Teorija brojeva na natjecanjima

Azra Tafro

Stručni skup - Natjecanja iz matematike u A kategoriji srednje škole
Zagreb, kolovoz 2016.

Teorija brojeva na natjecanjima

- Svaka razina natjecanja u A varijanti sadrži (barem) jedan zadatak iz teorije brojeva
- Gradivo potrebno za rješavanje zadataka uglavnom je obuhvaćeno (redovnom) nastavom, ali nije direktno primjenjivo

Primjer

Dokažite da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj.

Je li očito?

Ako su a i b prirodni brojevi takvi da je $a^2 = b^3$, onda postoje prirodni brojevi c i d takvi da je $a = c^3$ i $b = d^2$.

Osnovne teme

- zadaci sa znamenkama, korištenje dekadskog sustava, kriterij djeljivosti sa 3 i 9
- djeljivost – djelitelji (broj, sparivanje), mjera, rastav na proste faktore
- faktorizacija
- periodičnost ostataka potencija modulo n
- interdisciplinarne tehnike: matematička indukcija, prebrojavanje, algebarske manipulacije...

Pripreme za natjecanje, dodatne teme

- diofantske jednadžbe (1.r, školsko) – Euklidov algoritam i linearne diofantske jednadžbe, metoda faktorizacije, metoda kvocijenta,...
- polinomi (2.r, školsko)
- kongruencije

Cilj pripreme:

- savladavanje osnovnih tehnika,
- odabir ideja prikladnih za rješavanje zadatka,
- donošenje i **izražavanje** zaključaka.

Literatura

- Peter Vandendriessche, Hoojoo Lee, *Problems in Elementary Number Theory*
- Michael Th. Rassias, *Problem-Solving and Selected Topics in Number Theory*
- Naoki Sato, *Number Theory*
- Dolinka, *Elementarna teorija brojeva*
- Andrej Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, skripta za istoimeni kolegij na PMF-MO

Literatura, dodatno

- Andreescu T., Savchev S.: *Mathematical Miniatures*, Anneli Lax New Mathematical Library (2003)
- Engel, A.: *Problem Solving Strategies*, Springer (1997)
- Larson, L.C.: *Problem-Solving Through Problems*, Springer (1983)
- Zeitz, P.: *The Art and Craft of Problem Solving*, Wiley& Sons (2006)
- Natjecanja (domaća, MEMO, IMO):
  - http://natjecanja.math.hr/
  - http://www.imo-official.org/
- www.artofproblemsolving.com/Forum (mathlinks.ro)
- www.skoljka.org

Županijsko natjecanje 2015., 1. razred

Za prirodne brojeve a, b i prost broj p vrijedi $a^2 + p^2 = b^2$. Dokaži da je $2(b + p)$ kvadrat nekog prirodnog broja.

Prvo rješenje

Dokazat ćemo $2(b+p) = (p+1)^2$.
Prebacivanjem a^2 na desnu stranu dobivamo ekvivalentnu jednakost $p^2 = b^2 - a^2$. Desnu stranu faktoriziramo kao razliku kvadrata: $p^2 = (b-a)(b+a)$.
Budući da su a i b prirodni, brojevi $b-a$ i $b+a$ su različiti prirodni djelitelji broja p^2, koji ima samo tri djelitelja: 1, p i p^2.
Stoga je $b-a=1$ i $b+a=p^2$.
Zbrajanjem dobivenih jednadžbi dobivamo $2b = 1+p^2$.
Slijedi da je

$$2(b+p) = 2b + 2p = p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2,$$

pa je $2(b+p)$ zaista kvadrat prirodnog broja $p+1$.

Drugo rješenje

Ako je $p = 2$, onda je $a^2 + 4 = b^2$. Kvadrati 1^2 i 2^2 se razlikuju za 3, a razlika između bilo koja druga dva kvadrata iznosi barem 5, pa je nemoguće da je $p = 2$.
Dakle, možemo pretpostaviti da je p neparan prost broj.
Brojevi a, p i b čine Pitagorinu trojku, pa postoje prirodni brojevi d, m i n takvi da je

$$a = 2mnd, \quad p = d(m^2 - n^2), \quad b = d(m^2 + n^2).$$

Budući da je p prost broj, mora vrijediti $d = 1$.
Zbrajanjem dobivamo

$$2(b + p) = 2(m^2 - n^2 + m^2 + n^2) = 4m^2,$$

što je potpun kvadrat.

Treće rješenje

Dokažimo da brojevi b i p oba moraju biti neparni.
Ako je $p = 2$, onda je $a^2 + 4 = b^2$. Kvadrati 1^2 i 2^2 se razlikuju za 3, a razlika između bilo koja druga dva kvadrata iznosi barem 5, pa je nemoguće da je $p = 2$. Dakle, možemo pretpostaviti da je p neparan prost broj.
Ako je b paran broj, onda bi a morao biti neparan broj, pa bi broj $a^2 + p^2$ davao ostatak 2, dok bi b^2 davao ostatak 0 pri dijeljenju sa 4. Zato je b neparan broj.
Prebacivanjem p^2 na desnu stranu dobivamo ekvivalentnu jednakost $a^2 = b^2 - p^2$. Desnu stranu faktoriziramo kao razliku kvadrata: $a^2 = (b - p)(b + p)$.
Rješenje baziramo na sljedećoj činjenici: ako su x i y relativno prosti brojevi za koje je xy potpun kvadrat, onda su x i y također potpuni kvadrati.

Treće rješenje, nastavak

Ideja je pokazati da je $M(b-p, b+p) = 2$ jer iz toga slijedi da je $b-p = 2x$, $b+p = 2y$ i $xy = \frac{a^2}{4} = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, te su x i y relativno prosti brojevi. Prethodno navedena činjenica tada povlači da je y potpun kvadrat, pa je zato i $2(b+p) = 4y$ potpun kvadrat.
Vrijedi $M(b-p, b+p) = M(2p, b+p)$.
Budući da je $b+p$ paran broj, da bismo pokazali da je $M(b-p, b+p) = 2$, dovoljno je pokazati da p ne dijeli b.
Ako p dijeli b, onda p dijeli a i možemo pisati $a = pk$, $b = pl$ i $k^2 + 1 = l^2$. Budući da se nikoja dva kvadrata ne razlikuju za 1, dobivamo kontradikciju.

Županijsko natjecanje 2016., 4. razred

Odredi sve parove cijelih brojeva (a, b) za koje vrijedi

$$(7a - b)^2 = 2(a - 1)b^2.$$

Rješenje

Ako je $b = 0$, onda je $a = 0$ i to je jedno rješenje. Nadalje pretpostavimo da je $b \neq 0$.
Uočimo da $2(a-1)$ mora biti kvadrat cijelog broja. Zato možemo pisati $a - 1 = 2k^2$, tj. $a = 2k^2 + 1$ za neki cijeli broj k.
Tada je $7a - b = \pm 2kb$, tj. $7(2k^2+1) - b = \pm 2kb$.
Budući da nismo zahtijevali da je $k > 0$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $7(2k^2+1) - b = 2kb$.
Izrazimo li b preko k dobivamo

$$b = \frac{7(2k^2+1)}{2k+1}$$

Budući da b mora biti cijeli broj, $2k+1$ mora dijeliti $7(2k^2+1)$.

Rješenje, nastavak

Kako je

$$\begin{aligned} 2 \cdot 7(2k^2+1) &= 2 \cdot 7(2k^2+1) - 7 + 7 \\ &= 7(4k^2-1) + 21 = 7(2k-1)(2k+1) + 21, \end{aligned}$$

zaključujemo da $2k+1$ dijeli $7(2k^2+1)$ ako i samo ako $2k+1$ dijeli 21.
Za svaki cijeli broj k za koji $2k+1$ dijeli 21, rješenje dane jednadžbe je

$$a = 2k^2 + 1, \quad b = \frac{7(2k^2+1)}{2k+1}.$$

Uz rješenje $(a, b) = (0, 0)$, imamo još 8 rješenja (po jedno za svaki pozitivni i negativni djelitelj broja 21) koja radi preglednosti zapisujemo kao trojke (k, a, b): $(0, 1, 7)$, $(1, 3, 7)$, $(3, 19, 19)$, $(10, 201, 67)$, $(-1, 3, -21)$, $(-2, 9, -21)$, $(-4, 33, -33)$, $(-11, 243, -81)$.

Hvala na pažnji!

Kontakt: azra.tafro@math.hr