



Što očekujemo od natjecanja iz matematike?

Matija Bašić, PMF-Matematički odsjek

Seminar za nastavnike, Državno natjecanje iz matematike

Primošten, 5. travnja 2016.

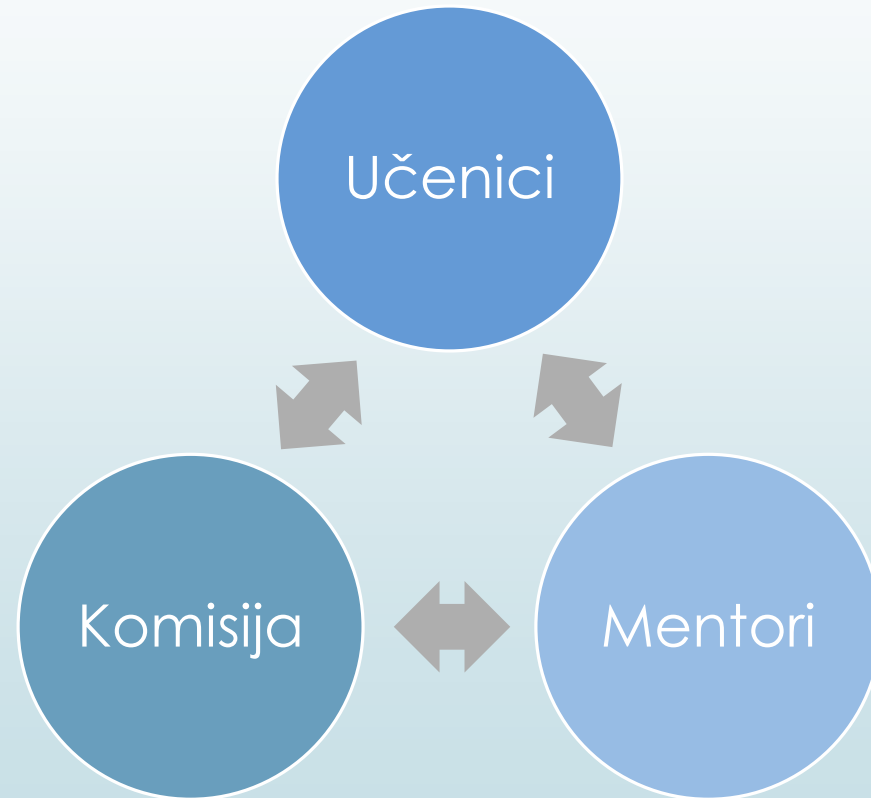
Komentari na školsku razinu (4. razred SŠ A varijanta)

- *45 najboljih matematičara iz tri kvalitetne škole koji su u 3.5 godine odslušali hrpetinu sati matematike i riješili more zadataka, i bez obzira na sve to na većinu jučerašnjeg testa samo odzujali i predali prazne papire*
- *Prije nekoliko godina je, upravo iz navedenih razloga, promijenjena koncepcija samog testa i uvedeni su, osim nekoliko standardno zahtjevnih i „lagani“ (čitaj: rješivi) zadaci koji nose manji broj bodova, ali s vremenom je postalo teško razaznati koji su to?!*
- *Je li uistinu „svrha TAKVIH natjecanja i zadataka, stvoriti matematičku elitu koja će nas zastupati na olimpijadama“?*
- *Što je s klincima koji vole matematiku, koji su u svojim sredinama najbolji, koji se vesele takvim natjecanjima, a onda pokunjeno i s tisuću upitnika u glavi odlaze s njih?*
- *Kome da se žalimo???*

Komentari (općenito)

- *Mislim da obzirom da većina nastavnika i prof. matematike godinama već muče muku i sa školskim i županijskim natjecanjima da oni na "vrhu" nisu baš neinformirani tj. mislim da imaju povratne informacije jer im je to dio posla (bar bi trebao biti), a ipak se ništa ne mijenja. Zar državno povjerenstvo nema uvid u povratne rezultate???* Ja sam poslala popunjenu tablicu koja navodno ide agenciji na uvid, čemu one služe?
- *Nedostaje nama kolega prostora i vremena da odradimo unaprijed s djecom x stvari koje se zahtijevaju na natjecanjima . Isto tako nedostaje osjećaja ,onima koji serviraju zadatke, koji uzrast stoji ispred njih i da ne moraju svi biti genijalci da bi pokazali da znaju "nešto" matematike. Najmanje sta nam nedostaje su materijali i zadatci, vjerujte imamo ih napretek.*
- *Vrtimo se u krug. Primjer - u 5.r učenik nema šanse na natjecanju ako ne savlada jednadžbu, a dotična se u pravom smislu radi u 2. polugodištu šestog. Ovo je samo jedan banalan primjer. Uz to još i metoda i metoda rješavanja zadataka.*

Komunikacija



- ▶ učenici, mentori i članovi komisije nisu suprotstavljene strane - svi dijelimo isti cilj
- ▶ kako komunicirati? javite se DP!
- ▶ poželjno je autoritet preispitivati, a stvarni autoritet je temeljen isključivo na znanju

Zašto natjecanja? Za koga?

- Ciljevi natjecanja: poticanje izvrsnosti i popularizacija

Bitne poruke:

- natjecanja nisu samo za „elitu”
- održavanje standarda (težine) potiče učenike na rad i garantira znanje kao rezultat
- Problem: velike razlike u kvaliteti učenika i nedovoljan broj razina (u A varijanti na državno prolazi 22 od 150 učenika)
- Kad je učenik spreman za natjecanje i tko o tome odlučuje?



Ostali psihološki aspekti

- ▶ visoka motivacija i snažna emocionalna uključenost
- ▶ pritisak (vlastiti ili okoline?) – alternativni projekti nenatjecateljskog karaktera
- ▶ kultura serviranja
- ▶ nedovoljna orijentiranost na rad kao preduvjet uspjeha

Što znači lagan zadatak?

Učenik primjenjuje naučeno:

- Skrati algebarski razlomak...
- Odredi najveću vrijednost kvadratnog izraza...
- Riješi trigonometrijsku jednadžbu...
- Dokaži indukcijom...
- Ako je jedan kut tetivnog četverokuta 108° odredi mjeru nasuprotnog kuta.

Učenik samostalno traži odgovor, za rješenje je dovoljno predznanje s redovite nastave:

- Od devet sukladnih pravokutnika čije dužina i širina su prirodni brojevi sastavljena je pravokutna ploča dimenzija 20×9 . Kojih sve dimenzija mogu biti polazni pravokutnici?
- Točke A, B, C, D, E leže tim redom na kružnici čiji je promjer AE. Odredi zbroj kutova ABC i CDE.

Način rada i ishodi

Medvjeda usluga:

- ▶ nastavnik prezentira rješenje zadatka
- ▶ rješenje prezentiramo neposredno nakon zadavanja zadatka (forma: predavanje kroz koje se ilustrira metoda)
- ▶ izgradnja repozitorija metoda

Ishod: učenik prepoznaje tip zadatka i primjenjuje naučenu metodu, uspješno rješava testove u školi uključujući složenije zadatke iz gradiva

Mane:

- ▶ nedostatak vremena da se "pokriju sve metode"
- ▶ učenici su pasivni i ne usvajaju način razmišljanja
- ▶ nedostaje izgradnja samopouzdanja i samostalnosti učenika
- ▶ učenik ne prepoznaje ključne elemente i nema povratnu informaciju o svom znanju kako bi mogao izgraditi realistična očekivanja

Kompetencije (i u nastavi matematike)





Aktivirajući način rada

- ▶ poticanje učenika na samostalan rad
- ▶ učenik rješava uz nastavnikove minimalne upute
- ▶ pokazivanje strategija rješavanja umjesto metoda
- ▶ učenik samostalno pronalazi i grupira zadatke
- ▶ nastavnik s učenikom rješava i zadatke koji nije vidio prije (razvoj istraživačkog pristupa i prikaz kako se matematika stvara)
- ▶ pokazati emocije (prenošenje interesa)

- ▶ **postizanje aha-efekta**



Ishodi orijentirani na kompetencije

Učenik:

- samostalno ispituje posebne slučajeve
- otkriva uzorak na temelju vlastite logike
- postavlja hipotezu
- dokazuje ili opovrgava hipotezu
- konstruira primjere i kontraprimjere za svoje slutnje
- uvodi vlastite oznake i pomoćne elemente sa svrhom
- ima samopouzdanje da će riješiti zadatak koji nije prije vidio
- uspješno artikulira i prenosi svoje misli drugima (pismeno i usmeno)
- samostalno uči i traži materijale vezane uz određenu temu
- svjesno koristi strategije
- kritički pristupa svom radu
- ima realistična očekivanja

Teme za dodatnu nastavu matematike

Algebra:

- ▶ složeniji zadaci iz gradiva: algebarski izrazi i jednačbe, kompleksni brojevi, kvadratna jednačba i polinomi, eksponencijalna i logaritamska funkcija, trigonometrija, nizovi
- ▶ nejednakosti (županijsko i državno)
- ▶ funkcijske jednačbe (4.r.)

ishodi: algebarska manipulacija i dokazivanje nejednakosti

Kombinatorika:

- ▶ logički zadaci – nema metode
- ▶ Dirichletov princip (osnovna škola)
- ▶ prebrojavanje – osnovni principi (1.r. školsko), dvostruko prebrojavanje (žup. i drž.)
- ▶ invarijante
- ▶ odredi najveći/najmanji...
- ▶ indukcija (3. i 4. r.)

ishodi: metode dokazivanja

Teme za dodatnu nastavu matematike

Geometrija:

- sukladnost i sličnost
- karakteristične točke trokuta
- površine
- tetivni četverokut (1.r. državno, ostali razredi od školske razine)
- stereometrija, vektori, analitička geometrija

ishodi: dokazivanje, svrhovito crtanje dodatnih elemenata, angle chasing

Teorija brojeva

- zadaci sa znamenkama, zapis u bazi, kriterij djeljivosti za 3 i 9 (OŠ)
- djeljivost – djelitelji (broj, sparivanje), mjera, rastav na proste faktore
- diofantske jednačbe
 - faktorizacija
 - metoda kvocijenta
 - periodičnost ostataka mod n

ishodi: korištenje oznaka, primjena djeljivosti, rješavanje jednačbi



Kako pripremiti učenike?

(Brookhart, 2010) viši oblici mišljenja su

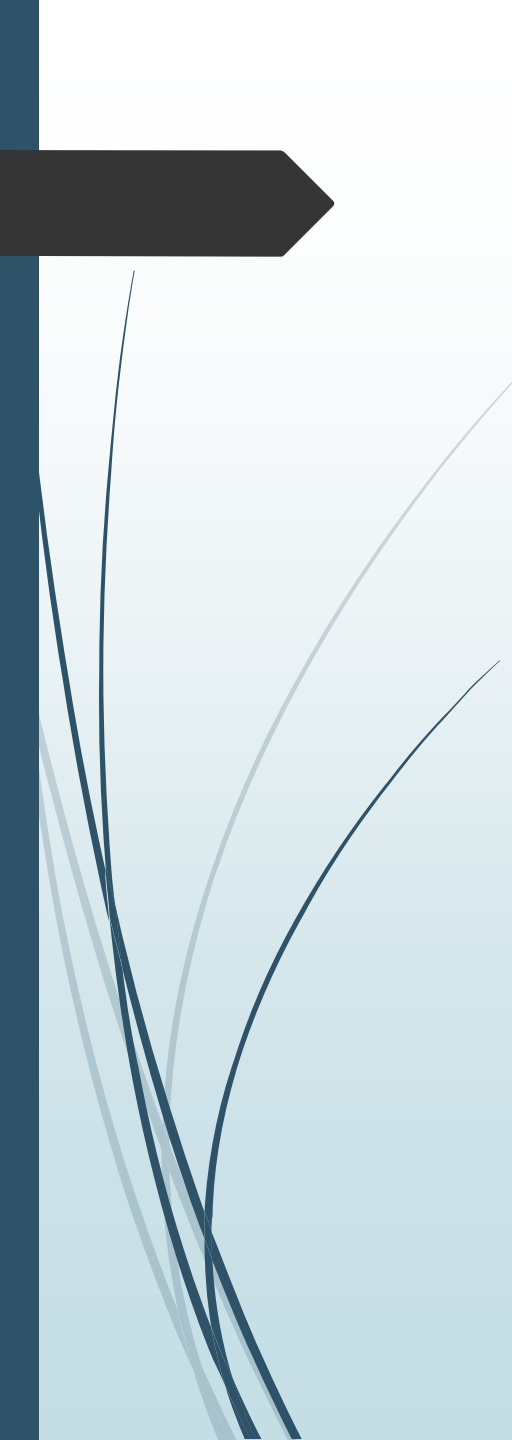
- ▶ transfer (upotreba) - mogućnost prisjećanja i primjene u stvarnim situacijama
- ▶ kritičko razmišljanje – procjena kredibiliteta izvora informacija, identifikacija hipoteza, razumijevanje svrhe pisanog teksta, kritika efikasnosti strategija
- ▶ rješavanje problema – situacije u kojima želimo postići specifični cilj, ali ne vidimo put ili rješenje kako cilj postići

Metode rješavanja problema:

- ▶ prisjećanje informacija i metoda, kritička evaluacija ideja, formuliranje kreativnih alternativa, efikasna komunikacija

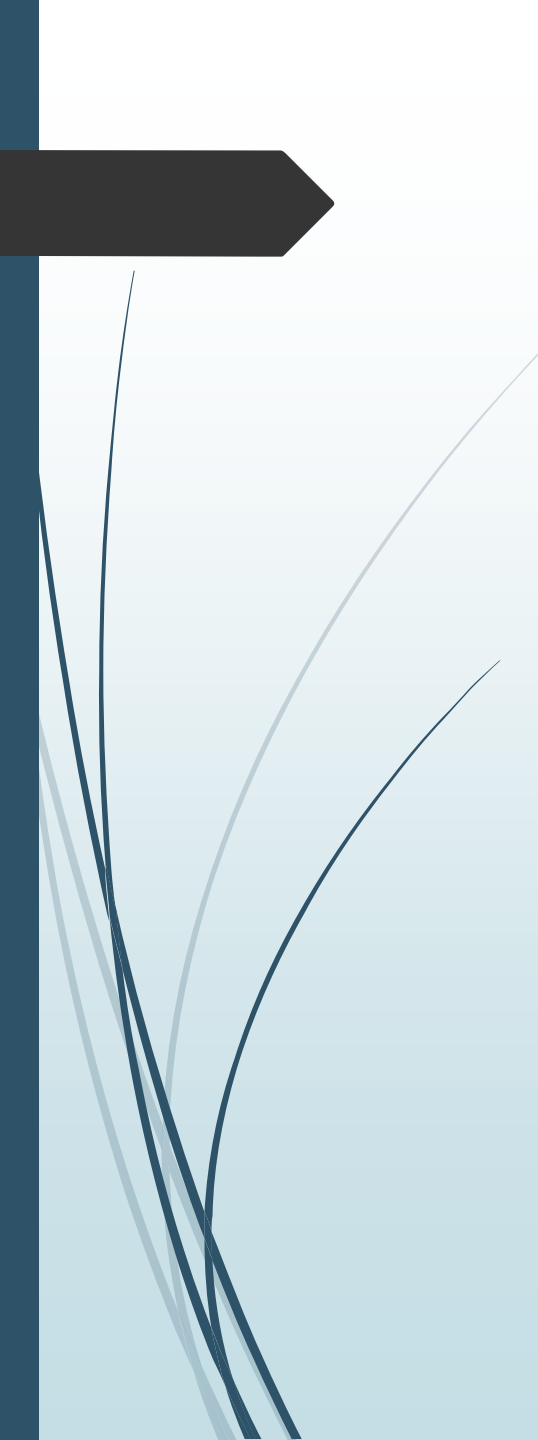
Kako pripremiti učenike?

- **SVRHA:** pri uvođenju oznaka i dodatnih elemenata rješenje objasniti svrhu – je li svrha nama poznata? jesmo li samostalno došli do onoga o čemu pričamo?
- **PLAN:** planirati vrijeme za pitanja, poticati raspravu – planirati znači pripremiti se za moguće smjerove u kojima rasprava može otići, potrebna fleksibilnost
- **JASNOĆA:** jasno uvesti nove koncepte (pojmove, metode), naglasak na malom broju ključnih osnovnih koncepata, ne poticati preskakanje
- **PODRŠKA:** pronaći ravnotežu u odnosu, poticanje u inicijalnim fazama, strpljivost, pažljivo prepuštanje odgovornosti učeniku da preuzme inicijativu, poticanje samostalnosti, ohrabrivanje
- **METAKOGNICIJA:** osvijestiti strategije i više oblike razmišljanja koje koristimo, mijenjati kontekst, povezivati sa primjenama



Primjer: Dokaži da se simetrala kuta i simetrala nasuprotne stranice sijeku na opisanoj kružnici trokuta.

- preduvjet: poznavanje svih pojmova, dokaz da se simetrale kuta sijeku u jednoj točki (ili neki drugi primjer kopunktalnosti), teorem o obodnim kutovima
- što želimo dokazati? strategija: preformulirati tvrdnju
- što nam je poznato? definicija simetrala
- ključno: preformulacija i korištenje kutova



Primjer: Dokaži da je ortocentar trokuta središte upisane kružnice trokuta kojem su vrhovi nožišta visina.

- preduvjet: poznavanje definicija, susret sa situacijom četverokut je tetivan ako su mu nasuprotni kutovi pravi
- kako dokazati da je nešto središte upisane kružnice?
- reformulacija što želimo pokazati
- kako ćemo iskoristiti uvjete zadatka?
- uočavanje tetivnosti
- zašto nam je tetivnost korisna?



Kako pripremiti temu *Tetivni četverokut*?

- ▶ zadaci sa starih natjecanja – školsko za 2. r, državno za 1. r., viši razredi
- ▶ materijali s priprema za međunarodna natjecanja (natjecanja.math.hr)
- ▶ knjiga Planimetrija, S. Marić
- ▶ knjige za problem solving:
 - ▶ A. Engel, Problem Solving Strategies
 - ▶ P. Zeitz, Art and Craft of Problem Solving

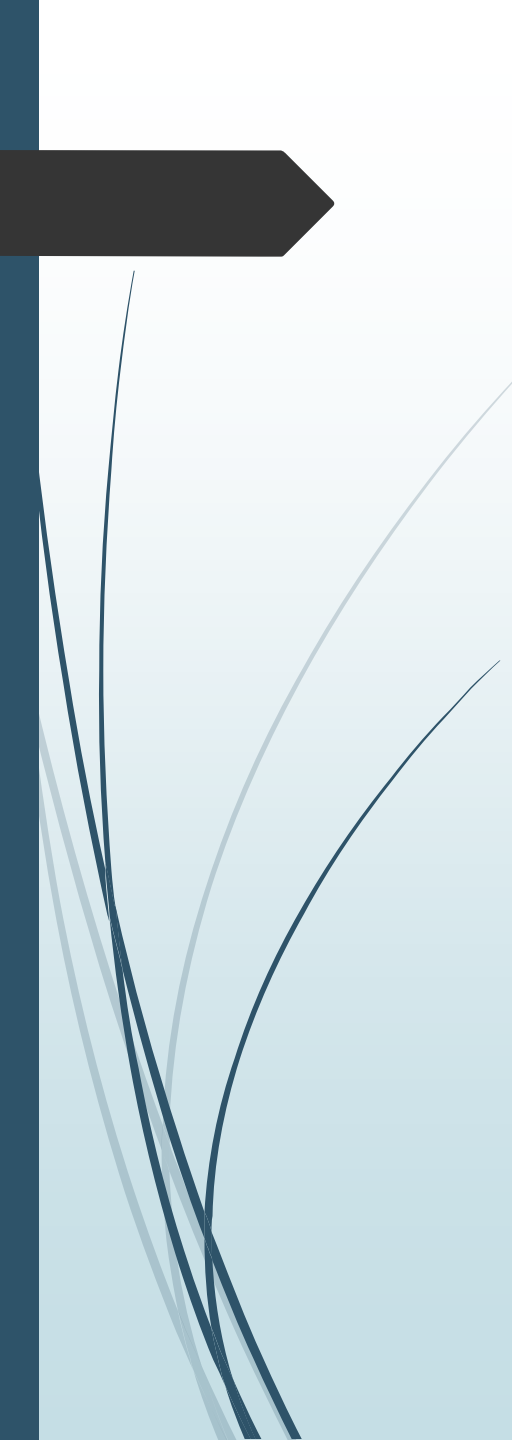
Tema za OŠ: Što je dokaz?

- ▶ Uoči pravilnost:
 - ▶ $17^2 - 6^2 = 11 \times 23$
 - ▶ $9^2 - 2^2 = 7 \times 11$
 - ▶ $14^2 - 5^2 = 9 \times 19$
- ▶ Formuliraj svoju tvrdnju!
- ▶ Je li ta tvrdnja točna? Kako možemo biti sigurni?
- ▶ Dokaz: distributivnost množenja prema zbrajanju realnih brojeva



Zadatak: Dokaži da je razlika kvadrata dva uzastopna neparna cijela broja djeljiva s 8.

- Kako zapisati da je broj paran? (odgovori: paran, p , 2 dijeli n , $n = 2k$)
- Kako zapisati da je neparan?
- Kako zapisati razliku dva uzastopna cijela broja?
- Primjena formule – paziti na zagrade!
- Zaključak – djeljivost sa 8 kao i oznaka za paran broj na početku



Zadatak: Je li $n^2 - n + 41$ prost broj za svaki prirodni broj n ?

- Rezultati za $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ – što možete zaključiti?
- Učenici uočavaju da se razlika povećava i da su povećanja uzastopni neparni brojevi – to je svojstvo kvadrata!
- Kako dokazati slutnju?
- Uloga kontraprimjera.
- Veza s predrasudama u društvu.

Zadatak: čučnjevi (državno 2014. 1. r. SŠ A var.)

- Na početku su svi učenici u čučnju.
- U k-tom koraku svaki k-ti učenik mijenja položaj – iz čučnja stane iz stajanja čučne.
- Tko će ostati stajati nakon svih koraka?

Zadatak je na DN riješilo otprilike 10 učenika, prosjek bodova: 4,3.

Učenicima je najveći problem bio razmišljati apstraktno.

Na dodatnoj nastavi:

- Učenici provode igre i vide rezultat: 1, 4, 9, 16,...
- Učenici u parovima raspravljaju i ispunjavaju upitnik s pitanjima koja su grupirana: analiza pojedinog koraka, analiza pojedine osobe, izvođenje zaključaka

Pitanja s radnog listića za zadatak s čučnjevima – 1. grupa

- *Koje brojeve su imali učenici koji su promijenili položaj u 5. koraku?*
- *Koje brojevi su imali učenici koji su promijenili položaj u k-tom koraku?*
- *Dopunite rečenicu:*

*U k-tom koraku su promijenili položaj oni učenici čiji brojevi su
_____ brojem k.*

- **Komentar:** učenici osnovne škole tek uče koristiti oznake, numerički bez problema odgovaraju na ovakva pitanja i razumiju djeljivost, ali nije jasno kako na drugačiji način zapisati odgovor na drugo pitanje

Pitanja s radnog listića za zadatak s čučnjevima – 2. grupa

- U kojim sve koracima je promijenio položaj učenik koji ima broj 9?
- Koliko puta je promijenio položaj učenik koji ima broj 12?
- Dopunite rečenice:

Učenik je promijenio položaj onoliko puta koliko njegov broj ima _____.

Učenici koji su ostali stajati promijenili su položaj _____ mnogo puta.

- **Komentar:** učenici bez problema odgovaraju na sva pitanja osim posljednjeg jer ono nije dovoljno jasno zadano – potrebno je drugačije navoditi ih na parnost, intervencija predavača

Pitanja s radnog listića za zadatak s čučnjevima – 3. grupa

- *Koje brojeve su imali učenici koji su na kraju ostali stajati?*
- *Koliko učenika će stajati ako bi ukupno sudjelovalo 100 učenika?*
- *Dopunite rečenicu:*

Brojevi učenika koji su na kraju ostali stajati imaju zajedničko svojstvo.

Svi ti brojevi su _____

- *Napišite svoje zaključke.*

- **Komentar:** u ovoj grupi pitanja su primjerena, učenicima nisu prelagana i ostvaraju ključnu poveznicu između kvadrata i broja djelitelja

Odgovori (zaključci) učenika

- ▶ Kvadrati su ostali stajati (1, 4, 9,...)
- ▶ Kvadrati svih brojeva imaju neparan broj djelitelja. - **7. i 8. razred**
- ▶ 1) Svi kvadratni brojevi imaju neparan broj djelitelja. 2) Promijenili smo položaj onoliko puta koliko naš broj ima djelitelja. – **6. razred**
- ▶ Bilo je zabavno. – **7. razred**
- ▶ Ostali su stajati učenici s kvadratima nekog broja, a u 100 ima 10 kvadrata. – **8. razred**
- ▶ Ovo je bila zabavna igra. LOL! OMG!!! Promijenili smo položaj koliko naš broj ima djelitelja – **6. razred**
- ▶ Kvadrati brojeva su ostali stajati. Promijenili smo položaj onoliko puta koliko naš broj ima djelitelja. Ostali su stajati oni učenici čiji br. ima neparno djelitelja. Ako je broj kvadrat, onda ima neparno mnogo djelitelja. – **8. razred**



Dokaz naših tvrdnji

Prirodni broj je kvadrat *ako i samo ako* ima neparno mnogo djelitelja.

- ▶ Ideja sparivanja
 - ▶ moguće povezati s Gaussovom dosjetkom
- ▶ Mogućnosti za dalje: formula za broj djelitelja
 - ▶ $12?$ – direktno
 - ▶ $120?$ – uparivanje, dovoljno je provjeriti do korijen
 - ▶ $360000?$ – prebrojavanje
 - ▶ izvod opće formule

Što dalje?



Hvala na pažnji!

Sretno na natjecanju!

Kontakt:
mbasic@math.hr