GRUPA ZA ČETVRTI RAZRED U V. GIMNAZIJI

Matija Bašić, 12.10.2006.

1. Polinomi $P_n(x, y)$ za $n = 1, 2, ...$ su definirani sa $P_1(x, y) = 1$ i

$$P_{n+1}(x, y) = (x + y - 1)(y + 1)P_n(x, y + 2) + (y - y^2)P_n(x, y).$$

Dokaži da je $P_n(x, y) = P_n(y, x)$ za sve n i sve x, y.

2. Odredi sve prirodne brojeve x, y takve da je $x^2 + y^2 = 1997(x - y)$.

3. Matrica $n \times n$ popunjena je sa 0 ili 1 tako da svaki podskup od n elemenata matrice, od kojih nikoja dva ne leže u istom retku ili stupcu, sadrži barem jednu jedinicu. Dokaži da postoji i redaka i j stupaca tako da je $i + j \geq n + 1$ na čijem su presjeku samo jedinice.

4. Nađi sve prirodne brojeve n za koje se polinom $p(x) = x^n + 64$ može napisati kao produkt dva nekonstantna polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. (kaže se da je p reducibilan nad $\mathbb{Z}$.)

5. Neka su x_1, x_2, x_3, x_4 pozitivni realni brojevi takvi da je $x_1x_2x_3x_4 = 1$. Dokaži da je

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq \max\{\sum_{i=1}^{4} x_i, \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}\}.$$

6. Nađi sve funkcije $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje postoji strogo monotona funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$f(x + y) = f(x)u(y) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

7. Dva pravca paralelna x-osi sjeku graf $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ u točkama A, D, E i B, C, F, redom s lijeva na desno. Dokaži da je duljina projekcija segmenta CD na x-os jednaka zbroju duljina projekcija AB i EF.

8. Nađi minimum izraza

$$\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{(x + 2)^2 + (y + 2)^2}$$

po svim $x, y \in \mathbb{R}$.

9. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$2 - x^3 = y, 2 - y^3 = x.$$

10. Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) takvih da jednadžba

$$x^3 - 17x^2 + ax - b^2 = 0$$

ima tri cjelobrojna korijena (ne nužno različita).