš dokaz.

36. Neka je krug upisan u trougao abc jedinični. Tada je prema T7.1 $c = \dfrac{2t_1t_2}{t_1+t_2}$. Odredimo tačku h_3. Prvo iz $h_3t_3 \perp it_3$, po T1.3 imamo

$$\frac{h_3-t_3}{\overline{h_3}-\overline{t_3}} = -\frac{t_3-i}{\overline{t_3}-\overline{i}} = -t_3^2,$$

tj. $\overline{h_3} = \dfrac{2t_3-h_3}{t_3^2}$. Dalje iz $ch_3 \parallel it_3$ i T1.1 imamo da je $\dfrac{h_3-c}{\overline{h_3}-\overline{c}} = \dfrac{t_3-i}{\overline{t_3}-\overline{i}} = t_3^2$. Izjednačavanjem izraza za $\overline{h_3}$ dobijamo

$$h_3 = \frac{1}{2}\Big(2t_3+c-\overline{c}\,t_3^2\Big) = t_3 + \frac{t_1t_2-t_3^2}{t_1+t_2}.$$

Simetrično dobijamo $h_2 = t_2 + \dfrac{t_1t_3-t_2^2}{t_1+t_3}$. Da bismo odredili pravu simetričnu pravoj h_2h_3 u odnosu na t_2t_3, dovoljno je odrediti tačke simetrične tačkama h_2 i h_3 u odnosu na pravu t_2t_3. Neka su to tačke p_2 i p_3 i neka su h_2' i h_3' podnožja normala iz tačaka h_2 i h_3 na pravu t_2t_3, redom. Po T2.4 imamo da je $h_2' = \dfrac{1}{2}\Big(t_2+t_3-t_2t_3\overline{h_3}\Big)$, pa je po T6.1

$$p_2 = 2h_2'-h_2 = \frac{t_1(t_2^2+t_3^2)}{t_2(t_1+t_3)}$$

i simetrično $p_3 = \dfrac{t_1(t_2^2+t_3^2)}{t_3(t_1+t_2)}$. Dalje je $p_2-p_3 = \dfrac{t_1^2(t_2^2+t_3^2)(t_3-t_2)}{t_1t_3(t_1+t_2)(t_1+t_3)}$, pa ukoliko se tačka x nalazi na pravoj p_2p_3, po T1.2 mora važiti

$$\frac{x-p_2}{\overline{x}-\overline{p_2}} = \frac{p_2-p_3}{\overline{p_2}-\overline{p_3}} = -t_1^2.$$

Specijalno ukoliko je x na jediničnom krugu imamo i $\overline{x} = \dfrac{1}{x}$, pa sređivanjem dobijamo kvadratnu jednačinu

$$t_2t_3x^2 - t_1(t_2^2 + t_3^2)x + t_1^2t_2t_3 = 0.$$

Njena rešenja su $x_1 = \dfrac{t_1t_2}{t_3}$ i $x_2 = \dfrac{t_1t_3}{t_2}$ i ovo su upravo presečne tačke prave p_2p_3 sa jediničnim krugom. Slično dobijamo i $y_1 = \dfrac{t_1t_2}{t_3}$, $y_2 = \dfrac{t_2t_3}{t_1}$ i $z_1 = \dfrac{t_3t_1}{t_2}, z_2 = \dfrac{t_2t_3}{t_1}$, što završava naš dokaz.

37. Neka je opisani krug trougla abc jedinični. Neka su u, v, w kompleksni brojevi opisani u T8. Po istoj teoremi imamo da je $l = -(uv + vw + wu)$. Iz elementarne geometrije znamo da je presek prave al i kruga opisanog oko trougla abc središte luka bc koji ne sadrži tačku a. Znači $a_1 = -vw$ i slično $b_1 = -uw$ i $c_1 = -uv$.

(a) Tvrđenje ovog dela zadatka sledi na osnovu jednakosti

$$1 = \frac{|l - a_1| \cdot |l - c_1|}{|l - b|} = \frac{|u(v + w)| \cdot |w(u + v)|}{|uv + uw + vw + v^2|} = \frac{|v + w| \cdot |u + v|}{|(u + v)(v + w)|} = 1.$$

(b) Ako je x tačka dodira upisanog kruga i stranice bc, to je x i podnožje normale iz tačke l na stranicu bc, pa je po T2.4 $x = \dfrac{1}{2}\Big(b + c + l - bc\bar{l}\Big)$ i samim tim $r = |l - x| = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{(u + v)(v + w)(w + u)}{u}\right| = \dfrac{1}{2}|(u + v)(v + w)(w + u)|$. Sada tražena jednakost sledi na osnovu

$$\frac{|l - a| \cdot |l - b|}{|l - c_1|} = \frac{|(u + v)(u + w)| \cdot |(u + v)(v + w)|}{|w(u + v)|} = |(u + v)(v + w)(w + u)|.$$

(c) Po T5 imamo da je

$$S(ABC) = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} u^2 & 1/u^2 & 1 \\ v^2 & 1/v^2 & 1 \\ w^2 & 1/w^2 & 1 \end{vmatrix} \text{ i } S(A_1B_1C_1) = \frac{i}{4uvw}\begin{vmatrix} vw & u & 1 \\ uw & v & 1 \\ uv & w & 1 \end{vmatrix},$$

pa je

$$\frac{S(ABC)}{S(A_1B_1C_1)} = \frac{u^4w^2 + w^4v^2 + v^4u^2 - v^4w^2 - u^4v^2 - w^4u^2}{uvw(v^2w + uw^2 + u^2v - uv^2 - u^2w - vw^2)} = \frac{(u^2 - v^2)(uw + vw - uv - w^2)(uw + vw + uv + w^2)}{uvw(u - v)(uv + w^2 - uw - vw)} =$$

$$= -\frac{(u + w)(vw + uw + uv + w^2)}{uvw} = -\frac{(u + v)(v + w)(w + u)}{uvw}.$$

Treba napomenuti da su ovde u pitanju orijentisane površine, pa se uzimanjem modula iz poslednjeg izraza dobija tražena jednakost.

38. Prvi način. Neka je krug opisani oko trougla abc jedinični i u, v, w kompleksni brojevi opisani u T8. Neka su d, e, f tačke dodira upisanog kruga sa stranicama bc, ca, ab, redom. Po T2.4 imamo da je $f = \dfrac{1}{2}\Big(a + b + z - ab\bar{z}\Big) = \dfrac{1}{2}\Big(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu + \dfrac{uv(u + v)}{2w}\Big)$. Simetrično dobijamo i izraze za e i f, pa je po T6.1

$$k = \frac{1}{3}\Big(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu + \frac{uv(u + v)}{2w} + \frac{vw(v + w)}{2u} - \frac{wu(w + u)}{2v}\Big) =$$

$$= \frac{(uv + vw + wu)(u^2v + uv^2 + uw^2 + u^2w + v^2w + vw^2 - 4uvw)}{6uvw}.$$

Sada se lako proverava $\dfrac{z - o}{\bar{z} - \bar{o}} = \dfrac{k - o}{\bar{k} - \bar{o}}$, što je po T1.2 uslov kolinearnosti tačaka z, k, o. Takođe je i

$$\frac{|o - z|}{|z - k|} = \frac{|uv + vw + wu|}{\left|\dfrac{(uv + vw + wu)(u^2v + uv^2 + uw^2 + u^2w + v^2w + vw^2 + 2uvw)}{6uvw}\right|} = \frac{6}{|(u + v)(v + w)(w + u)|} = \frac{6R}{2r} = \frac{3R}{r},$$

što završava naš dokaz.

Drugi način. Neka je krug upisan u trougao abc jedinični i neka su d, e, f njegovi dodiri sa stranicama bc, ca, ab, redom. Po T7.3 imamo da je $o = \dfrac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)}$, a po T6.1 $k = \dfrac{d+e+f}{3}$, pa se lako proverava da je $\dfrac{o-z}{\overline{o}-\overline{z}} = \dfrac{k-z}{\overline{k}-\overline{z}}$, što je po T1.2 dovoljno da su tačke o, z, k kolinearne. Takođe imamo i da je

$$\frac{|o-z|}{|z-k|} = \frac{\left|\dfrac{d+e+f}{(d+e)(e+f)(f+d)}\right|}{\left|\dfrac{d+e+f}{3}\right|} = \frac{3}{|(d+e)(e+f)(f+d)|} = \frac{3R}{r}.$$

39. Neka je opisani krug trougla abp jedinični i neka su u, v, w kompleksni brojevi opisani u T8 (pri čemu je ovde $p = w^2$). Prema istoj teoremi je $i = -uv - vw - wu$. Kako je $|a-c| = |a-b|$, to je prema T1.4

$$c - a = e^{i\angle cab}(b-a).$$

Dalje, po istoj teoremi imamo da je

$$\frac{-vw-u^2}{\overline{-vw}-\overline{u^2}} = e^{i2\frac{\angle pab}{2}}\frac{v^2-u^2}{\overline{v^2}-\overline{u^2}},$$

pa je $e^{i\angle pab} = -\dfrac{w}{v}$. Sada je i

$$c = \frac{u^2w + u^2v - v^2w}{v},$$

i simetrično $d = \dfrac{v^2w + v^2u - u^2w}{u}$. Po T1.3 dovoljno je dokazati da je

$$\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}} = -\frac{o-i}{\overline{o}-\overline{i}} = -\frac{uv+vw+wu}{u+v+w}uvw.$$

Ovo pak sledi iz $c - d = \dfrac{(u^2-v^2)(uv+vw+wu)}{uv}$ konjugovanjem.

40. Neka je krug opisan oko trougla abc jedinični. Prema T8 postoje brojevi u, v, w takvi da je $a = u^2, b = v^2, c = w^2$ i centar upisanog kruga $i = -(uv + vw + wu)$. Ako je o' podnožje normale iz o na bc, tada je prema T2.4 $o' = \dfrac{1}{2}\Big(b+c\Big)$, pa je prema T6.1 $o_1 = 2o' = b + c = v^2 + w^2$. Dalje, prema T1.2 tačke a, i, o_1 su kolinearne ako i samo ako je

$$\frac{o_1-a}{\overline{o_1}-\overline{a}} = \frac{a-i}{\overline{a}-\overline{i}}.$$

Kako je $\dfrac{o_1-a}{\overline{o_1}-\overline{a}} = \dfrac{o_1-a}{\overline{o_1}-\overline{a}} = \dfrac{v^2+w^2-u^2}{u^2(v^2+w^2)-v^2w^2}u^2v^2w^2$ i $\dfrac{a-i}{\overline{a}-\overline{i}} = \dfrac{u(u+v+w)+vw}{vw+uw+uv+u^2}u^2vw = u^2vw$, to se poslednji uslov svodi na

$$v^3w + vw^3 - u^2vw - (u^2v^2 + u^2w^2 - v^2w^2) = (vw-u^2)(v^2+w^2+vw) = 0.$$

Znači ili je $vw = u^2$ ili $v^2 + w^2 + vw = 0$. Ako je $vw = u^2$, tada su po T6.1 tačke u^2 i $-vw$ na istom prečniku, pa je abc jednakokraki, što je suprotno pretpostavci zadatka. Znači mora biti $v^2 + w^2 + vw = 0$. Dokažimo da je tada trougao sa temenima $o, -vw, w^2$ jednakostraničan. Dovoljno je dokazati da je $1 = |w^2 + vw| = |v + w|$, što je kvadriranjem ekvivalentno sa $1 = (v+w)(\overline{v}+\overline{w}) = \dfrac{(v+w)^2}{vw}$, a ovo sa $v^2 + w^2 + vw = 0$. Kako je sada $\angle boc = 120^o$, to je $\alpha = 60^o$.

41. Neka je krug upisan u trougao abc jedinični. Po T8 postoje kompleksni brojevi u, v, w, takvi da je $p = u^2, q = v^2, r = w^2$ i $p_1 = -vw, q_1 = -wu, r_1 = -uv$. Tada je $p_2 = vw, q_2 = wu, r_2 = uv$. Po T7.1 je

$$a = \frac{2v^2w^2}{v^2+w^2},\ b = \frac{2w^2u^2}{w^2+u^2} \text{ i } c = \frac{2u^2w^2}{u^2+w^2},$$

pa je po T6.1

$$a_1 = \frac{w^2u^2}{w^2+u^2} + \frac{u^2v^2}{u^2+v^2},\ b_1 = \frac{u^2v^2}{u^2+v^2} + \frac{v^2w^2}{v^2+w^2},\ c_2 = \frac{v^2w^2}{v^2+w^2} + \frac{w^2u^2}{w^2+u^2}.$$

Ukoliko je tačka n presek pravih a_1p_1 i b_1q_1, tada su trojke tačaka n, a_1, p_1 i n, b_1, q_1 kolinearne i prema T1.2 imamo

$$\frac{n-a_1}{\overline{n}-\overline{a_1}} = \frac{a_1-p_1}{\overline{a_1}-\overline{p_1}},\quad \frac{n-b_1}{\overline{n}-\overline{b_1}} = \frac{b_1-q_1}{\overline{b_1}-\overline{q_1}}.$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo

$$n=\frac{u^4v^4+v^4w^4+w^4u^4+uvw(u^3v^2+u^2v^3+u^3w^2+u^2w^3+v^3w^2+v^2w^3)+3u^2v^2w^2(u^2+v^2+w^2)}{(u^2+v^2)(v^2+w^2)(w^2+u^2)}+$$

$$+\frac{2u^2v^2w^2(uv+vw+wu)}{(u^2+v^2)(v^2+w^2)(w^2+u^2)}.$$

Kako je ovaj izraz simetričan, to se ova tačka nalazi i na pravoj c_1r_1. Drugi deo zadatka se slično dokazuje.

42. Neka je tačka a koordinatni početak, tj. $a=0$. Po T1.4 imamo da je $c''-a=e^{i\pi/2}(c-a)$, tj. $c''=ic$. Slično je i $b''=-ib$. Po istoj teoremi imamo da je $x-c=e^{i\pi/2}(b-c)$, tj. $x=(1-i)c+ib$, pa je po T6.1 $p=\frac{1+i}{2}b+\frac{1-i}{2}c$. Neka je tačka q presek pravih bc i ap. Tada su tačke a,p,q, odnosno tačke b,c'',q kolinearne, pa je prema T1.2 i

$$\frac{a-p}{\overline{a}-\overline{p}}=\frac{a-q}{\overline{a}-\overline{q}},\quad \frac{b-c''}{\overline{b}-\overline{c''}}=\frac{q-b}{\overline{q}-\overline{b}}.$$

Iz prve jednačine dobijamo $\overline{q}=q\frac{(1-i)\overline{b}+(1+i)\overline{c}}{(1+i)b+(1-i)c}$, a iz druge $\overline{q}=\frac{q(\overline{b}+i\overline{c})-i(\overline{b}c+b\overline{c})}{b-ic}$. Izjednačavanjem dobijamo

$$q=\frac{i(\overline{b}c+b\overline{c})((1+i)b+(1-i)c)}{2(ib\overline{b}-2b\overline{c}+2\overline{b}c+2ic\overline{c})}=\frac{(\overline{b}c+b\overline{c})((1+i)b+(1-i)c)}{(b-ic)(\overline{b}+i\overline{c})}.$$

Neka je tačka q' presek pravih ap i cb''. Tada su tačke a,p,q', odnosno tačke b'',c,q' kolinearne, pa je prema T1.2 i

$$\frac{a-p}{\overline{a}-\overline{p}}=\frac{a-q'}{\overline{a}-\overline{q'}},\quad \frac{b''-c}{\overline{b''}-\overline{c}}=\frac{q-c}{\overline{q}-\overline{c}}.$$

Iz prve jednačine dobijamo $\overline{q'}=q'\frac{(1-i)\overline{b}+(1+i)\overline{c}}{(1+i)b+(1-i)c}$, a iz druge $\overline{q}=\frac{q(\overline{c}-i\overline{b})+i(\overline{b}c+b\overline{c})}{c+ib}$. Izjednačavanjem dobijamo

$$q'=\frac{(\overline{b}c+b\overline{c})((1+i)b+(1-i)c)}{(b-ic)(\overline{b}+i\overline{c})},$$

pa je $q=q'$, što završava naš dokaz.

43. Uzmimo da je presek dijagonala koordinatni početak, tj. $o=0$. Iz kolinearnosti tačaka a,o,c i b,o,d po T1.2 imamo redom $a\overline{c}=\overline{a}c$ i $b\overline{d}=\overline{b}d$. Po T6.1 je $m=\frac{a+b}{2}$ i $n=\frac{c+d}{2}$. Kako je $om\perp cd$ i $on\perp ab$ to je po T1.3

$$\frac{\frac{c+d}{2}-o}{\overline{\frac{c+d}{2}}-\overline{o}}=-\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}},\quad \frac{\frac{a+b}{2}-o}{\overline{\frac{a+b}{2}}-\overline{o}}=-\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}.$$

Iz prve, odnosno druge, dobijamo

$$c=\frac{da(\overline{a}b-2b\overline{b}+a\overline{b})}{b(\overline{a}b-2a\overline{a}+a\overline{b})}\ \text{ i } c=\frac{da(\overline{a}b+2b\overline{b}+a\overline{b})}{b(\overline{a}b+2a\overline{a}+a\overline{b})}.$$

Poslednje dve jednačine nam daju $(\overline{a}b+a\overline{b})(a\overline{a}-b\overline{b})=0$. Potrebno da dokazati da je poslednji uslov dovoljan da bi tačke a,b,c,d ležale na jednom krugu. Po T3 poslednje je ekvivalentno sa

$$\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}\frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}}=\frac{b-d}{\overline{b}-\overline{d}}\frac{c-a}{\overline{c}-\overline{a}}.$$

Kako su tačke b,d,o kolinearne, to je prema T1.2 $\frac{b-d}{\overline{b}-\overline{d}}=\frac{b-o}{\overline{b}-\overline{o}}=\frac{b}{\overline{b}}$ i slično $\frac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}}=\frac{a-o}{\overline{a}-\overline{o}}=\frac{a}{\overline{a}}$. Ukoliko je $a\overline{b}+\overline{a}b=0$, tada je

$$c-d=d\frac{2ab(\overline{a}-\overline{b})}{b(\overline{a}b-2a\overline{a}+a\overline{b})},$$

pa se traženo dobija konjugovanjem. Ukoliko je $a\overline{a}=b\overline{b}$, tada je

$$c-d=\frac{d(a-b)(\overline{a}b+a\overline{b})}{b(\overline{a}b-2a\overline{a}+a\overline{b})},$$

pa se i u ovom slučaju traženo dobija prostim konjugovanjem.

44. Neka je tačka f koordinatni početak i neka je $d=\overline{c}$ (ovo je moguće, jer je $FC=FD$). Po T9.2 imamo da je

$$o_1=\frac{ad(\overline{a}-\overline{d})}{\overline{a}\,d-a\overline{d}},\quad o_2=\frac{bc(\overline{b}-\overline{c})}{\overline{b}\,c-b\overline{c}}.$$

Kako je $cd\parallel af$, to je prema T1.1 $\dfrac{a-f}{\overline{a}-\overline{f}}=\dfrac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}=-1$, tj. $\overline{a}=-a$ i slično $\overline{b}=-b$. Sada je i

$$o_1=\frac{\overline{c}\,(a+c)}{c+\overline{c}},\quad o_2=\frac{c(b+\overline{c})}{c+\overline{c}}.$$

Odredimo i tačku e. Iz T1.2 s obzirom na kolinearnost tačaka a,c,e i b,d,e dobijamo sledeće dve jednačine

$$\frac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}}=\frac{e-a}{\overline{e}-\overline{a}},\quad \frac{b-d}{\overline{b}-\overline{d}}=\frac{e-b}{\overline{e}-\overline{b}}.$$

Iz prve dobijamo $\overline{e}=\dfrac{a(c+\overline{c})-e(a+\overline{c})}{a-c}$, a iz druge $\overline{e}=\dfrac{b(c+\overline{c})-e(b+c)}{b-\overline{c}}$. Izjednačavanjem je

$$e=\frac{a\overline{c}-bc}{a+\overline{c}-b-c}.$$

Po teoremi T1.3 uslov $fe\perp o_1o_2$ je ekvivalentan sa $\dfrac{o_1-o_2}{\overline{o_1}-\overline{o_2}}=-\dfrac{f-e}{\overline{f}-\overline{e}}$, što trivijalno sledi iz $o_1-o_2=\dfrac{a\overline{c}-cb}{c+\overline{c}}$ konjugovanjem.

45. Neka je tačka p koordinatni početak, tj. $p=0$. Neka je ac realna osa i neka je $\angle cpd=\varphi$. Tada je $a=\alpha, b=\beta e^{i\varphi}, c=\gamma, d=\delta e^{i\varphi}$, gde su $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ neki realni brojevi. Neka je i $e^{i\varphi}=\Pi$. Ako je $|a-f|=\varepsilon|a-d|$, tada je i $|e-c|=\varepsilon|b-c|$, pa je po T6.1 $a-f=\varepsilon(a-d)$ i $e-c=\varepsilon(b-c)$. Znači imamo da je

$$f=\alpha(1-\varepsilon)+\varepsilon\delta\Pi,\ e=\gamma(1-\varepsilon)+\varepsilon\beta\Pi.$$

Dalje kako je q na pravoj pd, to je $q=\varrho\Pi$, a kako je q i na pravoj ef, to je po T1.2 i $\dfrac{f-q}{\overline{f}-\overline{q}}=\dfrac{e-f}{\overline{e}-\overline{f}}$, pa je i

$$\frac{\alpha(1-\varepsilon)+(\varepsilon\delta-\varrho)\Pi}{\alpha(1-\varepsilon)+(\varepsilon\delta-\varrho)\dfrac{1}{\Pi}}=\frac{(1-\varepsilon)(\alpha-\gamma)+\varepsilon(\delta-\beta)\Pi}{(1-\varepsilon)(\alpha-\gamma)+\varepsilon(\delta-\beta)\dfrac{1}{\Pi}}.$$

Sredjivanjem dobijamo da je $(\Pi-\dfrac{1}{\Pi})(1-\varepsilon)\Big[(\alpha-\gamma)(\varepsilon\delta-\varrho)-\varepsilon\alpha(\delta-\beta)\Big]=0$. Kako $\Pi\neq\pm1$ (jer je $\angle CPD<180^o$) i $\varepsilon\neq1$ to je $\varrho=\varepsilon\Big[\delta-\dfrac{\alpha(\delta-\beta)}{\alpha-\gamma}\Big]$. Slično dobijamo da je i $\rho=(1-\varepsilon)\Big[\alpha-\dfrac{\delta(\alpha-\gamma)}{\delta-\beta}\Big]$, gde je ρ koordinata tačke r. Prema T9.2 imamo

$$o_1=\frac{rq(\overline{r}-\overline{q})}{\overline{r}\,q-\overline{q}}=\frac{\rho\varrho\Pi(\rho-\varrho\dfrac{1}{\Pi})}{\rho\varrho\Pi-\rho\varrho\dfrac{1}{\Pi}}=\frac{\rho\Pi-\varrho}{\Pi^2-1}\Pi=\frac{(1-\varepsilon)\Big[\alpha-\dfrac{\delta(\alpha-\gamma)}{\delta-\beta}\Big]\Pi-\varepsilon\Big[\delta-\dfrac{\alpha(\delta-\beta)}{\alpha-\gamma}\Big]}{\Pi^2-1}\Pi.$$

Dalje, za bilo koji drugi položaj tačke e na pravoj ad, takav da je $ae=\epsilon ad$, odgovarajuc1i centar kruga ima koordinatu

$$o_2=\frac{(1-\epsilon)\Big[\alpha-\dfrac{\delta(\alpha-\gamma)}{\delta-\beta}\Big]\Pi-\epsilon\Big[\delta-\dfrac{\alpha(\delta-\beta)}{\alpha-\gamma}\Big]}{\Pi^2-1}\Pi.$$

Primetimo da pravac prave o_1o_2 ne zavisi od ε i ϵ. Naime, ako uvedemo oznake $A=\alpha-\dfrac{\delta(\alpha-\gamma)}{\delta-\beta}$ i $B=\delta-\dfrac{\alpha(\delta-\beta)}{\alpha-\gamma}$ važi

$$\frac{o_1-o_2}{\overline{o_1}-\overline{o_2}}=-\frac{A\Pi+B}{A+B\Pi}\Pi.$$

Samim tim za svaka tri centra o_1,o_2,o_3 važi da je o_1o_2 paralelno sa o_2o_3, pa su samim tim svi centri kolinearni. Sada kako su svi centri kolinearni i kako svi krugovi imaju zajedničku tačku, tada svi krugovi imaju jošjednu zajedničku tačku.
Napomena. Ovde je dokazano i više nego što je traženo. Naime, dva uslova $AD=BC$ i $BE=DF$, zamenjena su uslovom

$BE/BC = DF/AD$.
Druga prednost ovog rešenje je to što nije bilo potrebno pretpostaviti koja je druga presečna tačka i onda dokazivati da se ona nalazi na svim krugovima.

46. Neka je tačka o koordinatni početak. Po T9.1 imamo da je $h_1 = \frac{(a-b)(\overline{a}\,b + a\overline{b}\,)}{a\overline{b}\, - \overline{a}\,b}$, $h_2 = \frac{(c-d)(\overline{c}\,d + c\overline{d}\,)}{c\overline{d}\, - \overline{c}\,d}$, a po teoremi 6 i $t_1 = \frac{a+c}{3}$, $t_2 = \frac{b+d}{3}$. Kako su tačke a, c i o kao i tačke b, d i o kolinearne, to je prema T1.2 $\overline{c} = \frac{c\overline{a}}{a}$, $\overline{d} = \frac{d\overline{b}}{b}$, pa je $h_2 = \frac{(c-d)(a\overline{b}\, + \overline{a}\,b)}{a\overline{b}\, - \overline{a}\,b}$. Da bismo dokazali da je $t_1t_2 \perp h_1h_2$, po T1.3, dovoljno je proveriti da je

$$\frac{t_1 - t_2}{\overline{t_1} - \overline{t_2}} = -\frac{h_1 - h_2}{\overline{h_1} - \overline{h_2}}.$$

Ovo sledi iz

$$h_1 - h_2 = \frac{a\overline{b}\, + \overline{a}\,b}{a\overline{b}\, - \overline{a}\,b}\Big(a + c - b - d\Big),$$

prostim konjugovanjem.

47. Neka je Γ jedinični krug. Po T2.3 imamo da je $c = \frac{2ab}{a+b}$. Neka je o_1 centar kruga Γ_1. Tada je $o_1b \perp ab$ (jer je ab tangenta), pa je prema T1.3 $\frac{o_1 - b}{\overline{o_1} - \overline{b}} = -\frac{a-b}{\overline{a} - \overline{b}} = ab$, tj. sređivanjem $\overline{o_1} = \frac{o_1 + a - b}{ab}$. Takođe je i $|o_1 - b| = |o_1 - c|$, pa je kvadriranjem $(o_1 - b)(\overline{o_1} - \overline{b}\,) = (o_1 - c)(\overline{o_1} - \overline{c}\,)$, tj. $\overline{o_1} = \frac{o_1}{b^2} - \frac{a-b}{b(a+b)}$. Sada je

$$o_1 = \frac{ab}{a+b} + b.$$

Kako je tačka m na jediničnom krugu, to je $\overline{m} = \frac{1}{m}$, a kako je na krugu sa centrom u o_1 i $|o_1 - m| = |o_1 - b|$. Sada je

$$\overline{o_1}\,m^2 - \Big(\frac{o_1}{b} + \overline{o_1}\,b\Big)m + o_1 = 0.$$

Ovom kvadratnom jednačinom je definisano kako m tako i tačka b, pa je prema Vietovim formulama $b + m = \frac{o_1}{\overline{o_1}\,b} + b$, tj.

$$m = b\,\frac{2a+b}{a+2b}.$$

Ostaje još da dokažemo da su tačke a, m i središte duži bc, što je prema T6.1 tačka $\frac{b+c}{2}$, kolinearne. Po T1.2 dovoljno je dokazati da je

$$\frac{a - \frac{b+c}{2}}{\overline{a} - \overline{\frac{b+c}{2}}} = \frac{a-m}{\overline{a} - \overline{m}} = -am,$$

što se lako proverava.

48. Neka je krug k jedinični i neka je $b = 1$. Tada je $a = -1$ i kako je $p \in k$, to je $\overline{p} = \frac{1}{p}$. Po T2.4 imamo da je $q = \frac{1}{2}\Big(p + \frac{1}{p}\Big)$, a po T6.1 da je $f = \frac{\Big(p + \frac{1}{p}\Big) - 1}{2} = \frac{(p-1)^2}{4p}$. Dalje, kako je c na krugu sa centrom u p i poluprečnikom jednakim $|p - q|$, to je $|p - q| = |p - c|$, odnosno kvadriranjem

$$(p - q)(\overline{p} - \overline{q}\,) = (p - c)(\overline{p} - \overline{c}\,).$$

Kako je $c \in k$, to je $\overline{c} = \frac{1}{c}$. Kako je $p - q = \frac{1}{2}\Big(p - \frac{1}{p}\Big)$, lako dobijamo

$$4pc^2 - (p^4 + 6p^2 + 1)c + 4p^3 = 0.$$

Primetimo da smo dobili kvadratnu jednačinu za c. Kako tačka d zadovoljava iste uslove koje smo koristili za pronalaženje tačke c, to je tačka d drugo rešenje ove kvadratne jednačine. Sada je iz Vietovih formula

$$c+d=\frac{p^4+6p^2+1}{4p^3}, \quad cd=p^2.$$

Kako je tačka g na tetivi cd, to je prema T2.2 $\overline{g}=\frac{c+d-g}{cd}=\frac{p^4+6p^2+1-4pg}{4p^3}$, a kako je $gf\perp cd$, to je prema T1.3 i $\frac{g-f}{\overline{g}-\overline{f}}=-\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}=cd=p^2$. Rešavanjem ovog sistema dobijamo

$$g=\frac{p^3+3p^2-p+1}{4p}.$$

Potreban i dovoljan uslov za kolinearnost tačaka a,p,g je prema T1.2 $\frac{a-g}{\overline{a}-\overline{g}}=\frac{a-p}{\overline{a}-\overline{p}}=p$. Ovo lako sledi iz $a-g=\frac{p^3+3p^3+3p+1}{4p}$ i konjugovanjem $\overline{a}-\overline{g}=\frac{1+3p+3p^2+p^3}{4p^2}$. Kako je e na tetivi cd to je prema T2.2 i $\overline{e}=\frac{c+d-g}{cd}=\frac{p^4+6p^2+1-4pe}{4p^3}$, a kako je $pe\perp ab$, to je prema T1.3 i $\frac{e-p}{\overline{e}-\overline{p}}=-\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=-1$, odnosno $\overline{e}=p+\frac{1}{p}-e$. Izjednačavanjem dobijamo $e=\frac{3p^2+1}{4p}$. Kako je $p-q=\frac{p^2-1}{2p}=2\frac{p^2-1}{4p}=2\big(e-q\big)$, to je $|e-p|=|e-q|$. Dalje, kako je $g-e=\frac{p^2-1}{4}$ iz $|p|=1$, to je i $|e-q|=|g-e|$, što završava naš dokaz.

49. Neka je krug nad prečnikom bc jedinični i neka je $b=-1$. Tada je po T6.1 $b+c=0$, tj. $c=1$, i koordinatni početak je središte duži bc. Kako je p na jediničnom krugu, to je $\overline{p}=\frac{1}{p}$, a kako je $pa\perp p0$, to je prema T1.3 $\frac{a-p}{\overline{a}-\overline{p}}=-\frac{p-0}{\overline{p}-\overline{0}}=-p^2$. Sada je sređivanjem

$$\overline{a}\,p^2-2p+a=0.$$

Kako je ovom kvadratnom jednačinom definisano kako p tako i q, to je prema Vietovim formulama

$$p+q=\frac{2}{\overline{a}}, \quad pq=\frac{a}{\overline{a}}.$$

Neka je tačka h' presek normale iz a na bc i prave pq. Kako je h' na tetivi pq, to je prema T2.2 $\overline{h'}=\frac{p+q-h'}{pq}=\frac{2-\overline{a}\,h}{a}$. Dalje, kako je $ah\perp bc$, to je prema T1.3 i $\frac{a-h}{\overline{a}-\overline{h}}=-\frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}}=-1$, tj. $\overline{h}=a+\overline{a}-h$. Sada se izjednačavanjem dobija

$$h=\frac{a\overline{a}+a^2-2}{a-\overline{a}}.$$

Da bismo dokaz završili dovoljno je dokazati da je $h'=h$, tj. da je $ch\perp ab$, što je prema T1.3 ekvivalentno sa $\frac{h-c}{\overline{h}-\overline{c}}=-\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}$. Poslednje jednostavno sledi iz $h-1=\frac{a\overline{a}+a^2-2-a+\overline{a}}{a-\overline{a}}=\frac{(a+1)(a+\overline{a}-2)}{a-\overline{a}}$ i $a-b=a+1$, prostim konjugovanjem.

50. Neka je presek dijagonala pravougaonika koordinatni početak i neka je prava ab paralelna realnoj osi. Tada je po T6.1 $c+a=0$ i $d+b=0$, i $c=\overline{b}$ i $d=\overline{a}$. Kako su tačka $p,a,0$ kolinearne, to je prema T1.2 i $\frac{p}{\overline{p}}=\frac{a}{\overline{a}}$, tj. $\overline{p}=-\frac{b}{a}p$. Neka je $\varphi=\angle dpb=\angle pbc$. Prema T1.4 je

$$\frac{c-p}{\overline{c}-\overline{p}}=e^{i2\varphi}\frac{b-p}{\overline{b}-\overline{p}}, \quad \frac{p-b}{\overline{p}-\overline{b}}=e^{i2\varphi}\frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}},$$

odnosno množenjem ovih jednakosti, i izražavanjem preko a i b

$$\frac{p+b}{bp+a^2}=\frac{a(p-b)^2}{(bp-a^2)^2}.$$

Zapisivanjem u obliku polinoma dobijamo

$$(b^2-ab)p^3+p^2(b^3-2a^2b-a^3+2ab^2)+p(a^4-2a^2b^2-ab^3+2a^3b)+a^4b-a^3b^2=$$

$$=(b-a)(bp^3+(a^2+3ab+b^2)p^2-ap(a^2+3ab+b^2)-a^3b)=0.$$

Primetimo da je jedna tačka p koja zadovoljava uslov jednakosti datih uglova i tačka a, pa je a i jedna nula datog polinoma. Znači p je nula i polinoma koji se dobija deljenjem prethodnog sa $p-a$, tj. $bp^2+(a^2+3ab+b^2)p+a^2b=0$. Odredimo sada i $|p-b|:|p-c|$. Iz prethodne jednačine je $bp^2+a^2b=-(a^2+3ab+b^2)$, pa je

$$\frac{PB^2}{PC^2}=\frac{(p-b)(\overline{p}-\overline{b})}{(p-c)(\overline{p}-\overline{c})}=\frac{bp^2-(a^2+b^2)p+a^2b}{bp^2+2abp+a^b}=\frac{-2(a^2+b^2+2ab)}{-(a^2+b^2+2ab)}=2,$$

tj. traženi odnos je $\sqrt{2}:1$.

51. Neka je prvo četvorougao $abcd$ tetivan i neka je njegov opisani krug jedinični. Ako je $\angle abd=\varphi$ i $\angle bda=\theta$ prema T1.4 kvadriranjem imamo

$$\frac{d-b}{\overline{d}-\overline{b}}=e^{i2\varphi}\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}},\quad \frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}}=e^{i2\varphi}\frac{p-b}{\overline{p}-\overline{b}},$$
$$\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}=e^{i2\theta}\frac{p-d}{\overline{p}-\overline{d}},\quad \frac{b-d}{\overline{b}-\overline{d}}=e^{i2\theta}\frac{a-d}{\overline{a}-\overline{d}}.$$

Iz prve od ovih jednakosti je $e^{i2\varphi}\dfrac{a}{d}$, a iz četvrte $e^{i2\theta}=\dfrac{b}{a}$. Sada iz druge dobijamo $\overline{p}=\dfrac{ac+bd-pd}{abc}$, a iz treće $\overline{p}=\dfrac{ac+bd-pb}{acd}$. Izjednačavanjem dobijamo

$$p=\frac{ac+bd}{b+d}.$$

Potrebno je dokazati da je $|a-p|^2=(a-p)(\overline{a}-\overline{p})=|c-p|^2=(c-p)(\overline{c}-\overline{p})$, što sledi iz

$$a-p=\frac{ab+ad-ac-bd}{b+d},\quad \overline{a}-\overline{p}=\frac{cd+bc-bd-ac}{ac(b+d)},\quad c-p=\frac{bc+cd-ac-bd}{b+d},\quad \overline{c}-\overline{p}=\frac{ad+ab-bd-ac}{ac(b+d)}.$$

Neka je sada $|a-p|=|c-p|$. Pretpostavimo da je krug opisani oko trougla abc jedinični. Tada kvadriranjem prethodne jednakosti dobijamo $a\overline{p}+\dfrac{p}{a}=c\overline{p}+\dfrac{p}{c}$, tj. $(a-c)(\overline{p}-\dfrac{p}{ac})=0$. Znači $\overline{p}=\dfrac{p}{ac}$. Neka je d na tetivi $d'c$ kruga. Tada je prema T2.2 $\overline{d}=\dfrac{c+d'-d}{cd'}$. Kako je po uslovu zadatka $\angle dba=\angle cbp=\varphi$ i $\angle adb=\angle pdc=\theta$, to je kvadriranjem u T1.4

$$\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=e^{i2\varphi}\frac{d-b}{\overline{d}-\overline{b}},\quad \frac{p-b}{\overline{p}-\overline{b}}=e^{i2\varphi}\frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}},\quad \frac{b-d}{\overline{b}-\overline{d}}=e^{i2\theta}\frac{a-d}{\overline{a}-\overline{d}},\quad \frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}=e^{i2\theta}\frac{p-d}{\overline{p}-\overline{d}}.$$

Množenjem prve dve jednakosti dobijamo

$$\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}\frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}}=ab^2c=\frac{p-b}{\overline{p}-\overline{b}}\frac{d-b}{\overline{d}-\overline{b}}.$$

Sređivanjem dobijamo

$$p=\frac{ac+bd-b(ac\overline{d}+b)}{d-b^2\overline{d}}=\frac{bdd'+acd'-abd'-abc+abd-b^2d'}{cd'd-b^2d'+b^2d-b^2c}.$$

Kako su tačke d,c,d' kolinearne, to je prema T1.2 $\dfrac{d-c}{\overline{d}-\overline{c}}=\dfrac{c-d'}{\overline{c}-\overline{d'}}=-cd'$, pa množenjem treće i četvrte jednakosti dobijamo

$$(-cd')(d-a)(\overline{d}-\overline{b})(\overline{d}-\overline{p})-(\overline{d}-\overline{a})(d-b)(d-p)=0.$$

Zamenom vrednosti za p dobijamo jedan polinom f po d. On je očigledno najviše četvrtog stepena, a posmatranjem koeficijenta uz d^4 levog i desnog sabirka dobijamo da je ovaj polinom najviše stepena 3. Jasno je da su dve njegove nule a i b. Dokažimo da je treća njegova nula d' i da samim tim mora biti $d=d'$. Kada je $d=d'$, tada je

$$p=\frac{bd'd+acd'-abc-b^2d'}{c(d'^2-b^2)}=\frac{ac+bd'}{b+d'},\quad d-p=\frac{d'^2-ac}{b+d'},\quad \overline{d}-\overline{p}=-bd'\frac{d'^2-ac}{ac(b+d')}\quad \frac{d-a}{\overline{d}-\overline{a}}=-d'a,\quad \frac{d-b}{\overline{d}-\overline{b}}=-d'b$$

čime je naša tvrdnja dokazana. Znači $d=d'$, pa je po izboru tačke d' četvorougao $abcd'$ tetivan.

52. Iz konciklićnosti četvorki tačaka a_1,b_2,a_2,b_1; a_2,b_3,a_3,b_2; a_3,b_4,a_4,b_3 i a_4,b_1,a_1,b_4, po T3 imamo da su

$$\frac{a_1-a_2}{b_2-a_2}:\frac{a_1-b_1}{b_2-b_1},\quad \frac{a_2-a_3}{b_3-a_3}:\frac{a_2-b_2}{b_3-b_2},\quad \frac{a_3-a_4}{b_4-a_4}:\frac{a_3-b_3}{b_4-b_3},\quad \frac{a_4-a_1}{b_1-a_1}:\frac{a_4-b_4}{b_1-b_4},$$

realni. Proizvod prvog i trećeg, podeljen proizvodom drugog i četvrtog jednak je

$$\frac{a_1-a_2}{a_2-a_3}\cdot\frac{a_3-a_4}{a_4-a_1}\cdot\frac{b_2-b_1}{b_3-b_2}\cdot\frac{b_4-b_3}{b_1-b_4},$$

pa kako su tačke a_1, a_2, a_3, a_4 konciklične, to je prema teoremi 4 broj $\dfrac{a_1-a_2}{a_2-a_3}\cdot\dfrac{a_3-a_4}{a_4-a_1}$ realan, pa je i broj $\dfrac{b_2-b_1}{b_3-b_2}\cdot\dfrac{b_4-b_3}{b_1-b_4}$ realan. Sada su po T3 tačke b_1, b_2, b_3, b_4 konciklične ili kolinearne.

53. Neka je koordinatni početak tačka preseka dijagonala palalelograma. Tada je $c=-a$ i $d=-b$. Kako su trouglovi cde i fbc slični i istoorijentisani to je po T4

$$\frac{c-b}{b-f}=\frac{e-d}{d-c},$$

pa je $f=\dfrac{be+c^2-bc-cd}{e-d}=\dfrac{be+a^2}{e+b}$. Da bi trouglovi cde i fae bili slični i istoorijentisani (a samim tim i trouglovi fbc i fae), po T4 potrebno je i dovoljno da je

$$\frac{c-d}{d-e}=\frac{f-a}{a-e}.$$

Poslednja jednakost sledi iz

$$f-a=\frac{be+a^2-ea-ab}{e+b}=\frac{(e-a)(b-a)}{e+b},$$

kao i $c-d=c+b$, $d-e=-(b+e)$, $c+b=b-a$.

54. Neka je $p=0$ i $q=1$. Kako je $\angle mpq=\alpha$, to je prema T1.4 kvadriranjem $\dfrac{q-p}{\overline{q}-\overline{p}}=e^{i2\alpha}\dfrac{m-p}{\overline{m}-\overline{p}}$, tj. $\dfrac{m}{\overline{m}}=e^{i2\alpha}$. Kako je $\angle pqm=\beta$, to je po istoj teoremi $\dfrac{m-q}{\overline{m}-\overline{q}}=e^{i2\beta}\dfrac{p-q}{\overline{p}-\overline{q}}$, tj. $1=e^{i2\beta}\dfrac{m-1}{\overline{m}-1}$. Rešavanjem ovog sistema (uz korišćenje $e^{i2(\alpha+\beta+\gamma)}=1$) dobijamo

$$m=\frac{e^{i2(\alpha+\gamma)}-1}{e^{i2\gamma}-1},$$

i simetrično

$$l=\frac{e^{i2(\beta+\gamma)}-1}{e^{i2\beta}-1},\quad k=\frac{e^{i2(\alpha+\beta)}-1}{e^{i2\alpha}-1}.$$

Po T4, da bismo dokazali da su trouglovi klm i kpq slični i istoorijentisani dovoljno je dokazati da je

$$\frac{k-l}{l-m}=\frac{k-p}{p-q}=-k.$$

Poslednje sledi iz

$$\frac{k-l}{l-m}=\frac{\dfrac{e^{i(2\alpha+4\beta)}-e^{i2\beta}-e^{i(2\alpha+2\beta)}+e^{i(2\beta+2\gamma)}+e^{i2\alpha}-1}{(e^{i2\alpha}-1)(e^{i2\beta}-1)}}{\dfrac{e^{i(2\beta+4\gamma)}-e^{i2\gamma}-e^{i(2\beta+2\gamma)}+e^{i(2\alpha+2\gamma)}+e^{i2\beta}-1}{(e^{i2\beta}-1)(e^{i2\gamma}-1)}}=$$

$$=\frac{e^{i2\gamma}-1}{e^{i2\alpha}-1}\frac{e^{i2(\alpha+\beta)}(e^{i(2\beta+4\gamma)}-e^{i2\gamma}-e^{i(2\beta+2\gamma)}+e^{i(2\alpha+2\gamma)}+e^{i2\beta}-1)}{e^{i(2\beta+4\gamma)}-e^{i2\gamma}-e^{i(2\beta+2\gamma)}+e^{i(2\alpha+2\gamma)}+e^{i2\beta}-1}=\frac{1-e^{i2(\alpha+\beta)}}{e^{i2\alpha}-1}=-k.$$

Kako su trouglovi kpq, qlp, pqm međusobno slični i istoorijentisani, to su i sva četiri trougla međusobno slična i istoorijentisana.

55. Neka su komplekne koordinate temena i-tog poligona označene sa $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}$, redom u pozitivnom smeru. Prema T6.1 i datoj rekurentnoj konstrukciji imamo da je za svako i i k

$$a_i^{(k+1)}=2a_{i+k}^{(k)}-a_i^{(k)},$$

gde se indeksi uzimaju po modulu n. Naš cilj je da odredimo vrednost $a_i^{(n)}$, preko vrednosti $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}$. Sledeći niz jednakosti

$$a_i^{(k+1)}=2a_{i+k}^{(k)}-a_k^{(i)}=4a_{i+k+k-1}^{(k-1)}-2a_{i+k}^{(k-1)}-2a_{i+k-1}^{(k-1)}+a_i^{(k-1)}=4(2a_{i+k+k-1+k-2}^{(k-2)}-$$
$$-a_{i+k+k-1}^{(k-2)})-2(2a_{i+k+k-2}^{(k-2)}-a_{i+k}^{(k-2)})-2(2a_{i+k-1+k-2}^{(k-2)}-a_{i+k-1}^{(k-2)})+2a_{i+k-2}^{(k-2)}-a_i^{(k-2)}=$$
$$=8a_{i+k+k-1+k-2}^{(k-2)}-4(a_{i+k+k-1}^{(k-2)}+a_{i+k+k-2}^{(k-2)}+a_{i+k-1+k-2}^{(k-2)})+2(a_{i+k}^{(k-2)}+a_{i+k-1}^{(k-2)}+a_{i+k-2}^{(k-2)})-a_i^{(k-2)},$$

nas navodi na to da je

$$a_i^{(k)}=2^{k-1}s_k^{(k)}(i)-2^{k-2}s_{k-1}^{(k)}(i)+\ldots+(-1)^k s_0^{(k)}(i),$$

gde je označena $s_j^{(k)}(i)$ suma svi brojeva oblika $a_{i+s_k(j)}$, gde je $s_k(j)$ neki od brojeva koji se dobija kao suma tačno j različitih prirodnih brojeva ne većih od n. Pri tom je $s_0^{(k)}(i)=a_i$. Prethodna formula se lako dokazuje indukcijom. Specijalno formula važi i za $k=n$, pa je

$$a_i^{(n)}=2^{n-1}s_n^{(n)}(i)-2^{n-2}s_{n-1}^{(n)}(i)+\ldots+(-1)^n s_0^{(n)}(i).$$

Sada je moguće dokazati da je $s_l^{(n)}(i) = s_l^{(n)}(j)$, za svako $1 \leq l \leq n-1$, što je jedan ne toliko težak zadatak iz teorije brojeva. Dalje, kako je n prost to je $n + n - 1 + \ldots + 1$ deljivo sa n, pa je

$$a_i^{(n)} - a_j^{(n)} = 2^{n-1}a_{i+n+n-1+\ldots+1}^{(1)} - 2^{n-1}a_{j+n+n-1+\ldots+1}^{(1)} + (-1)^n a_i^{(1)} - (-1)^n a_j^{(1)} = (2^{n-1} + (-1)^n)(a_i^{(1)} - a_j^{(1)}),$$

što po T4 završava naš dokaz.

56. Neka je krug opisan oko petougla $abcde$ jedinični i neka su x, y i z podnožja normala iz a na bc, cd i de, redom. Prema T2.4 imamo

$$x = \frac{1}{2}\Big(a + b + c - \frac{bc}{a}\Big), \quad y = \frac{1}{2}\Big(a + c + d - \frac{cd}{a}\Big), \quad z = \frac{1}{2}\Big(a + d + e - \frac{de}{a}\Big),$$

a prema T5 i

$$S(xyz) = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} x & \overline{x} & 1 \\ y & \overline{y} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{8}\begin{vmatrix} a+b+c-\frac{bc}{a} & \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}-\frac{\overline{b}\,\overline{c}}{\overline{a}} & 1 \\ a+c+d-\frac{cd}{a} & \overline{a}+\overline{c}+\overline{d}-\frac{\overline{c}\,\overline{d}}{\overline{a}} & 1 \\ a+d+e-\frac{de}{a} & \overline{a}+\overline{d}+\overline{e}-\frac{\overline{d}\,\overline{e}}{\overline{a}} & 1 \end{vmatrix}.$$

Kako se determinanta ne menja oduzimanjem jedne od drugih kolona, to oduzimanjem druge od treće, a zatim i prve od druge dobijamo

$$S(xyz) = \frac{i}{8}\begin{vmatrix} a+b+c-\frac{bc}{a} & \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}-\frac{\overline{b}\,\overline{c}}{\overline{a}} & 1 \\ \dfrac{(d-b)(a-c)}{a} & \dfrac{(d-b)(a-c)}{bcd} & 0 \\ \dfrac{(e-c)(a-d)}{a} & \dfrac{(e-c)(a-d)}{a} & 0 \end{vmatrix} = \frac{i(a-c)(d-b)(a-d)(e-c)}{8}\begin{vmatrix} a+b+c-\frac{bc}{a} & \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}-\frac{\overline{b}\,\overline{c}}{\overline{a}} & 1 \\ \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{bcd} & 0 \\ \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{a} & 0 \end{vmatrix},$$

tj. konačno

$$S(xyz) = \frac{i(a-c)(d-b)(a-d)(e-c)}{8}\Big(\frac{1}{acde} - \frac{1}{abcd}\Big) = \frac{i(a-c)(d-b)(a-d)(e-c)(b-e)}{8abcde}.$$

Kako je poslednji izraz simetričan po a, b, c, d i e to i data površina ne zavisi od izbora temena (u ovom slučaju a).

57. Neka je krug opisan oko trougla abc jedinični. Kako je $\dfrac{S(bca_1)}{S(abc)} = 1 - \dfrac{|a-a_1|}{|a-a'|} = 1 - \dfrac{a-a_1}{a-a'}$ (gde je a' podnožje normale iz a na bc), data jednakost se svodi na

$$2 = \frac{a-a_1}{a-a'} + \frac{b-b_1}{b-b'} + \frac{c-c_1}{c-c'}.$$

Prema T2.4 je $a' = \dfrac{1}{2}\Big(a + b + c - \dfrac{bc}{a}\Big)$, pa je $a - a' = \dfrac{1}{2}\Big(a + \dfrac{bc}{a} - b - c\Big) = \dfrac{(a-b)(a-c)}{2a}$ i jednakost se zapisivanjem izraza simetričnih ovom svodi na

$$2 = \frac{2a(a-a_1)}{(a-b)(a-c)} + \frac{2b(b-b_1)}{(b-a)(b-c)} + \frac{2c(c-c_1)}{(c-a)(c-b)} = -2\frac{a(a-a_1)(b-c) + b(b-b_1)(c-a) + c(c-c_1)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

tj. sređivanjem

$$aa_1(b-c) + bb_1(c-a) + cc_1(a-b) = 0.$$

Po T4 koncikličnosti tačaka a_1, b_1, c_1, h (kako očigledno nisu kolinearne) ekvivalentna je sa

$$\frac{a_1 - c_1}{\overline{a_1} - \overline{c_1}}\,\frac{b_1 - h}{\overline{b_1} - \overline{h}} = \frac{a_1 - h}{\overline{a_1} - \overline{h}}\,\frac{b_1 - c_1}{\overline{b_1} - \overline{c_1}}.$$

Kako je h ortocentar, to je prema T6.3 $h = a + b + c$, a kako je $aa_1 \perp bc$, to je prema T1.3 i $\dfrac{a_1 - a}{\overline{a_1} - \overline{a}} = -\dfrac{b-c}{\overline{b} - \overline{c}}$, tj. $\overline{a_1} = \dfrac{bc + aa_1 - a^2}{abc}$, odnosno simetrično $\overline{b_1} = \dfrac{ac + bb_1 - b^2}{abc}$ i $\overline{c_1} = \dfrac{ab + cc_1 - c^2}{abc}$. Slično je iz $a_1h \perp bc$ i $b_1h \perp ac$

$$\frac{a_1 - h}{\overline{a_1} - \overline{h}} = -\frac{b-c}{\overline{b} - \overline{c}} = bc, \quad \frac{b_1 - h}{\overline{b_1} - \overline{h}} = -\frac{a-c}{\overline{a} - \overline{c}} = ac,$$

pa je dovoljno dokazati da je

$$\frac{a(a_1 - c_1)}{aa_1 - cc_1 + (c-a)(a+b+c)} = \frac{b(b_1 - c_1)}{bb_1 - cc_1 + (c-b)(a+b+c)}.$$

Primetimo da je

$$a(b-c)a_1 - a(b-c)c_1 = -b_1b(c-a)a - cc_1(a-b)a - a(b-c)c_1 = ab(c-a)(c_1-b_1),$$

pa rezultat sledi konjugovanjem.

58. Neka je krug opisani oko trougla abc jedinični. Po T2.4 imamo da je $d = \frac{1}{2}\Big(a+b+c-\frac{ab}{c}\Big)$, $e = \frac{1}{2}\Big(a+b+c-\frac{ac}{b}\Big)$ i $f = \frac{1}{2}\Big(a+b+c-\frac{bc}{a}\Big)$, a po T6.1 $a_1 = \frac{b+c}{2}$ (gde je a_1 središte stranice bc). Kako je q na tetivi ac to je prema T2.2 $\overline{q} = \frac{a+c-q}{ac}$, a kako je $qd \parallel ef$ po T1.1 imamo $\frac{q-d}{\overline{q}-\overline{d}} = \frac{e-f}{\overline{e}-\overline{f}} = -a^2$. Rešavanjem ovog sistema dobijamo

$$q = \frac{a^3+a^2b+abc-b^2c}{2ab}.$$

Simetrično dobijamo $r = \frac{a^3+a^2c+abc-bc^2}{2ac}$. Dalje, kako je p na tetivi bc, po T2.2 imamo $\overline{p} = \frac{b+c-p}{bc}$, a iz kolinearnosti tačaka e, f i p po T1.2 $\frac{p-e}{\overline{p}-\overline{e}} = \frac{e-f}{\overline{e}-\overline{f}} = -a^2$. Rešavanjem ovog sistema dobijamo

$$p = \frac{a^2b+a^2c+ab^2+ac^2-b^2c-bc^2-2abc}{2(a^2-bc)} = \frac{b+c}{2} + \frac{a(b-c)^2}{2(a^2-bc)}.$$

Po T4 dovoljno je dokazati da je

$$\frac{p-a_1}{p-r}\,\frac{q-r}{q-a_1} = \frac{\overline{p}-\overline{a_1}}{\overline{p}-\overline{r}}\,\frac{\overline{q}-\overline{r}}{\overline{q}-\overline{a_1}}.$$

Kako je

$$q-r = \frac{a(c-b)(a^2+bc)}{2abc}, \quad p-a_1 = \frac{a(b-c)^2}{2(a^2-bc)}, \quad p-r = \frac{(a^2-c^2)(b^2c+abc-a^3-a^2c)}{2ac(a^2-bc)}, \quad q-a_1 = \frac{a^3+a^2b-b^2c-ab^2}{2ab}$$

to traženo dobijamo konjugovanjem.

59. Neke je prvo O centar opisanog kruga trougla abc i dokažimo da je O i centar upisanog kruga trougla abc. Neka je krug opisan oko trougla abc jedinični. Po T6.1 imamo da je $c_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = \frac{a+c}{2}$ i $a_1 = \frac{b+c}{2}$. Neka su k_1, k_2, k_3 dati krugovi sa centrima u a_1, b_1 i c_1. Neka je $k_1 \cap k_2 = \{k, o\}$, $k_2 \cap k_3 = \{m, o\}$ i $k_3 \cap k_1 = \{l, o\}$. Tada je $|a_1-k| = |a_1-o|$, $|b_1-k| = |b_1-o|$, pa je kvadriranjem $(a_1-k)(\overline{a_1}-\overline{k}) = a_1\overline{a_1}$ i $(b_1-k)(\overline{b_1}-\overline{k}) = b_1\overline{b_1}$. Rešavanjem ovog sistema dobijamo

$$k = \frac{(a+c)(b+c)}{2c}.$$

Simetrično je $l = \frac{(b+c)(a+b)}{2b}$ i $m = \frac{(a+c)(a+b)}{2a}$. Neka je $\angle mko = \varphi$. Po T1.4 imamo da je $\frac{o-k}{\overline{o}-\overline{k}} = e^{i2\varphi}\frac{m-k}{\overline{m}-\overline{k}}$, pa kako je $k-m = \frac{b(a^2-c^2)}{2ac}$, to konjugovanjem dobijamo $e^{i2\varphi} = -\frac{a}{b}$. Ukoliko je $\angle okl = \psi$, to je takođe po T1.4 $\frac{o-k}{\overline{o}-\overline{k}} = e^{i2\psi}\frac{l-k}{\overline{l}-\overline{k}}$, pa je i $e^{i\psi} = -\frac{a}{b}$. Sada je $\varphi = \psi$ ili $\varphi = \psi \pm \pi$, pa kako je drugi od uslova nemoguć (zašto?), to je $\varphi = \psi$. Sada je jasno da je o i centar upisanog kruga trougla klm.

Neka je u drugom delu zadatka krug upisan u trougao klm jedinični i neka dodiruje stranice kl, km, lm u tačkama u, v, w, redom. Po T7.1 imamo da je

$$k = \frac{2uv}{u+v}, \quad l = \frac{2uw}{w+u}, \quad m = \frac{2vw}{v+w}.$$

Neka je a_1 centar kruga opisanog oko trougla kol. Tada je po T9.2

$$a_1 = \frac{kl(\overline{k}-\overline{l})}{\overline{k}l - k\overline{l}} = \frac{2uvw}{k(u+v)(u+w)}$$

i simetrično $b_1 = \frac{2uvw}{(u+v)(v+w)}$ i $c_1 = \frac{2uvw}{(w+u)(w+v)}$ (b_1 i c_1 su centri krugova opisanih oko trouglova kom i mol, redom). Sada je po T6.1

$$a+b = 2c_1, \quad b+c = 2a_1, \quad a+c = 2b_1,$$

tj. rešavanjem ovog sistema $a = b_1 + c_1 - a_1$, $b = a_1 + c_1 - b_1$ i $c = a - 1 + b_1 - c_1$. Da bismo dokaz završili dovoljno je dokazati da je $ab \perp oc_1$ (ostalo se dokazuje simetrično), tj. po T1.3 da je $\dfrac{c_1 - o}{\overline{c_1} - \overline{o}} = -\dfrac{a-b}{\overline{a} - \overline{b}} = -\dfrac{b_1 - a_1}{\overline{b_1} - \overline{a_1}}$. Poslednje lako sledi iz

$$b_1 - a_1 = \frac{2uvw(u-v)}{(u+v)(v+w)(w+u)},$$

konjugovanjem.

60. Neka su b i c centri krugova k_1 i k_2, redom i neka je pri tome bc realna osa. Ako se tačke m_1 i m_2 kreću u istom smeru, po T1.4, za tačke m_1 i m_2 važi

$$m_1 - b = (a-b)e^{i\varphi}, \quad m_2 - c = (a-c)e^{i\varphi}.$$

Ako je tražena tačka ω mora biti $|\omega - m_1| = |\omega - m_2|$, odnosno kvadriranjem $(\omega - m_1)(\overline{\omega} - \overline{m_1}) = (\omega - m_2)(\overline{\omega} - \overline{m_2})$. Iz poslednjeg je

$$\overline{\omega} = \frac{m_1\overline{m_1} - m_2\overline{m_2} - \omega(\overline{m_1} - \overline{m_2})}{m_1 - m_2}.$$

Sređivanjem dobija (uz korišćenje $\overline{b} = b$ i $\overline{c} = c$ i oznaku $e^{i\varphi} = z$)

$$\overline{w}(1-z) = 2(b+c) - a - \overline{a} + az + \overline{a}\,\overline{z} - (b+c)(z + \overline{z}) - (1 - \overline{z})\omega.$$

Kako je $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$, to je

$$(b + c - a - \overline{w})z^2 - (2(b+c) - a - \overline{a} - \omega - \overline{\omega})z + b + c - \overline{a} - \omega \equiv 0.$$

Poslednji polinom treba biti identički jednak 0, pa svaki njegov koeficijent treba biti jednak 0, tj. $\omega = b + c - \overline{a}$. Iz prethodnih relacija zaključujemo da data tačka zadovoljava uslove zadatka.
Zadatak se gotovo identično rešava u slučaju suprotnog smera okretanja.

61. Neka je γ jedinični krug i neka je $a = -1$. Tada je $b = 1$, kao i $c = 1 + 2i$, $d = -1 + 2i$. Dalje, kako su tačke n, b, p kolinearne, to je po T1.2

$$\frac{a-p}{\overline{a} - \overline{p}} = \frac{a-m}{\overline{a} - \overline{m}} = -am = m,$$

pa je sređivanjem $\overline{p} = \dfrac{p + 1 - m}{m}$ (1). Takođe kako su tačke c, d, p kolinearne to po istoj teoremi dobijamo da je

$$\frac{c-n}{\overline{c} - \overline{n}} = \frac{c-d}{\overline{c} - \overline{d}} = 1,$$

pa je $\overline{p} = p - 4i$. Upoređivanjem sa (1) dobijamo $p = 4i \cdot \dfrac{m}{m-1} - 1$. Dalje, kako su i tačke b, n, p kolinearne to je i

$$\frac{p-1}{\overline{p} - \overline{1}} = \frac{1-n}{\overline{1} - \overline{n}} = n,$$

tj. sređivanjem

$$n = \frac{m(1-2i) - 1}{2i + 1 - m}.$$

Neka je sada q' tačka preseka kruga γ i prave dm. Ukoliko pokažemo da su tačke q', n, c kolinearne, tada će biti $q = q'$ i $q \in \gamma$, pa će prvi deo zadatka biti dokazan. Nađimo zato koordinatu tačke q'. Kako je q' na jediničnom krugu, to je $q'\overline{q'} = 1$, a kako su d, m, q' kolinearne, to je prema T1.2

$$\frac{d-m}{\overline{d} - \overline{m}} = \frac{q' - m}{\overline{q'} - \overline{m}} = -q'm,$$

pa je posle sređivanja

$$q' = -\frac{m + 1 - 2i}{m(1+2i) + 1}.$$

Da bi tačke q', n, c bile kolinearne dovoljno je da je $\dfrac{q-c}{\overline{q} - \overline{c}} = \dfrac{n-q}{\overline{n} - \overline{q}} = -nq$, tj. $n = \dfrac{q - 1 - 2i}{(\overline{q} - 1 + 2i)q}$, što se lako proverava. Ovim je prvi deo zadatka dokaz.

Pređimo na dokazivanje drugog dela. Primetimo da je tražena jednakost ekvivalentna sa $|q-a| \cdot |p-c| = |d-p| \cdot |b-q|$. Međutim iz prethodno sračunatih brednosti za p i q, lako dobijamo da je

$$|q-a| = 2\left|\frac{m+1}{m(1+2i)+1}\right|, \ |p-c| = 2\left|\frac{m(1+i) + 1 - i}{m(1+2i)+1}\right|,$$

$$|d-p|=2\left|\frac{m+1}{m+1}\right|,\ |b-q|=2\left|\frac{m(i-1)+1+1}{m-1}\right|,$$

i kako je $-i((i-1)m+1+i)=m(1+i)+1-i$, tražena jednakost očigledno važi.

62. Ovde postoje mnoge mogućnosti za odabir jediničnog kruga. Kao što će se i videti u rešenju najpovoljnije je uzeti da je krug opisan oko $bcb'c'$ jedinični (ukoliko probate malo sa preostalim krugovima, ubrzo ćete videti da je ovo najbolje rešenje). Po T2.5 imamo da za tačku x (presek bb' i cc') važi $x=\dfrac{bb'(c+c')-cc'(b+b')}{bb'-cc'}$. Dalje, kako je $bh\perp cb'$ i $ch\perp bc'$, to prema T1.3 dobijamo sledeće dve jednačine

$$\frac{b-h}{\overline{b}-\overline{h}}=-\frac{b'-c}{\overline{b'}-\overline{c}}=b'c,\quad \frac{c-h}{\overline{c}-\overline{h}}=-\frac{b-c'}{\overline{b}-\overline{c'}}=bc'.$$

Iz prve je $\overline{h}=\dfrac{bh-b^2+b'c}{bb'c}$, a iz druge $\overline{h}=\dfrac{ch-c^2+bc'}{bcc'}$, odnosno izjednačavanjem

$$h=\frac{b'c'(b-c)+b^2c'-b'c^2}{bc'-b'c}$$

Simetrično je i $h'=\dfrac{bc(b'-c')+b'^2c-bc'^2}{b'c-bc'}$. U zadatku je dovoljno dokazati da su tačke h,h' i x, tj. prema T1.2

$$\frac{h-h'}{\overline{h}-\overline{h'}}=\frac{h-x}{\overline{h}-\overline{x}}.$$

Poslednje sledi iz

$$h-h'=\frac{bc(b'-c')+b'c'(b-c)+bc'(b-c')+b'c(b'-c)}{bc'-b'c}=\frac{(b+b'-c-c')(bc'+b'c)}{bc'-b'c},$$

$$h-x=\frac{b^2b'^2c'+b^3b'c'+b'c^2c'^2+b'c^3c'-b^2b'cc'-b^2b'c'^2-bb'c^2c'-b'^2c^2c'}{(bc'-b'c)(bb'-cc')}=\frac{b'c'(b^2-c^2)(b'+b-c-c')}{(bc'-b'c)(bb'-cc')},$$

konjugovanjem.

63. Iz elementarne geometije je poznato da je i $\angle nca=\angle mcb$ (ovakve tačke m i n se nazivaju izogonalno spregnute). Neka je $\angle mab=\alpha$, $\angle abm=\beta$ i $\angle mca=\gamma$. Prema T1.4 imamo da je

$$\frac{a-b}{|a-b|}=e^{i\alpha}\frac{a-m}{|a-m|},\ \frac{a-n}{|a-n|}=e^{i\alpha}\frac{a-c}{|a-c|},\ \frac{b-c}{|b-c|}=e^{i\beta}\frac{b-n}{|b-n|},\ \frac{b-m}{|b-m|}=e^{i\beta}\frac{b-a}{|b-a|},$$

$$\frac{c-a}{|c-a|}=e^{i\gamma}\frac{c-n}{|c-n|},\quad \frac{c-m}{|c-m|}=e^{i\gamma}\frac{c-b}{|c-b|},$$

pa je

$$\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\frac{BM\cdot BN}{BA\cdot BC}+\frac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}=\frac{(m-a)(n-a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(m-b)(n-b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(m-c)(n-c)}{(c-a)(c-b)}.$$

Poslednji izraz je uvek jednak 1, što završava naš dokaz.

64. Neka je $\angle A=\alpha,\angle B=\beta,\angle C=\gamma,\angle D=\delta,\angle E=\varepsilon$ i $\angle F=\varphi$. Po T1.4 imamo da je

$$\frac{b-c}{|b-c|}=e^{i\beta}\frac{b-a}{|b-a|},\quad \frac{d-e}{|d-e|}=e^{i\delta}\frac{d-c}{|d-c|},\quad \frac{f-a}{|f-a|}=e^{i\varphi}\frac{f-e}{|f-e|}.$$

Množenjem ovih jednakosti i korišćenjem uslova zadatka (po uslovu zadatka je i $e^{i(\beta+\delta+\varphi)}=1$) dobijamo

$$(b-c)(d-e)(f-a)=(b-a)(d-c)(f-e).$$

Odavde se odmah može zaključiti da važi i

$$(b-c)(a-e)(f-d)=(c-a)(e-f)(d-b),$$

pa rezultat sledi stavljanjem modula u poslednji izraz.

65. Primenimo prvo inverziju u odnosu na krug ω. Njom tačke a,b,c,e,z ostaju neprekidne, a tačka d se slika u presek pravih ae i bc, neka je to s. Takođe krug opisan oko trougla azd slika se u krug opisan oko trougla azs, a prava bd u pravu

bd, pa je dovoljno dokazati da je bd tangenta na krug opisan oko azs. Poslednje je ekvivalentno sa $az \perp sz$.
Neka je krug ω jedinični i neka je $b = 1$. Tada je prema T6.1 $c = -1$, a takođe je i $e = \overline{a} = \dfrac{1}{a}$. Prema istoj teoremi je i $s = \dfrac{a+\overline{a}}{2} = \dfrac{a^2+1}{2a}$. Kako je $eb \perp ax$, to je prema T1.3

$$\frac{a-x}{\overline{a}-\overline{x}} = -\frac{e-b}{\overline{e}-\overline{b}} = -\frac{1}{a},$$

a kako je tačka x i na tetivi eb, to je prema T2.2 i $\overline{x} = \dfrac{1+\overline{a}-x}{\overline{a}}$. Rešavanjem ovog sistema dobijamo $x = \dfrac{a^3+a^2+a-1}{2a^2}$.
Dalje, kako je y središte duži ax, to je prema T6.1

$$y = \frac{a+x}{2} = \frac{3a^3+a^2+a-1}{4a^2}.$$

Sada kako su tačke b, y, z kolinearne i z na jediničnom krugu to je prema T1.2 i T2.1

$$\frac{b-y}{\overline{b}-\overline{y}} = \frac{b-z}{\overline{b}-\overline{z}} = -z.$$

Sređivanjem dobijamo $z = \dfrac{1+3a^2}{(3+a^2)a}$. Da bismo dokazali da je $az \perp zs$, prema T1.3 dovoljno je dokazati da je

$$\frac{a-z}{\overline{a}-\overline{z}} = -\frac{s-z}{\overline{s}-\overline{z}}.$$

Poslednje sledi iz

$$a-z = \frac{a^4-1}{a(3+a^2)}, \quad s-z = \frac{a^4-2a^2+1}{2a(3+a^2)},$$

konjugovanjem.

66. Pretpostavimo prvo da se ortocentri datih trouglova poklapaju. Neka je krug opisan oko trougla abc jedinični. Po T6.3 je $h = a+b+c$. Takođe, neka se rotacijom oko tačke h za ugao ω, u negativnom smeru, tačka a_1 prevodi u tačku a_1' takvu da su a_1, a_1' i h kolinearne i neka se pri istoj rotaciji b_1 slika u b_1', a c_1 u c_1'. Kako su trouglovi abc i $a_1b_1c_1$ slično i istorijentisani, to su i tačke b, b_1', h i tačke c, c_1', h kolinearne i $a_1'b_1' \parallel ab$ (i slično za $b_1'c_1'$ i $c_1'a_1'$). Sada je prema T1.4 $e^{i\omega}(a_1'-h) = (a_1-h)$ (jer je rotacija u negativnom smeru), a kako su tačke a, a_1', h kolinearne, to je prema T1.2 $\dfrac{a_1'-h}{a-h} = \lambda \in \mathbf{R}$. Znači $a_1 = h + \lambda e^{i\omega}(a-h)$ i analogno

$$b_1 = h + \lambda e^{i\omega}(b-h), \quad c_1 = h + \lambda e^{i\omega}(c-h).$$

Dalje, kako je tačka a_1 na tetivi bc jediničnog kruga, to je prema T2.2 $\overline{a_1} = \dfrac{b+c-a_1}{bc}$. S druge strane konjugovanjem prethodno dobijenog izraza za a_1 dobijamo $\overline{a_1} = \overline{h} + \lambda\dfrac{\overline{a}-\overline{h}}{e^{i\omega}}$. Rešavanjem ovog sistema po λ dobijamo

$$\lambda = \frac{e^{i\omega}(a(a+b+c)+bc)}{a(b+c)(e^{ie\omega}+1)}. \quad (1)$$

Kako λ ravnopravno učestvuje i u formulama za b_1 to mora biti i

$$\lambda = \frac{e^{i\omega}(b(a+b+c)+ac)}{b(a+c)(e^{ie\omega}+1)}. \quad (2)$$

Izjednačavanjem (1) i (2) dobijamo

$$ab(a+c)(a+b+c)+b^2c(a+c)-ab(b+c)(a+b+c)-a^2c(b+c) = (a-b)(ab(a+b+c)-abc-ac^2-bc^2) = (a^2-b^2)(ab-c^2).$$

Kako je $a^2 \neq b^2$, to mora biti $ab = c^2$. Dokažimo da je ovo potreban uslov da bi trougao abc bio jednakostraničan, tj. da bi $|a-b| = |a-c|$. Kvadriranjem poslednjeg dobijamo da je trougao jednakostraničan ako i samo ako je $0 = \dfrac{(a-c)^2}{ac} - \dfrac{(a-b)^2}{ab} = \dfrac{(b-c)(a^2-bc)}{abc}$, pa kako je $b \neq c$, to je ovaj deo zadatka završen.

Neka se sada centri upisanih krugova datih trouglova poklapaju. Neka je krug upisan u trougao abc jedinični i neka su d,e,f dodiri tog kruga sa stranicama ab,bc,ca, redom. Slično kao u prethodnom delu zadatka nalazimo da je

$$a_1 = i + \lambda e^{i\omega}(a-i), \quad b_1 = i + \lambda e^{i\omega}(b-i), \quad c_1 = i + \lambda e^{i\omega}(c-i).$$

Uz uslov $i=0$ iz T2.3 konjugovanjem imamo $\overline{a_1} = \dfrac{2\lambda}{e^{i\omega}(e+f)}$. Takođe kako su tačke a_1,b,c kolinearne, to je $a_1d \perp di$, pa je prema T1.3 $\dfrac{a_1-d}{\overline{a_1}-\overline{d}} = -\dfrac{d-i}{\overline{d}-\overline{i}} = -d^2$. Rešavanjem ovog sistema dobijamo

$$\lambda = \frac{d(e+f)}{d^2+efe^{i\omega}}.$$

Kako λ podjednako učestvuje u formulama za a_1 i b_1, to mora biti

$$\lambda = \frac{e(d+f)}{e^2+dfe^{i\omega}},$$

pa izjednačavanjem dobijamo

$$e^{i2\omega} = \frac{ed(e+d+f)}{f(de+ef+fd)}.$$

Zbog siemtrije je i $e^{i2\omega} = \dfrac{ef(e+d+f)}{d(de+ef+fd)}$, pa kako je $f^2 \neq d^2$, to mora biti $e+d+f=0$. Lako se dokazuje da je u ovom slučaju trougao def jednakostraničan, a samim tim i trougao abc.

67. Kako je $(a-b)(c-d)+(b-c)(a-d)=(a-c)(b-d)$, to je po nejednakosti trougla $|(a-b)(c-d)|+|(b-c)(a-d)| \geq |(a-c)(b-d)|$, što je upravo zapis tražene nejednakosti u kompleksnim brojevima. Jednakost važi ako i samo su vektori $(a-b)(c-d)$, $(b-c)(a-d)$ i $(a-c)(c-d)$ kolinearni. Prva dva od datih vektora su kolinearna ako i samo ako je

$$\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(a-d)} \in \mathbf{R},$$

što je po T3 uslov da su tačke a,c,b,d na jednom krugu. Slično se pokazuje i da su preostala dva vektora kolinearna.

68. Kako je $(d-a)(d-b)(a-b)+(d-b)(d-c)(b-c)+(d-c)(d-a)(c-a)=(a-b)(b-c)(c-a)$, to je i $|(d-a)(d-b)(a-b)|+|(d-b)(d-c)(b-c)|+|(d-c)(d-a)(c-a)| \geq |(a-b)(b-c)(c-a)|$, pri čemu jednakost važi ako i samo ako su vektori $(d-a)(d-b)(a-b)$, $(d-b)(d-c)(b-c)$, $(d-c)(d-a)(c-a)$ i $(a-b)(b-c)(c-a)$ kolinearni. Uslov kolinearnosti prva dva vektora može se zapisati i kao

$$\frac{(d-a)(a-b)}{(d-c)(b-c)} = \frac{(\overline{d}-\overline{a})(\overline{a}-\overline{b})}{(\overline{d}-\overline{c})(\overline{b}-\overline{c})}.$$

Uzmimo sada da je krug opisan oko trougla abc jedinični. Tada se dati izraz svodi na

$$d\overline{d}a - a^2\overline{d} - \frac{da}{c} + \frac{a^2}{c} = d\overline{d}c - c^2\overline{d} - \frac{dc}{a} + \frac{c^2}{a}$$

i posle sređivanja $d\overline{d}(a-c) = (a-c)\Big((a+c)\Big(\overline{d} + \dfrac{d}{ac} - \dfrac{a+c}{ac}\Big)+1\Big)$ ili

$$d\overline{d} = (a+c)\Big(\overline{d} + \frac{d}{ac} - \frac{a+c}{ac}\Big) + 1.$$

Slično, iz kolinearnosti prvog i trećeg vektora dobijamo $d\overline{d} = (b+c)\Big(\overline{d} + \dfrac{d}{bc} - \dfrac{b+c}{bc}\Big) + 1$. Oduzimanjem poslednja dva izraza dobijamo $(a-b)\Big(\overline{d} - \dfrac{d}{ab} + \dfrac{c^2-ab}{abc}\Big) = 0$, tj.

$$\overline{d} - \frac{d}{ab} + \frac{c^2-ab}{abc} = 0.$$

Slično je i $\overline{d} - \dfrac{d}{ac} + \dfrac{b^2-ac}{abc} = 0$, pa oduzimanjem i sređivanjem dobijamo $d = a+b+c$. Lako se proverava da su za $d=a+b+c$, tj. ortocentar trougla abc, sva četiri prethodno spomenuta vektora kolinearna.

ZADACI ZA SAMOSTALAN RAD

Kome nije dosta, evo još. Mnogi od narednih zadataka su slični onim prethodno urađenim, ali ima i nekoliko „težih” (koji su smešteni na kraj), koji zahtevaju više pažnje kod odabira poznatih tačaka i pre svega više vremena. Kao i kod rešenih zadataka trudio sam se da što više zadataka bude sa raznih takmičenja u svetu.

1. (Okružno 2002, 2.raz) U oštrouglom trouglu ABC, B' i C' su podnožja visina iz temena B i C redom. Kružnica sa prečnikom AB seče pravu CC' u tačkama M i N, a kružnica sa prečnikom AC seče pravu BB' u P i Q. Dokazati da je četvorougao $MPNQ$ tetivan.

2. (Izborno 2002) Neka je $ABCD$ četvourougao kod koga je $\angle A = \angle B = \angle C$. Dokazati da su tačka D, centar opisanog kruga i ortocentar trougla ABC kolinearne.

3. (Republičko 2005, 4 raz) U krug k upisan je šestougao $ABCDEF$, pri čemu su stranice AB, CD i EF jednake poluprečniku kruga k. Dokazati da središta preostale tri stranice predstavljaju vrhove jednakostaničnog trougla.

4. (Amerika 1997) U spoljašnjosti trougla ABC konstruisani su jednakokraki trouglovi BCD, CAE i ABF sa osnovicama BC, CA i AB, redom. Dokazati da su normale iz A, B i C na prave EF, FD i DE, redom, konkurentne.

5. Dokazati da je stranica pravilnog devetougla jednaka razlici njegove najveće i najmanje dijagonale.

6. Ako su $h_1, h_2, \ldots, h_{2n}$ redom rastojanja proizvoljne tačke P kruga k od pravih koje sadrže stranice $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{2n}A_1$ poligona $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ upisanog u krug k, dokazati da je $h_1h_3 \cdots h_{2n-1} = h_2h_4 \cdots h_{2n}$.

7. Neka su $d_1, d_2, \ldots, d_n$ ratojanja temena $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pravilnog n-tougla $A_1A_2 \ldots A_n$ od proizvoljne tačke P koja se nalazi na manjem luku A_1A_n kruga opisanog oko tog n-tougla. Dokazati da je

$$\frac{1}{d_1d_2} + \frac{1}{d_2d_3} + \ldots + \frac{1}{d_{n-1}d_n} = \frac{1}{d_1d_n}.$$

8. Neka je $A_0A_1 \ldots A_{2n}$ pravilan poligon, P tačka na manjem luku A_0A_{2n} opisanog kruga i m ceo broj, $0 \leq m < n$. Dokazati da je

$$\sum_{k=0}^{n} PA_{2k}^{2m+1} = \sum_{k=1}^{n} PA_{2k-1}^{2m+1}.$$

9. (USA 2000) Neka je $ABCD$ tetivan čtvorougao i neka su E i F podnožja normala iz preseka dijagonala na stranice AB i CD, redom. Dokazati da je EF normalno na pravu kroz središta stranica AD i BC.

10. Dokazati da su središta visina trougla kolinearna ako i samo ako je trougao pravougli.

11. (BMO 1990) Podnožja visina oštrouglog trougla $\triangle ABC$ su tačke A_1, B_1 i C_1. Ako su A_2, B_2 i C_2 dodirne tačke kruga upisanog u trougao $\triangle A_1B_1C_1$, dokazati da se Ojlerove prave trouglova $\triangle ABC$ i $\triangle A_2B_2C_2$ poklapaju.

12. (USA 1993) Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao čije su dijagonale AC i BD normalne. Neka je $AC \cup BD = E$. Dokazati da tačke simetrične tački E u odnosu na prave AB, BC, CD i DA obrazuju tetivan četvorougao.

13. (Indija 1998) Neka su AK, BL, CM visine trougla ABC, a H njegov ortocentar. Neka je P središte duži AH. Ako se BH i MK seku u tački S, a LP i AM u tački T, dokazati da je TS normalno na BC.

14. (Vietnam 1995) Neka su AD, BE i CF visine trougla $\triangle ABC$. Za svako $k \in R$, $k \neq 0$, neka su A_1, B_1 i C_1 takve da je $AA_1 = kAD$, $BB_1 = kBE$ i $CC_1 = kCF$. Naći sve k takve da za svaki nejednakokraki trougao $\triangle ABC$, trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ su slični.

15. (Iran 2005) Neka su je ABC trougao i D, E, F tačke na njegovim stranicam BC, CA, AB, redom, takve da je

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

gde je λ realan broj. Naći geometrijsko mesto tačaka centara opisanih krugova oko DEF za $\lambda \in \mathbf{R}$.

16. Neka su H_1 i H_2 podnožja normala iz ortocentra H, trougla ABC, na simetralu spoljašnjeg, odnosno unutrašnjeg ugla kod temena C. Dokazati da prava H_1H_2 sadrži središte stranice AB.

17. Dat je oštrougli trougao ABC i tačka D unutar njega, takva da je $\angle ADB = \angle ACB + 90^o$ i $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Naći

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}.$$

18. Na krug k su iz tačke A (koja se nalazi u spoljašnjosti datog kruga) konstruisane dve tangente AM i AN i sečica koja seče krug u tačkama K i L. Neka je l proizvoljna prava paralelna sa AM. Neka KM i LM seku pravu l u tačkama P i Q, redom. Dokazati da prava MN polovi duž PQ.

19. Na starnicama BC, CA i AB trougla ABC date su redom tačke D, E i F takve da je $BD = CE = AF$. Dokazati da trouglovi ABC i DEF imaju isti centar opisanog kruga ako i samo ako je ABC jednakostraničan.

20. Neka je dat tetivni četvorougao $ABCD$. Dokazati da su centri upisanih krugova trouglova ABC, BCD, CDA, DAB temena pravougaonika.

21. (Indija 1997) Neka je I centar upisanog kruga trougla ABC i neka su D i E središta stranica AC i AB, redom. Neka se prave AB i DI seku u tački P, a prave AC i EI u tački Q. Dokazati da je $AP \cdot AQ = AB \cdot AC$ ako i samo ako je $\angle A = 60^o$.

22. Neka je M unutrašnja tačka kvadrata $ABCD$. Neka su A_1, B_1, C_1, D_1 presečne tačke pravih AM, BM, CM, DM sa krugom opisanim oko kvadrata $ABCD$, redom. Dokazati da je

$$A_1B_1 \cdot C_1D_1 = A_1D_1 \cdot B_1C_1.$$

23. Neka je $ABCD$ konveksan tetivan četvorougao, $F = AC \cap BD$ i $E = AD \cap BC$. Ako su M i N središta stranica AB i CD, dokazati da je

$$\frac{MN}{EF} = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{AB}{CD} - \frac{CD}{AB} \right|.$$

24. (Vijetnam 1994) Tačke A', B' i C' su simetrične tačkama A, B i C u odnosu na prave BC, CA i AB, redom. Kakav mora biti trougao ABC, tako da je $A'B'C'$ jednakostraničan ?

25. Neka je centar krug opisanog oko trougla ABC tačka O, a njegov poluprečnik jednak R. Upisani krug trougla ABC dodiruje stranice BC, CA, AB, u tačkama A_1, B_1, C_1 i ima poluprečnik r.Neka se prave određene središtima stranica AB_1 i AC_1, BA_1 i BC_1, CA_1 i CB_1 seku u tačkama C_2, A_2 i B_2. Dokazati da je centar opisanog kruga trougla $A_2B_2C_2$ tačka O, a da je njegov poluprečnik jednak $R + \frac{r}{2}$.

26. (Indija 1994) Neka je $ABCD$ nejednakokraki trapez kod koga je $AB \parallel CD$ i $AB > CD$. Neka je $ABCD$ i opisan oko kruga sa centrom u tački I, koji dodiruje CD u E. Neka je M središte stranice AB i neka se MI i CD seku u tački F. Dokazati da je $DE = FC$ ako i samo ako je $AB = 2CD$.

27. (USA 1994) Neka je šsetougao $ABCDEF$ upisan u krug, neka je $AB = CD = EF$ i neka su dijagonale AD, BE i CF konkurentne. Ako je P presek pravih AD i CE, dokazati da je $\frac{CP}{PE} = \left(\frac{AC}{CE}\right)^2$.

28. (Vijetnam 1999) Neka je ABC trougao. Tačke A', B' i C' su središta lukova BC, CA i AB, koji ne sadrže A, B odnosno C, redom. Prave $A'B', B'C'$ i $C'A'$ seku stranice trougla u šest delova. Dokazati da su „srednji” delovi jednaki ako i samo je trougao ABC jednakostranični.

29. (IMO 1991, predlog) Neka je u trouglu $\triangle ABC$ ugao $\angle A = 60°$ i neka je prava IF paralelna sa AC, gde je I centar upisanog kruga, a F se nalazi na stranici AB. Tačka P duži BC je takva da je $3BP = BC$. Dokazati da je $\angle BFP = \angle B/2$.

30. (IMO 1997, predlog) Ugao A je najmanji u trouglu ABC. Tačke B i C dele opisanu kružnicu trougla na dva luka. Neka je U unutrašnja tačka luka izmedj u B i C koja ne sadrži A. Simetrale duži AB i AC seku pravu AU redom u tačkama V i W. Prave BV i CW seku se u T. Dokazati da je $AU = TB + TC$.

31. (Vijetnam 1993) Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao takav da AB nije paralelno sa CD i AD nije paralelno sa BC. Tačke P, Q, R i S su izabrane na stranicama AB, BC, CD i DA, redom, tako da je četvorougao $PQRS$ paralelogram. Odrediti geometrijsko mesto težišta svih ovakvih četvorouglova $PQRS$.

32. Upisani krug trougla ABC dodiruje BC, CA, AB u E, F, G redom. Neka su AA_1, BB_1, CC_1 odsečci simetrala unutrašnjih uglova trougla ABC. Neka su K_A, K_B, K_C, redom dodirne tačke drugih tangenti na upisani krug iz tačaka A_1, B_1, C_1. Neka su P, Q, R središta stranica BC, CA, AB. Dokazati da se PK_A, QK_B, RK_C seku na krugu upisanom u trougao ABC.

33. Neka su I i I_a centri upisanog i pripisanog kruga uz stranicu BC trougla ABC. Neka II_a seče BC i opisani krug trougla ABC u A_1 i M redom (M je između I_a i I)i neka je N središte onog luka MBA na kom je i C. Neka su S i T preseci pravih NI i NI_a sa krugom opisanim oko ABC. Dokazati da su S, T i A_1 kolinearne.

34. (Vijetnam 1995) Neka su AD, BE, CF visine trougla ABC, a A', B', C' tačke na njima takve da je

$$\frac{AA'}{AD} = \frac{BB'}{BE} = \frac{CC'}{CF} = k.$$

Odrediti sve vrednosti za k tako da je trougao $A'B'C'$ sličan trouglu ABC.

35. Dat je trougao ABC i tačka T. Neka su P i Q podnožja normala iz T na prave AB i AC, redom, i neka su R i S podnožja normala iz A na prave TC i TB, redom. Dokazati da tačka preseka pravih PR i QS leži na pravoj BC.

36. (APMO 1995) Neka je $PQRS$ tetivan četvorougao takav da prave PQ i RS nisu paralelne. Posmatra se skup svih krugova koji prolaze kroz P i Q i svih krugova koji prolaze kroz R i S. Odrediti skup A svih tačaka dodira izmedj u krugova iz ova dva skupa.

37. (Savezno 2003, 3-4 raz) Data je kružnica k i tačka P van nje. Promenljiva prava s koja sadrži tačku P seče kružnicu k u tačkama A i B. Neka su M i N središta lukova odredj enih tačkama A i B i tačka C na duži AB, takva da je

$$PC^2 = PA \cdot PB.$$

Dokazati da ugao $\angle MCN$ ne zavisi od prave s.

38. (Savezno 2002, 2.raz) Neka su A_0,A_1,...,A_{2k}, tim redom, tačke kružnice, koje je dele na $2k+1$ jednakih lukova. Tačka A_0 je spojena tetivama sa svim ostalim tačkama. Tih $2k$ tetiva dele krug na $2k+1$ delova. Ti delovi su obojeni naizmenično belom i crnom bojom, tako da je broj belih delova za jedan veći od broja crnih delova. Dokazati da je crna površina veća od bele.

39. (Vijetnam 2003) Krugovi k_1 i k_2 se dodiruju u tački M i poluprečnik kruga k_1 je veći od poluprečnika kruga k_2. Neka je A proizvoljna tačka na k_2 koja nije na pravoj koja spaja centre krugova. B i C su tačke na k_1 takve da su AB i AC njegove tangente. Prave BM i CM seku k_2 ponovo u E i F, redom, a tačka D je presek tangente u A i prave EF. Dokazati da je geometrijsko mesto tačaka D kada se A pomera po krugu, prava.

40. (Vijetnam 2004) U ravni su dati krugovi k_1 i k_2 koji se seku u tačkama A i B. Tangente na k_1 u tačkama seku se u tački K. Neka je M proizvoljna tačka krugu k_1, neka je $MA \cup k_2 = \{A, P\}$, $MK \cup k_1 = \{M, C\}$ i $CA \cup k_1 = \{A, Q\}$. Dokazati da središta duži PQ leži na pravoj MC i da PQ prolazi kroz fiksnu tačku kada se M pomera po krugu k_1.

41. (IMO 2004, predlog) Neka je $A_1A_2\ldots A_n$ pravilan n-tougao. Neka su tačke $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ određene na sledeći način:

- ako je $i = 1$ ili $i = n-1$, tada je B_i središte stranice A_iA_{i+1};
- ako je $i \neq 1$ i $i \neq n-1$ i S je presek A_1A_{i+1} i A_nA_i, tada je B_i presek simetrala ugla A_iS_{i+1} sa A_iA_{i+1}.

Dokazati da je $\angle A_1B_1A_n + \angle A_1B_2A_n + \ldots + \angle A_1B_{n-1}A_n = 180^o$.

69. (**Dezargova teorema**) Trouglovi su perspektivni u u odnosu na tachku ako i samo ako su perspektivni u odnosu na pravu.

42. (IMO 1998, predlog) Neka je ABC trougao takav da je $\angle ACB = 2\angle ABC$. Neka je D tačka na duži BC takva da je $CD = 2BD$. DužAD proužena preko tačke D do tačke E tako da važi $AD = DE$. Dokazati da je

$$\angle ECB + 180^o = 2\angle EBC.$$

43. Dat je trougao $A_1A_2A_3$ i prava p koja prolazi kroz tačku P i seče stranice A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 u tačkama X_1, X_2, X_3, redom. Neka A_iP seče krug opisani oko $A_1A_2A_3$ u tački R_i, za $i = 1, 2, 3$. Dokazati da se tada X_1R_1, X_2R_2, X_3R_3 seku u tački koja pripada opisanom krugu trougla $A_1A_2A_3$.

44. Tačke O_1 i O_2 su centri krugova k_1 i k_2 koji se seku. Neka je A jedna od presečnih tačaka ovih krugova. Dve zajedničke tangente ovih krugova su konstruisane; BC i EF su tetive ovih krugova sa krajevima u dodirnim tačkama (C i F su udaljenije od A), M i N su središta duži BC i EF. Dokazati da je $\angle O_1AO_2 = \angle MAN = 2\angle CAF$.

45. (BMO 2002) Dva kruga različitih poluprečnika seku se u tačkama A i B. Zajedničke tangente ovih krugova su MN i ST redom. Dokazati da ortocentri trouglova $\triangle AMN$, $\triangle AST$, $\triangle BMN$ i $\triangle BST$ grade pravougaonik.

46. (IMO 2004, predlog) Dat je tetivan četvorougao $ABCD$. Prave AD i BC se seku u tački E, gde je C između B i E, dijagonale AC i BD se seku u tački F. Neka je M središte CD, i neka je $N \neq M$ tačka na krugu opisanom oko trougla ABM takva da je $AN/BN = AM/BM$. Dokazati da su tačke E, F, N kolinearne.

47. (IMO 1994, predlog) Prečnik polukruga Γ nalazi se na pravoj l. Neka su C i D tačke na Γ. Tangente na Γ u tačkama C i D seku pravu l redom u tačkama B i A takvim da je centar polukruga između njih. Neka je E tačka preseka pravih AC i BD, a F podnožje normale iz E na l. Dokazati da je EF simetrala ugla $\angle CFD$.