

Matija Bašić

AHA!

PUTOVANJE U SREDIŠTE PROBLEMA

# SADRŽAJ

<b>Uvod</b>	<b>iii</b>
<b>R Rješavanje matematičkih problema</b>	<b>1</b>
R.1 Što je problem? . . . . .	2
R.2 Strategije za rješavanje problema . . . . .	7
R.2.1 Razumijevanje problema . . . . .	8
R.2.2 Smišljanje plana . . . . .	10
R.2.3 Provedba plana . . . . .	12
R.2.4 Refleksija . . . . .	15
R.3 Dodatne heuristike i primjeri . . . . .	17
<b>K Kombinatorika</b>	<b>41</b>
K.1 Kombinatorno razmišljanje . . . . .	41
K.1.1 Što je kombinatorika? . . . . .	41
K.1.2 Glavna pitanja u kombinatorici . . . . .	43
K.1.3 Tri osnovna primjera . . . . .	44
K.2 Princip uzastopnog prebrojavanja . . . . .	56
K.3 Podijeli pa vladaj . . . . .	60
K.4 Prebrojavanje sa strukturom . . . . .	65
K.5 Princip kvocijenta . . . . .	73
K.6 Uvod u vjerojatnost . . . . .	75
K.7 Popločavanja i bojenja . . . . .	81
K.8 Parnost i druge invarijante . . . . .	86
K.8.1 Parnost i grafovi . . . . .	92
K.9 Dirichletov princip . . . . .	98
K.10 Matematičke igre . . . . .	108
K.11 Optimizacija i konstrukcija . . . . .	117
K.12 Dvostruko prebrojavanje – turniri, natjecanja i zabave . . . . .	127
K.12.1 Nejednakosti u kombinatorici . . . . .	137
K.13 Matematička indukcija u kombinatorici . . . . .	138
K.14 Princip ekstrema . . . . .	150
K.14.1 Diskretni teorem srednje vrijednosti i konveksna ljuska . . . . .	159
K.15 Prebrojavanje podskupova fiksne veličine . . . . .	163
K.16 Formula uključivanja-isključivanja . . . . .	170
K.17 Princip bijekcije . . . . .	174
<b>Bibliografija</b>	<b>181</b>

## UVOD

„Matematičar, kao slikar ili pjesnik, stvara uzorke. Ako su njegovi uzorci postojaniji, to je zato što su stvoreni idejama.”

---

G. H. Hardy  
*A Mathematician's Apology*

## ZAŠTO OVA KNJIGA?

Mnogi kažu da je jako teško opisati što se događa dok rješavamo probleme i da je zato nemoguće dati upute i napisati knjigu o tome. Ipak, pred vama je tekst u kojem se nastoji analizirati osobno razmišljanje pri rješavanju matematičkih zadataka i prezentirati što se događa u tom procesu. Za razliku od klasičnih zbirki, rješenja u ovoj knjizi nisu pisana u svojoj finalnoj skraćenoj formi, već je svako rješenje **putovanje** u kojem se pitamo **kako** i **zašto**.

Rješavanje matematičkih zadataka pruža veliko zadovoljstvo nekim učenicima, iako mnogima zadaje glavobolje. Cilj ove knjige je na prijateljski način približiti rješavanje problema i matematički način razmišljanja čitateljima različitih interesa i ambicija. Kroz mnoštvo zadataka i rješenja želimo pomoći svima koji imaju interesa za dodatni rad i užitek uz matematičke probleme. Većina problema u ovoj knjizi je preuzeta s raznih natjecanja te se knjigu može koristiti kao pripremu za natjecanja, ali nastojanje autora je bilo napisati tekst koji se može koristiti mnogo šire – kao **promociju zanimljive strane matematike** koja nerijetko nedostaje u redovnom školskom programu.

Ovaj tekst se prvi put objavljuje u doba učenja na daljinu i izazova koji pred sve donosi epidemiološka kriza, a podudara se i s uvođenjem kurikulne reforme u kojoj se veliki naglasak stavlja na **rješavanje problema** uz vrlo ograničene materijale koji bi podržali problemsku nastavu. Stoga knjiga može koristiti nastavnicima u pripremi dodatne i redovne nastave, kao udžbenik o rješavanju problema za buduće nastavnike, te svim učenicima koji samostalno žele istraživati matematičke probleme.

Knjiga je pisana kroz dulji niz godina, a problemi koje se obrađuje odabrani su na temelju dugogodišnjeg iskustva iz perspektive natjecatelja, mentora i sastavljača ispita za razne razine natjecanja. To iskustvo kazuje da je ovakva knjiga potrebna iz više razloga. Postoji značajan broj natjecatelja, mentora i raznih drugih ljudi zainteresiranih za dodatne materijale iz matematike, te takvima nedostaje kvalitetne literature koja bi im pomogla u sustavnom

radu. Zbog raznih razloga, natjecatelji se pripremaju samostalno pri čemu nisu sigurni na koji način se efikasno pripremati i koje materijale koristiti. Istina je da postoji poprilična literatura za pripremu za međunarodna natjecanja koja je dostupna na engleskom jeziku, ali rijetki su naslovi prevedeni na hrvatski. Još je teže pronaći zbirke sa zadacima koji bi bili primjereni **pripremi za niže razine natjecanja**, za uvod u rješavanje matematičkih zadataka i za **rekreativno bavljenje matematikom**.

Jedna od ključnih prepreka u pripremi za natjecanja je pogrešan način rada koji proizlazi iz načina na koji se pišu zbirke s matematičkim zadacima. Rješenja se zapisuje formalno, precizno i deduktivno, a razmišljanje koje je prethodilo otkrivanju pojedinog rješenja ostaje skriveno čitatelju. Zato rješenja problema najčešće djeluju kao da su „pala s neba” i njihovim čitanjem ne postajemo pametniji kako riješiti novi zadatak. U ovoj knjizi smo odlučili obraditi manji broj primjera s referencama na dodatne izvore zadataka, a u posebnim primjerima opisujemo proces razmišljanja kroz duge diskusije, nalik dijalogu s mentorom ili sa samim sobom. Pritom naglašavamo da **matematiku ne treba vježbati, već razumjeti**. Ili da je vježbanje zapravo u razmišljanju o problemu koji ne znamo riješiti, a ne u samom čitanju rješenja. Nakon što su nam koncepti jasni, jedino što vježbom trebamo dobiti je brzina u provedbi standardnih postupaka, što zovemo proceduralna fluentnost. Važno je imati na umu da uspjeh ne dolazi preko noći, no vrijeme možemo koristiti **efikasnije i jednostavnije postizati rezultate** ako smo vođeni pravim informacijama i pristupom.

S druge strane, postoji velik broj učenika koji nemaju nikakav interes za matematiku, logičko zaključivanje, rješavanje problema... Unatoč tome što su matematika i ostale prirodne znanosti glavni pokretač razvoja tehnologije i promjena u društvu, **u školama je matematika prestandardizirana i pretrpana gradivom koje se uči bez razumijevanja**. Kao posljedica, učenje matematike se u čitavom društvu percipira nezanimljivim, nepoticašnjim ili nebitnim za svakodnevni život.

Znate li da se CT-sliku mozga dobiva spajanjem dvodimenzionalnih presjeka u jednu trodimenzionalnu sliku? Zašto na geografskim kartama područja bliža polovima izgledaju veća nego područja kraj ekvatora? Znate li da se prijenos informacija putem interneta i preusmjerenje telefonskih poziva matematički opisuje na isti način kao i promet automobila na autocestama? Što znači da se epidemija širi eksponencijalno? Znate li da su vaši podaci na sigurnom jer su kriptirani pomoću velikih prostih brojeva? Da sklad u glazbi i likovnoj umjetnosti možemo izraziti kao omjere? A da se oglasi na društvenim mrežama temelje na grafovima, statistici i trigonometriji? I da je matematika sastavni dio svih odgovora?

Ovi primjeri pokazuju da je matematika posvuda oko nas i da je vrlo korisna. Proces kojim svakodnevni problem opisujemo matematičkim jezikom nazivamo **matematičko modeliranje**. Rezultati tih primjena matematike nas ushićuju, zadivljuju, a ponekad možda i zastrašuju. Zaista, da bismo naučili kako koristiti matematiku u primjenama, potrebno je razviti određeni način razmišljanja. Taj način razmišljanja je apstraktan i počiva na logičkom zaključivanju, a njegova snaga je upravo u tome što je formalan, slijedi zadana pravila i ne dozvoljava da se situacije interpretira kako god poželimo. Ljudski mozak brzo reagira na emotivnoj i intuitivnoj razini, a sporo kad treba koristiti logiku i simbole. Stoga je za razvijanje vještine rješavanja matematičkih problema potrebno strpljenje i pažljivo kreiranje put koji ohrabruje i pokazuje **da se matematiku može naučiti**, i još k tome može biti zabavna! U ovoj knjizi nećemo koristiti primjere iz svakodnevnog života niti prikazati primjene



matematike koje gore spominjemo, već ćemo se fokusirati na ljepotu matematičke misli. Čitatelja želimo potaknuti na bavljenje matematikom kroz zadatke čije rješavanje zahtijeva **misaonu aktivnost, kreativnost i netipičan način razmišljanja**. Naš cilj je pokazati da matematika nije sastavljena od suhoparnih formula i da se rješavanjem apstraktnih matematičkih zadataka pojavljuju razni pozitivni osjećaji – uzbuđenje, ponos, samopouzdanje, sreća, ushit.

Primjeri koje koristimo najčešće ne zahtijevaju posebno predznanje, ali to ne znači da mislimo čitatelja prepustiti samom sebi, već mu raznim savjetima pomoći kako poboljšati svoje sposobnosti u rješavanju problemskih zadataka i svladati osnovne matematičke metode koje se često primjenjuje. Budući da je pristup rješavanju problema vrlo individualan, materijali su prezentirani na različite načine i s više aspekata. Vjerujemo da će upravo ta raznolikost povećati interes za matematiku jer će olakšati **aktivno uključivanje čitatelja** u rješavanje. Poglavlja organizirana kroz specifične teme mogu omogućiti mentorima bolju pripremu za rad sa zainteresiranim učenicima, a učenicima bez mentora biti pomoć u samostalnom radu.

## MATEMATIČKA NATJECANJA I RJEŠAVANJE PROBLEMA

Možemo reći da je ova knjiga uvelike namijenjena natjecateljima, no istovremeno pruža svjež pogled na matematiku i može biti poticaj raznim čitateljima da preispitaju svoje stavove prema razmišljanju i rješavanju zadataka. Neka od glavnih pitanja kojima se tako bavimo su:

- Što je matematika?
- Kako se natjecateljska matematika razlikuje od zadataka na redovnoj nastavi?
- Što je potrebno da bismo bili dobri matematičari?
- Što znači nešto dokazati?
- Kako napredovati u rješavanju problema?

Jedna od najopćenitijih definicija kaže da se matematika bavi količinom i brojevima, uzorcima i strukturama, oblikom i prostorom, promjenom i predviđanjem neizvjesnih događaja. Prateći tu definiciju dolazimo do osnovnih matematičkih grana: teorija brojeva, algebra, diskretna matematika, geometrija i topologija, teorija vjerojatnosti i statistika, matematička analiza te primijenjena matematika. Ne treba nas onda iznenaditi da su problemi na matematičkim natjecanjima za učenike srednjih škola podijeljeni u četiri područja: algebra, kombinatorika, geometrija i teorija brojeva. Od tih područja, **kombinatorika** je najmanje zastupljena u redovnom obrazovanju, a istovremeno najbolja za ilustraciju kako se rješavaju problemi. Zbog toga je u ovoj knjizi naglasak prvenstveno na takvim problemima, iako je krajnji cilj objaviti i poglavlja posvećena ostalim područjima.

Knjiga je također nastala zbog komentara da su zadaci na natjecanjima preteški i da se na dodatnoj nastavi **ne mogu obraditi svi tipovi zadataka** koji se pojavljuju na natjecanjima. Velika je prednost vidjeti kako se neki zadatak rješava, ali više puta ćemo ponoviti da je pogrešno očekivati da se učenik može pripremiti za sve tipove zadataka na natjecanjima. Dobar natjecatelj i dobar matematičar ima razvijenu vještinu apstraktnog razmišljanja i

**samopouzdanje u vlastito rješavanje problema s kakvima se još nije susreo.** Istraživački pristup koji je potreban za uspješno rješavanje takvih problema sastoji se od znatiželje, postavljanja pitanja, ispitivanja posebnih slučajeva, postavljanja hipoteza, traženja uzoraka, preispitivanja, refleksije... To je vještina koju se dugo uči i jedina prava tema dodatne nastave. Razni sadržaji koje koristimo da bismo tu vještinu razvili nisu toliko važni, odnosno pojedini rezultati se lako usvoje jednom kada znamo razmišljati. Naravno, svatko želi vidjeti rezultate svog rada, te se lako obeshrabrimo ako nam netko kaže da ćemo cilj ostvariti tek nakon jako mnogo vremena. Tajna je zapravo u tome da sam rad može biti zanimljiv i izazovan, te smo svakodnevno nagrađeni za novi riješeni problem.

## KAKO ČITATI OVU KNJIGU?

Knjigu se može čitati kao roman toka svijesti, a primjeri mogu poslužiti početniku da vidi kako se pristupa problemima i ispravno matematički argumentira. No, osnovna nit vodilja autora je pružiti čitatelju mogućnost da se aktivno uključi u rješavanje zadataka i promišljanje o raznim aspektima otkrivanja rješenja. Budući da vjerujemo da je glavni preduvjet napretka u rješavanju zadataka samo rješavanje zadataka, ova knjiga je u svom većem dijelu zbirka riješenih primjera. Rješenja su ovdje da budu pomoć kada zapnete, no svakog čitatelja bismo željeli potaknuti da o svakom pitanju, problemu ili zadatku prvo razmisli sam. Na taj način svatko može sam odrediti u kojoj mjeri će ova knjiga biti interaktivan medij. Na to će vas podsjećati ovakve oznake:



PRVO RAZMISLITE SAMI!

Matematički objekt upoznajemo postupno kroz njegove razne aspekte. Razumijevajući definicije, teoreme, primjere i kontraprimjere kao da obilazimo neki fizički objekt i spoznajemo njegov tlocrt, bokocrt i nacrt. U određenom trenutku uvida spoznajemo čitav objekt u njegovoj cijelosti. Nakon tog trenutka imamo puno razumijevanje o objektu i o njemu ne mislimo kroz neke njegove specifične aspekte, već svaki aspekt možemo samostalno izvesti jer **razumijemo** taj objekt. Zbog toga smo nastojali svaku temu ili tvrdnju ilustrirati primjerom, kontraprimjerom i različitim pristupima.

Dijelove knjige moguće je i poželjno je čitati više puta, ne nužno redom od početka do kraja. Poglavlja su nezavisno pisana i specifične sadržaje koje se u njima obrađuje može se čitati bez obzira jesu li pročitana ostala poglavlja. Neki od općenitih principa zaključivanja provlače se kroz sva poglavlja i čitatelj ima mogućnost napraviti **razne poveznice** među materijalima u različitim dijelovima knjige.

Kako bismo povećali dinamičnost teksta dizajnirali smo **posebne okvire** koji će vam, nadamo se, olakšati čitanje i prenošenje znanja iz ove knjige.

Važni savjeti, upute, metode ili pravila.



Primjeri koje se detaljno analizira iz više aspekata.



Primjeri koji pokazuju da su i olimpijski zadaci dohvatljivi prikazanim idejama.



Zabavni i netipični primjeri.



Materijali su organizirani po temama, no netko bi možda radije želio povezati zadatke koji su se pojavili na istom testu ili u kojima se koristi slična strategija. Originalni testovi u kojima se može vidjeti kako su zadaci bili grupirani na natjecanjima lako su dostupni čitateljima. Dapače, ova knjiga je nastala jer vjerujemo da su originalni testovi jedan od rijetkih izvora zadataka koje učenici koriste. Zato takvoj organizaciji zadataka nismo pridavali previše pažnje, ali smo naveli izvore zadataka. Svi zadaci su preuzeti iz nekih drugih izvora i to smo nastojali naglasiti kroz citiranje onih knjiga koje su najviše utjecale na oblikovanje, te kroz navođenje natjecanja na kojima su zadaci bili zadani. Rješenja su uglavnom pisana novim svježim stilom, uz naglasak da se prikaže stranu razmišljanja koja je nerijetko skrivena. Ipak, neka rješenja su preuzeta jer ih je autor već sam pisao i uređivao u pripremi samih natjecanja. Svakako bismo potaknuli zainteresirane čitatelje da potraže dodatne materijale koji se nalaze u literaturi.

## ZAHVALA

Ideja za ovu knjigu nastala je prije više godina. Uz želju da iskustvo koje sam skupljao godinama prenesem većem broju ljudi nego što je to moguće kroz radionice i predavanja, te mnoge polemike koje sam vodio s mentorima o težini zadataka i načinima da se pripremi učenike, presudni je bio trenutak u kojem mi se javio Adrian Satja Kurdija u lipnju 2014. s pozivom da zajedno napišemo knjigu za pripremu učenika 1. razreda matematičkih gimnazija. Inicijativi su se odmah priklonili Nikola Adžaga, Ivan Kokan i Stipe Vidak. Razradili smo strukturu knjige koja bi pokrivala sva četiri područja, te smo zaključili da nema razloga zašto bi bila pisana samo za 1. razred – ideje koje treba promovirati jednako su važne i pojavljuju se na natjecanjima u svim razredima! Projekt je započeo, ali je napredovao polako. Radili smo samo u rijetkim trenucima, uglavnom tijekom godišnjih odmora. Takav tempo je zahtijevao da se prioritizira rad i objavu poglavlja, a epidemiološke okolnosti i rad u izolaciji su doveli do toga da se dva glavna i najvažnija poglavlja dovrši i objavi u lipnju 2020.

Prije svega želim istaknuti veliki trud i strpljenje koje je Ivan Kokan uložio u tehničku izvedbu svih zadataka i rješenja na matematičkim natjecanjima u srednjoj školi u zadnjih 10 godina. Ivanova je zasluga što knjiga izgleda dinamično, privlačno i što su slike visoke kvalitete. Bez njegovog velikog zalaganja i stručnosti, knjiga ne bi ni približno izgledala kao sada, a možda je uopće ne bi bilo.

Glavna zahvala ide Ilku Brnetiću i Mei Bombardelli, koji su svoje veliko znanje i ideje kroz svoje mentorstvo te dugogodišnje suradništvo i prijateljstvo utkali u moj osobni način razmišljanja. Posebna zahvala ide i svim ostalim kolegama koji su tijekom svog rada u Državnom povjerenstvu za provedbu natjecanja iz matematike i Povjerenstvu HMD-a za međunarodna matematička natjecanja iz godine u godinu predlagali i unedogled diskutirali zadatke. Od svih njih posebno bih istaknuo dvojicu. Tonći Kokan je svojim idejama i entuzijazmom bio jedan od glavnih reformatora svega vezanog uz izbor i vođenje ekipa. Puno smo razgovarali o pojedinim zadacima, posebno kombinatornim, pa su u ovoj knjizi mnoga njegova rješenja te prvi zadatak jednog hrvatskog autora postavljen na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi (IMO). Gotovo svaka rasprava me naučila nešto novo, posebno one u kojima se nismo slagali. Najteže je napisati zahvalu za sve što je u natjecanja uložio Stipe Vidak. Trebao je biti koautor ove knjige, napisati poglavlje o geometriji, ali nas je prerano napustio. Među prvima je čitao duga rješenja posebnih primjera i komentirali smo kako dijelimo pogled na matematiku koji smo nastojali prenijeti drugima. Nadam se da bi bio ponosan na ovaj trenutak.

Bez obzira na nastojanje da knjiga bude što bolja, moji tekstovi vrve greškama. Stoga sam neizmjerljivo zahvalan recenzentima, Azri Tafro i Ilku Brnetiću, na strpljenju i svim komentarima za poboljšanje teksta. Unatoč njihovom pažljivom čitanju i višebrojnim sugestijama, moguće je da knjiga neće zadovoljiti svakog čitatelja. Onima koji će ipak pronaći tekst zanimljivim, ali uz ideje kako ga učiniti boljim, bit ću zahvalan da mi jave svoje vrijedne komentare i sugestije.

Matija Bašić





# R

## RJEŠAVANJE MATEMATIČKIH PROBLEMA

U prostoriji se nalazi sto kutija visina 1, 2, 3, ..., 100 koje treba nekim poretom smjestiti uz zid. Mačak Fiko može skočiti s jedne kutije na sljedeću ako je sljedeća kutija niža (nije bitno koliko) od one na kojoj se nalazi ili je za najviše 1 viša od one na kojoj se trenutno nalazi. Na koliko načina se kutije može poredati tako da Fiko može krenuti s prve kutije u nizu i skočiti redom na svaku iduću kutiju?



Rješavanje problema jedna je od osnovnih kognitivnih sposobnosti ljudi koja je usko povezana uz razne druge procese poput učenja, donošenja odluka i rasuđivanje. Sve su to aktivnosti koje radimo svaki dan, a moguće ih je poboljšati vježbanjem, analizom vlastitih metoda i osvještavanjem tipičnih pogrešaka u zaključivanju.

Problemi su posebna vrsta zadataka u kojima na početku ne znamo kako ih izvršiti. Ključni trenutak u rješavanju je postizanje uvida, što nazivamo aha! efekt. U ovom poglavlju opisat ćemo od čega se sastoje aha! trenuci, te što im sve prethodi.

U rješavanju problema koristimo razne opće strategije (heuristike) da bismo se uopće doveli u situaciju u kojoj možemo primijeniti neku tehniku za rješavanje specifičnih tipova zadataka. Ako se pitate kako uspješno rješavati probleme u matematici, onda je odgovor da trebate zauzeti istraživački pristup, tj. naučiti kako razmišljati o problemima i pri tome se osjećati ugodno s neizvjesnošću koju problem donosi. Ključni dio je odustati od slijepog praćenja algoritama (recepata) koje smo dobili od drugih, te odlučiti samostalno kritički razmišljati. Nagrada ili korist s kojom ostajemo nakon rješavanja često nije krajnje rješenje, već iskustvo koje smo dobili kroz proces rješavanja.

## R.1 ŠTO JE PROBLEM?

**Problem** je bilo koja situacija u kojoj nam nije jasan put kojim možemo doći do željenog cilja. Problemi mogu biti postavljeni u obliku odluka koje trebamo donijeti, pitanja procjene ili egzaktna pitanja na koja odgovor ne znamo unaprijed. Poznavanje matematike nam pomaže u donošenju odluka, ali u ovom dijelu knjige želimo istaknuti aspekte matematičkog razmišljanja i rješavanja problema koje se može primjenjivati i u situacijama koje nisu matematičke. Matematički zadaci posebna su vrsta problema čije rješavanje iziskuje povećanu razinu logike i upotrebu raznih mentalnih sposobnosti. Razvoj matematičkog načina razmišljanja zbog toga doprinosi poboljšanju drugih sposobnosti za rješavanje problema u svakodnevnom životu. Promotrimo sljedeći primjer.

**Primjer R1.** U dvije različite trgovine prodavači prodaju jabuke po istoj cijeni. Jednog dana oba prodavača odluče prodavati jabuke uz određenu akciju.

- Prodavač A je odlučio prodavati jabuke po 10 % nižoj cijeni.
- Prodavač B je odlučio uz svaku kupnju pokloniti 10 % jabuka više.

Kod kojeg prodavača se više isplati kupovati?

Na prvi pogled mogli bismo reći da se u oba slučaja radi o popustu od 10 % i da je svejedno kod kojeg prodavača kupujemo. Ipak, postoji razlika!

**Rješenje R1.** Kako bismo donijeli odluku, **uvest ćemo cijenu jabuka po kilogramu** i izračunati cijenu nakon popusta. Pretpostavimo da su cijene jabuka prije akcija bile 10 kuna za 1 kilogram.

Prema popustu prvog prodavača 1 kilogram ćemo dobiti za 9 kuna. Kod drugog prodavača ćemo za 10 kuna dobiti 1.1 kilograma, što znači da ćemo 1 kilogram dobiti za  $10 : 1.1 = 9.09$  kuna.

Dakle, kod drugog prodavača će ista količina jabuka biti skuplja! ✓

Za nekoga tko nije vičan matematici ovakvo rješenje može ostaviti još puno pitanja: „Kako uopće uočiti da popust nije isti? Zašto smo gledali cijenu po kilogramu? Kako smo točno izračunali jednu, odnosno drugu cijenu nakon popusta?” To nam pokazuje da razmišljanje o problemima nije transparentno, ali u ovoj knjizi ćemo to nastojati detaljnije opisati.

Zadatke u našem razmatranju dijelimo u dvije skupine ovisno o vrsti misaonih procesa koje moramo aktivirati u njihovom izvršavanju. Prva vrsta zadataka su oni zadaci čija struktura nam je od početka jasna i za koje već znamo proceduru ili algoritam. Reći ćemo da su to **rutinski zadaci**. Izvršavanje takvih zadataka ne zahtijeva ništa osim prisjećanja (korištenja memorije). Čak bismo mogli reći da takve zadatke ne rješavamo, već samo izvršavamo i vježbamo. Njihovo ponavljanje poboljšava našu tehniku, osnažuje poveznice o elementima rješenja tih zadataka, ali nas ne uči ničemu novom. U toj grupi su i pitanja kojima ne znamo odgovor, ali znamo da do odgovora možemo doći metodom pokušaja i pogrešaka ili ispitivanjem svih mogućih slučajeva.



**Primjer K2.** (Školsko 2014. za 3. r.) Šahovska ploča je ploča s 8 redaka i 8 stupaca čija su polja obojena naizmjenice crno-bijelo tako da je polje u prvom retku i prvom stupcu obojeno crno. U svako polje šahovske ploče upisan je po jedan cijeli broj. Poznato je da je zbroj svih brojeva na bijelim poljima jednak 26, a zbroj svih brojeva u neparnim stupcima jednak 43.

Ako promijenimo predznake svih brojeva na bijelim poljima, koliki će biti zbroj svih brojeva u neparnim retcima nakon te promjene?

Na početku dajemo nekoliko općenitih primjedbi o prirodi zadatka koje utječu na proces rješavanja prije nego što samo rješavanje započne. Prije svega, tekst zadatka je dugačak i sadrži više različitih uvjeta, što može obeshrabriti rješavatelja na samom početku. Prvi korak u rješavanju problema je **razumijevanje problema**, i u ovom primjeru je jako važno pažljivo pročitati zadatak. U prvom čitanju rješavatelju može promaknuti da se u pitanju pitamo o zbroju u retcima, dok je informacija dana o zbroju u stupcima. Počnemo li rješavati krivi zadatak, bit ćemo manje motivirani nastaviti. U analizi rješenja govorit ćemo o tome kako se nositi s osjećajem da ne znamo kako krenuti. Navest ćemo strategije (način razmišljanja) kojima se vodimo u rješavanju problema, te nekoliko ideja kako započeti istraživanje.



### PRVO RAZMISLITE SAMI!

**Rješenje K2.** U neparnim retcima neka polja su crna, a neka su bijela. Ključno je uočiti odnose bijelih i crnih polja po neparnim stupcima i retcima.

Crna polja u neparnim retcima su ista kao crna polja u neparnim stupcima (crno polje je u prvom retku i prvom stupcu i uzorak se ponavlja). Dakle, da bismo od neparnih stupaca dobili neparne retke moramo maknuti bijela polja u neparnim stupcima i dodati bijela polja u neparnim retcima. To nam opisuje što se događa s poljima. Sad još pogledajmo što se događa s brojevima koje zbrajamo.

Brojevima u bijelim poljima smo promijenili predznak, pa to znači da zapravo vrijednosti koje su u bijelim poljima u neparnim retcima moramo oduzeti.

Dakle, da bismo od početne vrijednosti zbroja u stupcima dobili krajnju vrijednost zbroja u retcima trebamo oduzeti vrijednost bijelih polja u stupcima i *oduzeti* vrijednost bijelih polja u retcima. To zapravo znači da konačnu vrijednost zbroja po retcima dobivamo tako da od početne vrijednosti zbroja u neparnim stupcima oduzmemo početnu vrijednost zbroja na bijelim poljima, tj. odgovor je  $43 - 26 = 17$ . ✓

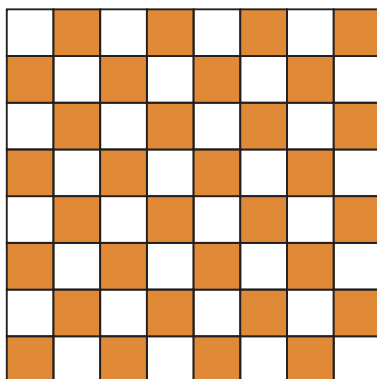
**Analiza i strukturirano nalaženje rješenja.** Evo detaljnijeg objašnjenja kako rješavati ovaj zadatak i kako zapisati rješenje na konceptualniji način. Navedeno rješenje je potpuno, ali u njemu ne piše misaoni proces kojim smo do rješenja došli, a bez kojeg takvo rješenje nema veliku edukativnu vrijednost. Vodit ćemo se dvjema tehnikama. Prvo je kontinuirano **postavljanje pitanja samima sebi** kako bismo provjerili gdje se u razmišljanju nalazimo i što želimo postići. Drugo je **smisleno uvođenje oznaka** kako bismo lakše razmišljali. Ove dvije tehnike ističemo zato što je težina zadatka u razumijevanju i povezivanju pojmova koji se pojavljuju, što je za svakog obeshrabrujuće bez tehnika koje će nas podržati u rješavanju.

Napredak ovisi o kvaliteti postavljenih pitanja. Primijetimo li u nekom trenutku da ne napredujemo, tražimo nova pitanja i koristimo druge strategije. Posebnu prepreku u početnom razmišljanju o zadatku predstavlja apstraktna formulacija zadatka – nije zadano koji su brojevi upisani u konkretna polja. Rješavatelj koji ima manje iskustva s ovakvim zadacima može se pitati kako je uopće moguće izračunati traženi zbroj. Čak i ako ne znamo riješiti zadatak, pitat ćemo se: „Možemo li barem pogoditi rješenje?”.

Logički je sasvim opravdano pitati se i „Ovisi li rezultat o rasporedu brojeva?”. Jednom kad imamo potpuno rješenje vidjet ćemo da je rezultat zaista u svim rasporedima isti. Na početku rješavanja to ne znamo, ali svejedno je razumno očekivati da je tako jer bismo inače dobili dodatne informacije. To znači da promatranjem posebnih slučajeva možemo barem naslutiti odgovor, te nakon toga tražiti objašnjenje zašto je odgovor uvijek isti. Posebne slučajeve možemo konstruirati na razne načine. Jedna mogućnost je da u jedno crno polje u prvom stupcu upišemo 17, u jedno bijelo polje u prvom stupcu upišemo 26, a u sva ostala polja upišemo 0. Nakon promjene predznaka, zbroj u neparnim retcima iznosi 17. Izvrsno! Iako jedan primjer zapravo ništa ne dokazuje, ipak imamo broj za koji mislimo da ćemo dobiti kao odgovor na zadano pitanje.

Prva pitanja od kojih krećemo tražiti objašnjenje su: „Koji objekti su zadani? Što tražimo?”. U ovom zadatku se radi o brojevima na šahovskoj ploči, no informacije koje su zadane su zbrojevi tih brojeva u određenim stupcima, odnosno na bijelim poljima. Nadalje, od nas se traži i zbroj u određenim retcima. Naš prvi zaključak bi zato trebao biti da ćemo se fokusirati na *neparne stupce*, *neparne retke* i *bijela polja* kao cjeline, odnosno objekte čije odnose proučavamo.

Ovdje smo uz postavljanje pitanja pristupili čitanju zadatka s razumijevanjem, te smo uočili na koji način su nam informacije zadane. Također je vrlo korisno na neki način **vizualizirati situaciju** – nacrtati ploču i promatrati gdje su spomenuti objekti.



Nastavljamo s profinjenjem, odnosno produblivanjem ovih pitanja. Možemo nastaviti s prvim ili drugim pitanjem. Profinjena pitanja glase: „Što znamo o odnosu bijelih polja i neparnih stupaca?” ili „Što znamo o retcima i brojevima koji su zadani?”. Vještina postavljanja ovakvih pitanja zahtijeva (matematičku) zrelost i upravo je to vještina koju učenik uči od mentora ili kroz samostalan rad i mnoge primjere.

Sad dolazimo do druge tehnike koja nam olakšava analizu – uvođenje oznaka. Vodi nas pitanje „Što i kako označiti?”. Prvo bismo mogli označiti ono što je zadano u zadatku, na primjer  $A = 43$  i  $B = 26$ . Uočite da time nismo olakšali situaciju iako smo možda osvojili malo psihološkog mira.

Korisno označavanje je ono kroz koje se vidi određeni pomak u razmišljanju. Naš pomak u razmišljanju se svodi na promatranje bijelih polja u neparnim stupcima. Koristeći samo prirodnu logiku promatramo ono što je zajedničko zadanim objektima. Matematički to zovemo *presjek* dvaju skupova. Sam naziv je trenutno nebitan, mi i dalje možemo govoriti „ono zajedničko” ili „bijela polja u neparnim stupcima”. Važno nam je da sebi precizno opišemo koncept, dok sam matematički naziv nije.

Sada možemo označiti „ono zajedničko”, te svaki od dijelova koji nije zajednički. Učenik može i treba vježbati preciznost u definiranju svojih oznaka, a razgovor s mentorom ili drugim učenicima tu može puno pomoći. Precizno možemo definirati:

$$\begin{aligned} X &= \text{zbroj brojeva na crnim poljima u neparnim stupcima} \\ Y &= \text{zbroj brojeva na bijelim poljima u parnim stupcima} \\ Z &= \text{zbroj brojeva na bijelim poljima u neparnim stupcima.} \end{aligned}$$

Vizualizirajte ove veličine na ploči! Zadani uvjeti sada kažu

$$X + Z = 43 \quad \text{i} \quad Y + Z = 26.$$

Možda se bolje osjećamo što imamo jednadžbe. No, možemo primijetiti da imamo tri veličine i samo dvije informacije. Djeluje kao nova prepreka koja bi poprilično mogla obeshrabriti. **Dva su pozitivna pristupa: prvi je potražiti dodatne informacije, a drugi je vidjeti trebamo li zaista izračunati sve veličine koje se pojavljuju.** Ako krenemo tražiti dodatne informacije možemo odlutati od korisnog načina razmišljanja, pa zapamtimo ovo mjesto kao raskrižje kojem se možemo vratiti.

Evo jedne ideje koja djeluje da može biti korisna – dosad nismo promatrali sve brojeve na ploči. Naime, nismo promatrali zbroj  $W$  svih brojeva na crnim poljima u parnim stupcima. Daljnja razmatranja kako iskoristiti broj  $W$  su moguća, ali zapravo ne daju napredak jer o tim poljima nikakve informacije nisu dane! Svejedno, normalno je utrošiti neki dio rješavanja na takve stranputice.

Vratimo se raskrižju i drugom pitanju koje smo tad postavili. Što točno trebamo izračunati i kako to izračunati koristeći ove oznake? Pogreška bi bila uvoditi nove oznake za ono što tražimo. Naime, svaki problem rješavamo tako da nađemo vezu između zadanog i onog što tražimo.

Činjenica da imamo jasno definirane oznake nam u ovom trenutku olakšava razmišljanje. U neparnim retcima se nalaze neka bijela polja i neka crna polja. Odmah se pitamo kakva je veza tih polja s poljima koje koristimo u zbrojevima  $X$ ,  $Y$  i  $Z$ . Koja su to crna/bijela polja u neparnim stupcima, a koja u neparnim retcima? Zatrebamo li pomoć, opet ćemo posegnuti za vizualizacijom i na crtežu označiti polja koja nas zanimaju.

Glavni zaključak u rješavanju je uočiti da je **skup crnih polja u neparnim retcima jednak skupu crnih polja u neparnim stupcima**. Također vidimo da je skup bijelih polja u neparnim retcima jednak skupu bijelih polja u parnim stupcima. Dakle, prije promjene predznaka zbroj brojeva u neparnim retcima iznosi  $X + Y$ . Taj broj ne znamo odrediti, no ništa zato – taj broj se niti ne traži.

Broj koji se traži dobivamo tek kad brojevima  $Y$  i  $Z$  promijenimo predznak. Traženi zbroj nakon promjene predznaka iznosi  $X - Y$ . Aha! Veličanstveni trenutak u kojem se sve povezuje uz samo malo matematičke zrelosti i minimum algebarskih manipulacija. Naime, u

cjelokupnom (možda iscrpljujućem?) razmišljanju sada moramo imati pregled nad bitnim saznanjima: iz  $X + Z = 43$  i  $Y + Z = 26$ , trebamo odrediti  $X - Y$ . Oduzmemo li dvije jednadžbe, dobivamo upravo  $43 - 26 = (X + Z) - (Y + Z) = X - Y$ , tj.  $X - Y = 17$ .

**Alternativni zapis.** Uvođenje i baratanje oznakama smo mogli napraviti i malo drugačije. Mogli smo samo označiti „ono zajedničko” (bijela polja u neparnim stupcima)

$$Z = \text{zbroj brojeva na bijelim poljima u neparnim stupcima,}$$

pa zaključiti da zadani uvjeti kažu

$$43 - Z = \text{zbroj brojeva na crnim poljima u neparnim stupcima}$$

$$26 - Z = \text{zbroj brojeva na bijelim poljima u parnim stupcima.}$$

Opet se pitamo kako izraziti ono što se traži koristeći ove oznake. Koristeći crtež ukoliko je potrebno, određujemo koja su to crna/bijela polja u neparnim stupcima, a koja u neparnim retcima. Aha! trenutak je isti, a glavni zaključak u rješavanju je uočiti da je skup crnih polja u neparnim retcima jednak skupu crnih polja u neparnim stupcima, odnosno da je skup bijelih polja u neparnim retcima jednak skupu bijelih polja u parnim stupcima. Prije promjene predznaka zbroj brojeva u neparnim retcima jednak je  $(43 - Z) + (26 - Z)$ , a u zadatku se traži broj koji dobivamo kad broju  $26 - Z$  promijenimo predznak. Dakle, traženi broj je  $(43 - Z) - (26 - Z) = 43 - Z - 26 + Z = 43 - 26 = 17$ .

**Usporedba.** Za kraj možemo strukturirano rješenje usporediti s početnim rješenjem koje smo zapisali bez korištenja ikakvih oznaka. Usporedba možda nije potpuno očita. Naime, u početnom rješenju smo morali riječima objasniti i logički razumjeti što se točno događa s brojem  $Z$ . Naime, tamo smo riječima objasnili da se zbroj u neparnim retcima na početku (koji iznosi  $X + Y$ ) zapravo sastoji od početnog broja u neparnim stupcima  $X + Z$  od kojeg oduzimamo  $Z$  i kojem dodajemo  $Y$ , te smo istovremeno morali biti svjesni da želimo oduzeti i broj  $Y$  što znači da sve zajedno traženi broj iznosi riječima ono što bismo simbolima zapisali  $(X + Z) - Z - Y$ , i tek tada smo u tom izrazu riječima prepoznali vezu sa zadanim veličinama  $(X + Z) - (Y + Z) = 43 - 26$ .

Mogli bismo sažeti da za ljude s izraženom prirodnom logikom prvo rješenje može doći jednostavno i „prirodno”, a moguće je da pritom nisu svjesno pravili određene korake u razmišljanju. S druge strane, ako nam rješenje nije odmah jasno, postoje načini na koji strukturirano možemo razmišljati kako bismo se sami vodili kroz rješavanje problema. Jedino što ne smijemo zaboraviti je da je u tom procesu sasvim normalno slijediti pokoji stranputicu ili pogriješiti, te se vratiti u razmišljanju.

Kratki pregled pitanja koje smo koristili može biti od velike koristi u budućem rješavanju.

**Pregled generičkih pitanja.** Što je zadano? Što se traži? Možemo li to preciznije iskazati i imenovati glavne objekte u zadatku? Koji su sve odnosi između objekata zadani? Možemo li pogoditi rješenje? Ovisi li rezultat o konkretnom rasporedu objekata? Možemo li promotriti neke posebne slučajeve? Možemo li situaciju vizualizirati? Što i kako označiti? Moramo li sve izračunati? Imamo li dodatnih informacija? Jesmo li sve informacije iskoristili?

Posljednji od tri glavna primjera rješavamo uz još veći naglasak na stranputice kojima prirodno putuje početnik, te dodatnim napomenama kako unaprijediti svoje razmišljanje.