

# Kombinatorni zadaci na natjecanjima

Ekstremi i Dirichletov princip

**Azra Tafro**

Međužupanijski stručni skup nastavnika matematike  
9. i 10. srpnja 2013.

# Teme iz kombinatorike

- Logičko-kombinatorni zadaci
- Invarijante
- Matematička indukcija
- Princip ekstrema (kombinatorna geometrija)
- Dirichletov princip
- Dvostruko prebrojavanje
- Igre i algoritmi

Cilj: razvoj kritičkog i (ne)linearnog razmišljanja, formuliranje i zapisivanje ideja

# Ekstremi

Ideja:

- Pronaći svojstvo elemenata problema na kojem postoji uređaj
- Odabrati najveći (najmanji) član
- Riješiti zadatak?

## Primjer

U ravnini je dano konačno mnogo crnih i bijelih točaka sa svojstvom da svaka dužina koja spaja istobojne točke sadrži točku druge boje. Dokažite da sve točke leže na istom pravcu.

# Problem definiranja problema

## Primjer 2

Nekoliko figura je postavljeno na šahovsku ploču. U svakom potezu pomičemo jednu figuru na slobodno mjesto na kojem nije prethodno bila. Figure i raspored su takvi da svaka figura može obići sva polja i vratiti se na početni položaj. Dokažite da postoji trenutak u kojem nijedna figura nije na svom početnom položaju.

# "Skriveni" ekstremi

## Zadatak 1

U ravnini je dano  $n$  plavih i  $n$  crvenih točaka tako da nikoje tri nisu kolinearne. Pokažite da te točke možemo rasporediti u raznobojne parove tako da se dužine koje spajaju točke u istom paru ne sijeku.

## Zadatak 2

U ravnini je dano  $n$  točaka tako da ne leže sve na istom pravcu. Pokažite da postoji pravac koji sadrži točno dvije.

# Ekstremi na natjecanjima

## Državno natjecanje 2010/2011., 1. razred

Supružnici Ana i Tomislav došli su na zabavu na kojoj su sudjelovala još četiri para. Prilikom dolaska dogodio se izvjestan broj rukovanja. Pritom se nitko nije rukovao sa svojim bračnim drugom niti sa samim sobom. Kada je kasnije Tomislav upitao sve prisutne s koliko su se osoba rukovali, dobio je devet različitih odgovora. S koliko se osoba rukovala Ana?

# Dirichletov princip

- eng. *pigeonhole principle*
- M. Krnić: *Dirichletovo pravilo*, HMD (2001)

## Dirichletov princip

Ako  $n + 1$  predmeta rasporedimo u  $n$  kutija (pretinaca), onda barem jedna kutija sadrži barem dva predmeta.

## Dirichletov princip - poopćeno

Ako  $n$  predmeta rasporedimo u  $k$  kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem  $\lfloor n/k \rfloor + 1$  predmeta.  
( $\lfloor x \rfloor$  označava najveći cijeli broj koji nije veći od  $x$ .)

# Dirichletov princip u različitim područjima

## Geometrija

U jediničnom kvadratu dano je 5 točaka. Dokažite da postoje barem dvije čija udaljenost je manja od  $\sqrt{2}/2$ .

## Teorija brojeva (IMO 1972)

Dokažite da u skupu od 10 različitih 2-znamenkastih brojeva možemo naći dva disjunktna podskupa čiji članovi imaju istu sumu.

## Teorija brojeva (Erdos)

Dano je  $n + 1$  prirodnih brojeva koji nisu veći od  $2n$ . Dokažite da postoje dva broja takva da je jedan djeljitelj drugog.



# Dirichletov princip na natjecanjima

## Državno natjecanje 2012/2013., 2. razred

Dana je tablica  $6 \times 6$ . Ako je označeno bilo kojih 9 polja tablice, dokaži da je moguće odabrati tri retka i tri stupca koji sadrže sva označena polja.

## Državno natjecanje 2007/2008., 2. razred

Dano je 10 složenih brojeva manjih od 840. Dokažite da među njima postoje barem dva broja koja nisu relativno prosta.

# Dirichletov princip na natjecanjima, cont.

- Problem identifikacije "kutija" i "predmeta"
- Kombinacija sa ostalim (logičko-kombinatornim) tehnikama i metodama

## Županijsko natjecanje 2003/2004., 3. razred

U sva polja tablice  $100 \times 100$  upisani su brojevi  $1, 2, \dots, 100$  i to tako da se svako pojavljuje točno 100 puta. Pokažite da postoji redak ili stupac u kojem ima barem 10 različitih brojeva.

*Dvostruko prebrojavanje* - metoda u kojoj se isti elementi broje na dva različita načina, zaključci slijede iz usporedbe rezultata.

## Izvori zadatka :

- Andreescu T., Savchev S.: *Mathematical Miniatures*, Anneli Lax New Mathematical Library (2003)
- Engel, A.: *Problem Solving Strategies*, Springer (1997)
- Larson, L.C.: *Problem-Solving Through Problems*, Springer (1983)
- Zeitz, P.: *The Art and Craft of Problem Solving*, Wiley& Sons (2006)
- Natjecanja (domaća, MEMO, IMO):
  - [public.carnet.hr/mat-natj/](http://public.carnet.hr/mat-natj/)
  - <http://www.imo-official.org/>
- [www.artofproblemsolving.com/Forum](http://www.artofproblemsolving.com/Forum) (mathlinks.ro)
- [www.skoljka.org](http://www.skoljka.org)

Hvala na pažnji!