2007: A Geometry Odyssey

Matija Bašić

The Dawn of Geometry

Zadatak 1. *Dokažite da se u jednoj točki sijeku*
a) težišnice trokuta;
b) visine trokuta;
c) simetrale stranica trokuta.

Zadatak 2. *(Eulerov pravac) Dokažite da u svakom trokutu težište, ortocentar i središte opisane kružnice leže na istom pravcu.*

Zadatak 3. *(Feuerbachova kružnica) Dokažite da u svakom trokutu polovišta stranica, nožišta visina i polovišta dužina koje spajaju ortocentar s vrhovima trokuta leže na istoj kružnici.*

Zadatak 4. *(IMO 1992) Kružnica k i njezina tangenta t nalaze se u jednoj ravnini, a točka M je na t. Nađite geometrijsko mjesto točaka P za koje vrijedi: postoje dvije točke Q i R na t tako da je M polovišta dužine $\overline{QR}$, a kružnica k je upisana u trokut PQR.*

Zadatak 5. *(IMO 1982) Dan je raznostraničan trokut $A_1A_2A_3$ sa stranicama a_1, a_2, a_3. Neka je M_i polovište stranice a_i, T_i točka u kojoj upisana kružnica danom trokutu dodiruje stranicu a_i, a S_i točka simetrična točki T_i u odnosu na simetralu unutrašnjeg kuta kod A_i (i=1,2,3). Dokažite da se pravci M_1S_1, M_2S_2 i M_3S_3 sijeku u jednoj točki.*

Extreme Mission: Two Hours Later

Zadatak 6. *(Erdös-Mordellova nejednakost) Dokažite da za svaku točku P unutar trokuta ABC vrijedi da je zbroj udaljenosti točke P od točaka A, B, C barem dva puta veći od zbroja udaljenosti točke P od stranica BC, CA, AB. Kada se postiže jednakost?*

Zadatak 7. *(Schwarzov problem) U dani šiljastokutan trokut upiši trokut najmanjeg opsega.*

Zadatak 8. *(IMO 1981) Za točku P unutar trokuta ABC neka su D, E i F njezine ortogonalne projekcije na pravce BC, CA i AB redom. Nađite sve točke P za koje je*

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

minimalno.

Zadatak 9. *(SL 2001) Neka je G težište trokuta ABC. Nađite sve točke P takve da je $AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG$ minimalno i izrazite taj minimum pomoću stranica trokuta ABC.*

Zadatak 10. *(SL 2000) Tangente u točakama B i A na kružnicu opisanu šiljastokutnom trokutu ABC sijeku tangentu u točki C u točkama T i U, redom. Neka se pravci AT i BC sijeku u točki P, te neka je Q polovište dužine $\overline{AP}$; pravci BU i CA se sijeku u R, a S je polovište dužine $\overline{BR}$. Dokažite da je $\angle ABQ = \angle BAS$, te preko omjera duljina stranica trokuta odredite trokut za koji je taj kut maksimalan.*

Extreme and Beyond Geometry

Zadatak 11. *Neka je $ABCDE$ konveksni peterokut. Njegovom translacijom za vektore $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{AE}$ dobivamo četiri nova peterokuta. Dokažite da među tih pet peterokuta postoje dva koja imaju barem jednu zajedničku točku.*

Zadatak 12. *(IMO 2002/6) Neka su $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ kružnice polumjera 1 u ravnini, pri čemu je $n \geq 3$. Označimo njihova središta redom s $O_1, O_2, ..., O_n$. Pretpostavimo da nijedan pravac nema zajedničkih točaka s više od dvije promatrane kružnice. Dokažite nejednakost*

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{|O_i O_j|} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Zadatak 13. *(Teorem o palačinkama) Neka su A i B dva mnogokuta ravnini. Dokažite da postoji pravac koji istodobno raspolavlja i A i B. Možete li generalizirati ovu tvrdnju?*

Zadatak 14. *(SL 2000) Na prostranom trgu stoji deset gangstera tako da su sve njihove međusobne udaljenosti različite. Točno u podne, kad začuju crkveno zvono, svaki od gangstera puca u onog od preostale devetorice koji mu je najbliži. Koliko će najmanje gangstera poginuti?*

Zadatak 15. *(SL 1996) U ravnini su dani točka O i mnogokut $\mathcal{F}$. Neka je P opseg mnogokuta $\mathcal{F}$, D zbroj udaljenosti vrhova mnogokuta od točke O, a H zbroj udaljenosti točke O od stranica mnogokuta. Dokažite da je $D^2 - H^2 \geq P^2/4$.*