0-1 zakoni na konačnim modelima

Matko Botinčan

studeni 2004.

Sadržaj

1 Uvod

O važnosti teorije konačnih modela za teorijsko računarstvo nije potrebno trošiti previše riječi. Jedno od područja te teorije koje se razvilo u toku posljednih 30-ak godina obično se kratko naziva imenom 0-1 zakoni, a tiče se proučavanja jednog zanimljivog koncepta svojstvenog konačnosti – vjerojatnosti da neka konačna struktura predstavlja model dane rečenice. 0-1 zakoni govore o asimptotskom ponašanju te vjerojatnosti koje pod određenim uvjetima biva iznenađujuće pravilno. Povijesno gledano, osnovna pitanja i specifični odgovori za neke konkretne slučajeve konačnih struktura (osobito grafove) bili su dani znatno ranije početkom 60-ih godina radovima Erdösa i Rényja u području kombinatorike i teorije grafova, no, unifikacija u sklopu logike i teorije konačnih modela ostvarila se tek sredinom 70-ih godina. Cilj ovog seminara ukratko je rezimirati osnovne ostvarene rezultate vezane uz 0-1 zakone na konačnim modelima.

Kao uvodni primjer uzmimo klasu neusmjerenih grafova, te neko svojstvo π takvih grafova (npr. π može predstavljati svojstvo povezanosti). Jedno od osnovnih pitanja koja se tom prilikom mogu postaviti jest koliki udio grafova s n vrhova zadovoljava dano svojstvo π? Ono što ćemo pokazati jest da za većinu "prirodnih" svojstava π kada n teži prema ∞ ovaj udio teži prema 0 ili 1. Primjerice, može se pokazati da su gotovo svi grafovi povezani, Hamiltonovi, ali nisu 3-obojivi, rigidni, itd.
Pri tome moramo malo bolje precizirati što točno znači "udio grafova s n vrhova koji imaju svojstvo π". Pokazuje se da ima smisla promatrati dva slučaja – labelirani i nelabelirani (u oba slučaja pretpostavlja se da je π svojstvo očuvano na izomorfizam).

Labelirani slučaj: Označimo s $L_n(\pi)$ broj grafova na $\{1,\ldots,n\}$ sa svojstvom π. Tada je udio grafova na $\{1,\ldots,n\}$ koji imaju svojstvo π jednak:

$$l_n(\pi) := \frac{L_n(\pi)}{2^{\binom{n}{2}}} = \frac{L_n(\pi)}{L_n(\tau)},$$

gdje je τ trivijalno svojstvo kojeg svaki graf posjeduje.

Nelabelirani slučaj: Označimo s $U_n(\pi)$ broj tipova izomorfizma grafova s n vrhova koji imaju svojstvo π. Tada je odgovarajući udio definiran s:

$$u_n(\pi) := \frac{U_n(\pi)}{U_n(\tau)},$$

gdje je $U_n(\tau)$ ukupan broj tipova izomorfizma grafova s n vrhova.

Kažemo da svojstvo π zadovoljava labelirani, odnosno nelabelirani 0-1 zakon ukoliko $l_n(\pi)$, odnosno $u_n(\pi)$ teži k 0 ili 1 kad n teži k ∞.

Pokazuje se da svako svojstvo grafova π definabilno u logici prvog reda zadovoljava 0-1 zakon ($l_n(\pi)$ i $u_n(\pi)$ su zapravo asimptotski ekvivalentni[1], tako da je konceptualno dovoljno govoriti o 0-1 zakonu bez naglaska na (ne)labeliranost). Zapravo, u ovom seminaru dokazat ćemo znatno jaču tvrdnju: svaka rečenica infinitarne logike $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ nad relacijskom signaturom zadovoljava 0-1 zakon. $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ logika obuhvaća logiku prvog reda, pa specijalno svaka rečenica logike prvog reda također zadovoljava 0-1 zakon.

Povijesno gledajući, 0-1 zakon prvotno je bio dokazan samo za logiku prvog reda (Glebsky i ostali 1969. godine ([3]) i nezavisno Fagin 1976. godine ([2])). Nedugo nakon toga krenulo se u istraživanje mogu li se dokazati 0-1 zakoni i u nekim logikama veće izražajne moći od logike prvog reda (poznato je da mnoga prirodna svojstva (npr. svojstvo povezanosti u grafovima) nisu izraziva u logici prvog reda). 1981. godine Talanov je dokazao 0-1 zakon za logiku prvog reda proširenu operatorom tranzitivnog zatvorenja. 1985. godine Blass, Gurevich i Kozen dokazali su 0-1 zakon za fixed-point logiku. Finalan rezultat ostvaren je 1991. godine kada su Kolaitis i Vardi dokazali 0-1 zakon za infinitarnu logiku $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega}$.

Paralelno s pojavom pozitivnih rezultata, dokazani su i negativni rezultate za neke "jače" logike. Lagano je vidjeti da logika drugog reda ne zadovoljava 0-1 zakon, no, Kaufmann i Shelah dokazali su kako 0-1 zakon pada i u slučaju monadske logike drugog reda (Kaufmann je kasnije rezultat dodatno popravio dokazavši kako 0-1 zakon ne vrijedi niti samo za egzistencijalnu monadsku logiku drugog reda). S druge strane, za neke fragmente egzistencijalne logike drugog reda pokazuje se da 0-1 zakon ipak vrijedi.

Tekst ovog seminara svojim dobrim dijelom slijedi sadržaj knjige [1], gdje izneseni dokaz 0-1 zakona za $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ logiku zapravo predstavlja malo "pročišćenu" varijantu originalnog Kolaitis-Vardijevog dokaza (pri tome, osnovnu ideju o tome kako povezati aksiome proširenja i teoriju random struktura s konačnim strukturama dao je već Fagin u svom znatno ranijem radu), dok su argumenti kod dokaza rezultata za fragmente logike drugog reda istovjetni onima iznesenim u izvornim radovima. Kao vrijednu referencu svakako još valja istaknuti Gurevichev pregledni članak ([5]), te dijelove Spencerove knjige ([11]) u kojoj su obrađeni kombinatorni i vjerojatnosni aspekti slučajnih grafova i pripadnih 0-1 zakona.

---

[1] Kasnije ćemo pokazati da je asimptotska ekvivalencija $l_n(\pi)$ i $u_n(\pi)$ zapravo posljedica tzv. svojstva rigidnosti.

2 Pripremni materijali

U ovoj sekciji ponovit ćemo definicije infinitarnih logika, te fragmenata infinitarne logike i logike prvog reda s konačno mnogo varijabli. Nadalje, podsjetit ćemo se osnovnih rezultata o konačnim i beskonačnim Ehrenfeucht-Fraïsséovim igrama, te varijanti tih igara prilagođenoj logikama s konačno mnogo varijabli – igrama s kamenčićima.

2.1 Logike $\mathrm{L}_{\infty\omega}$ i $\mathrm{L}_{\omega_1\omega}$

Definicija 2.1 **($\mathrm{L}_{\infty\omega}$ logika)** *Klasa svih $\mathrm{L}_{\infty\omega}$-formula nad signaturom τ dana je slijedećom induktivnom definicijom:*

- *sve atomarne formule logike prvog reda nad τ su formule logike $\mathrm{L}_{\infty\omega}$;*
- *ako je φ formula, tada je i $\neg\varphi$ formula;*
- *ako je φ formula, a x varijabla, tada je i $\exists x\varphi$ formula;*
- *ako je Ψ proizvoljan skup formula, tada je i $\bigvee \Psi$ formula.*

Definicija 2.2 **($\mathrm{L}_{\omega_1\omega}$ logika)** *Za definiciju klase svih $\mathrm{L}_{\omega_1\omega}$-formula nad signaturom τ posljednju klauzulu u prethodnoj definiciji potrebno je zamijeniti s:*

- *ako je Ψ* prebrojiv *skup formula, tada je i $\bigvee \Psi$ formula.*

Semantika logika $\mathrm{L}_{\infty\omega}$ i $\mathrm{L}_{\omega_1\omega}$ direktno je proširenje semantike logike prvog reda, pri čemu se $\bigvee \Psi$ interpretira kao disjunkcija nad svim formulama u Ψ, tj.

$$\mathfrak{A} \models \bigvee \Psi \quad \text{akko} \quad \text{za neki } \psi \in \Psi \text{ je } \mathfrak{A} \models \psi.$$

Nadalje, uvedemo li oznaku $\bigwedge \Psi := \neg \bigvee \{\neg\psi \mid \psi \in \Psi\}$, $\bigwedge \Psi$ se intepretira kao konjunkcija nad svim formulama u Ψ.

2.2 Logike FO^s, $\mathrm{L}^s_{\infty\omega}$ i $\mathrm{L}^\omega_{\infty\omega}$

Neka je $s \geq 1$ fiksiran. S FO^s, odnosno $\mathrm{L}^s_{\infty\omega}$ označavamo fragmente logike prvog reda, odnosno logike $\mathrm{L}_{\infty\omega}$, koje sadrže samo one formule čije se slobodne i vezane varijable nalaze među $v_1, \ldots, v_s$.

Nadalje, logiku $\mathrm{L}^\omega_{\infty\omega}$ definiramo kao:

$$\mathrm{L}^\omega_{\infty\omega} := \bigcup_{s\geq 1} \mathrm{L}^s_{\infty\omega}.$$

Može se pokazati da vrijedi slijedeća napomena.

Napomena 2.3 *Vrijede slijedeći odnosi:*

- $\mathrm{FO} = \bigcup_{s \geq 1} \mathrm{FO}^s$;
- $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega} \subset \mathrm{L}_{\infty\omega}$
  (npr. ukoliko s $\varphi_{=n}$ označimo rečenicu prvog reda kojom je izraženo svojstvo da je nosač kardinaliteta n, formula $\bigvee \{\varphi_{=n} \mid n \geq 1\}$ se nalazi u $\mathrm{L}_{\infty\omega}$, ali ne i u $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega}$).

2.3 O Ehrenfeucht-Fraïsséovim igrama

Za dane strukture $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ s $G_m(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ označavat ćemo Ehrenfeucht-Fraïsséovu igru od m poteza između *Spoilera* i *Duplikatora*, pri čemu se pretpostavlja da su na početku igre elementi $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|$ [2] i $\bar{b} \in |\mathfrak{B}|$ već odabrani.

Klasični teorem A. Ehrenfeuchta dovodi u vezu pitanje Duplikatorove pobjede u igri $G_m(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ s time jesu li u $\mathfrak{A}$, odnosno $\mathfrak{B}$ zadovoljeni isti skupovi formula logike prvog reda s ograničenjem na broj kvantifikatora.

Teorem 2.4 (Ehrenfeuchtov teorem) *Za strukture $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|$, $\bar{b} \in |\mathfrak{B}|$, te $m \geq 0$ slijedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *Duplikator pobjeđuje u igri $G_m(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$.*
2. *$\bar{a}$ i $\bar{b}$ zadovoljavaju istovjetan skup formula prvog reda kvantifikatorskog ranga $\leq m$ u $\mathfrak{A}$, odnosno $\mathfrak{B}$, tj. za sve formule φ logike prvog reda kvantifikatorskog ranga $\leq m$ vrijedi $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}]$ akko $\mathfrak{B} \models \varphi[\bar{b}]$.* [3]

Ponekad je korisno imati na raspolaganju nešto "algebarskiji" opis Ehrenfeucht-Fraïsséove igre $G_m(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$, s čime je u vezi pojam m-izomorfnosti. Pokazuje se da je pitanje Duplikatorove pobjede u igri $G_m(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ ekvivalentno m-izomorfnosti struktura $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$.

Definicija 2.5 *Kažemo da su strukture $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ m-izomorfne ukoliko postoji niz $(I_j)_{j \leq m}$ nepraznih skupova parcijalnih izomorfizama s $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$ sa slijedećim svojstvima:*

(m-back) *Za svaki $j < m$, $p \in I_{j+1}$ i $b \in |\mathfrak{B}|$ postoji $q \in I_j$ takav da $q \supseteq p$ i $b \in \mathrm{Im}(q)$.*

(m-forth) *Za svaki $j < m$, $p \in I_{j+1}$ i $a \in |\mathfrak{A}|$ postoji $q \in I_j$ takav da $q \supseteq p$ i $a \in \mathrm{Dom}(q)$.*

---

[2] S $\bar{x}$ označavamo uređenu k-torku $(x_1, \ldots, x_k)$, pri čemu nam vrijednost dimenzije k nije od važnosti. Činjenicu da je $(x_1, \ldots, x_k) \in X^k$ kratko nepreciznije pišemo kao $\bar{x} \in X$.

[3] Ovdje prešutno pretpostavljamo da je kardinalitet skupa slobodnih varijabli formule φ jednak dimenziji elemenata $\bar{a}$ i $\bar{b}$.

Ukoliko $(I_j)_{j\leq m}$ *ima svojstva* (m-back) *i* (m-forth) *pišemo* $(I_j)_{j\leq m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ *i kažemo da su strukture* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$ *m-izomorfne preko* $(I_j)_{j\leq m}$.

Teorem 2.6 *Za strukture* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$, $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|$, $\bar{b} \in |\mathfrak{B}|$, *te* $m \geq 0$ *slijedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *Duplikator pobjeđuje u igri* $G_m(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$.
2. *Postoji skup* $(I_j)_{j\leq m}$ *takav da je* $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_m$ [4] *i* $(I_j)_{j\leq m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.

Korolar 2.7 (Fraïsséov teorem) *Za strukture* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$, *te* $m \geq 0$ *slijedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. $\mathfrak{A} \cong_{\mathrm{m}} \mathfrak{B}$.
2. $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

Neka su $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ strukture, te $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|$ i $\bar{b} \in |\mathfrak{B}|$. Ehrenfeucht-Fraïsséova igra od beskonačno mnogo poteza $G_\infty(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ definira se jednako kao i igra $G_m(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$, uz razliku što sada svaki igrač mora odigrati beskonačno mnogo poteza. Dakle, u toku igre $G_\infty(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ odabrani su elementi $e_1, e_2, \ldots$ iz $|\mathfrak{A}|$ i $f_1, f_2, \ldots$ iz $|\mathfrak{B}|$. U igri pobjeđuje Duplikator ukoliko za sve i vrijedi da je preslikavanje $\bar{a}e_1 \ldots e_i \mapsto \bar{b}f_1 \ldots f_i$ [5] parcijalni izomorfizam između struktura $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$. Igru, pak, dobiva Spoiler ukoliko za neki i preslikavanje $\bar{a}e_1 \ldots e_i \mapsto \bar{b}f_1 \ldots f_i$ nije parcijalni izomorfizam između $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$.

Definicija 2.8 *Kažemo da su strukture* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$ *parcijalno izomorfne ukoliko postoji neprazan skup* I *parcijalnih izomorfizama s* $\mathfrak{A}$ *u* $\mathfrak{B}$ *sa slijedećim svojstvima:* [6]

(back) *Za svaki* $p \in I$ *i* $b \in |\mathfrak{B}|$ *postoji* $q \in I$ *takav da* $q \supseteq p$ *i* $b \in \mathrm{Im}(q)$.

(forth) *Za svaki* $p \in I$ *i* $a \in |\mathfrak{A}|$ *postoji* $q \in I$ *takav da* $q \supseteq p$ *i* $a \in \mathrm{Dom}(q)$.

Ukoliko skup I *ima svojstva* (back) *i* (forth) *pišemo* $I : \mathfrak{A} \cong_{\mathrm{part}} \mathfrak{B}$.

Analogon Ehrenfeuchtovog teorema u slučaju beskonačnih igara glasi ovako:

Teorem 2.9 *Za strukture* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$, *te* $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|$ *i* $\bar{b} \in |\mathfrak{B}|$ *slijedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *Duplikator pobjeđuje u igri* $G_\infty(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$.

---

[4] S $\bar{x} \mapsto \bar{y}$ označavamo parcijalni izomorfizam koji svakom x_i pridružuje y_i.

[5] Za k-torku $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ i l-torku $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_l)$ s $\bar{x}\bar{y}$ označavamo $(k+l)$-torku $(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)$.

[6] Uočimo kako svojstvo da su $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ parcijalno izomorfne ne znači da između $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ postoji parcijalni izomorfizam.

2. *Postoji skup I s $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ takav da $I : \mathfrak{A} \cong_{\text{part}} \mathfrak{B}$.*

3. *$\bar{a}$ i $\bar{b}$ zadovoljavaju istovjetan skup $\mathrm{L}_{\infty\omega}$-formula u $\mathfrak{A}$, odnosno $\mathfrak{B}$, tj. za sve formule logike $\mathrm{L}_{\infty\omega}$ vrijedi $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}]$ akko $\mathfrak{B} \models \varphi[\bar{b}]$.*

Kao direktnu posljedicu prethodnog teorema imamo ovaj korolar.

Korolar 2.10 *Za strukture $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ slijedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. $\mathfrak{A} \cong_{\text{part}} \mathfrak{B}$.

2. $\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{L}_{\infty\omega}} \mathfrak{B}$.

U slučaju prebrojivih struktura parcijalna izomorfnost struktura implicira izomorfnost, o čemu nam govori slijedeća lema (lema se dokazuje direktno primjenom svojstava *(back)* i *(forth)*).

Lema 2.11 *Neka su $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ prebrojive strukture. Tada vrijedi:*

1. *Ako je $\mathfrak{A} \cong_{\text{part}} \mathfrak{B}$, tada je $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

2. *Ako $I : \mathfrak{A} \cong_{\text{part}} \mathfrak{B}$ i $p_0 \in I$, tada p_0 može biti proširen do izomorfizma s $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{B}$.*

Istaknimo kao posljedicu slijedeći korolar.

Korolar 2.12 *Ako su $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ prebrojive i $\mathrm{L}_{\infty\omega}$-ekvivalentne, onda su one i izomorfne.*

2.4 Igre s kamenčićima

Rezultati o Ehrenfeucht-Fraïsséovim igrama $G_\infty(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ i $G_m(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ govorili su nam o karakterizaciji relacija $\cong_m$ i $\equiv_m$, odnosno $\cong_{\text{part}}$ i $\equiv_{\mathrm{L}_{\infty\omega}}$. Da bismo na sličan način mogli karakterizirati odgovarajuće relacije u logikama FO^s i $\mathrm{L}^s_{\infty\omega}$ potrebno je uvesti modifikaciju osnovnih Ehrenfeucht-Fraïsséovih igara koja je poznata pod nazivom "igre s kamenčićima".

Neka $*$ predstavlja element koji ne pripada nosaču niti jedne od struktura $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$. Za $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_s) \in |\mathfrak{A}| \cup \{*\}$ koji predstavlja položaj kamenčića u igri označimo sa $\mathrm{supp}(\bar{a}) := \{i \mid a_i \neq *\}$ *nosač* od $\bar{a}$ (skup svih kamenčića koji sudjeluju u igri). Nadalje, za $a \in |\mathfrak{A}|$ neka $\bar{a}^a_i$ označava $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_s)$ (postavljanje i-tog kamenčića na element a).

Definicija 2.13 *Za elemente $\bar{a} \in |\mathfrak{A}| \cup \{*\}$ i $\bar{b} \in |\mathfrak{B}| \cup \{*\}$ kažemo da je preslikavanje $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ s-parcijalni izomorfizam s $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$ ukoliko za pripadne nosače elemenata vrijedi $\mathrm{supp}(\bar{a}) = \mathrm{supp}(\bar{b})$, te je preslikavanje $\bar{a}' \mapsto \bar{b}'$ parcijalni izomorfizam s $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$, gdje su $\bar{a}'$ i $\bar{b}'$ podnizovi od $\bar{a}$ i $\bar{b}$ sastavljeni od onih elemenata čiji indeksi pripadaju nosaču.*

Neka su $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ strukture, te neka su $\bar{a} \in |\mathfrak{A}| \cup \{*\}$ i $\bar{b} \in |\mathfrak{B}| \cup \{*\}$ takvi da je $\operatorname{supp}(\bar{a}) = \operatorname{supp}(\bar{b})$. U igri s kamenčićima od m poteza $G^s_m(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ imamo na raspolaganju s kamenčića $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ za strukturu $\mathfrak{A}$ i s kamenčića $\beta_1, \ldots, \beta_s$ za strukturu $\mathfrak{B}$. Inicijalno, α_i je stavljen na a_i ako je $a_i \in |\mathfrak{A}|$, odnosno sa strane ukoliko je $a_i = *$ (pri tome kažemo da i-ti kamenčić ne sudjeluje u igri). Analogni dogovor vrijedi i za β_i.

U svom j-tom potezu Spoiler odabire strukturu, $\mathfrak{A}$ ili $\mathfrak{B}$, te kamenčić za tu strukturu. Ukoliko je odabrao $\mathfrak{A}$ i α_i, stavlja α_i na neki elemet od $|\mathfrak{A}|$, a potom Duplikator stavlja β_i na neki element od $\mathfrak{B}$. Ukoliko je Spoiler odabrao $\mathfrak{B}$ i β_i, stavlja β_i na element strukture $\mathfrak{B}$, a Duplikator potom stavlja α_i na neki elemet od $|\mathfrak{A}|$. Duplikator pobjeđuje u igri ukoliko je za svaki $j \leq m$ funkcija definirana s $\bar{e} \mapsto \bar{f}$ s-parcijalni izomorfizam, pri čemu $\bar{e} = (e_1, \ldots, e_s)$ predstavlja elemente označene s $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ nakon j-tog poteza ($e_i = *$ u slučaju kada je α_i sa strane), odnosno $\bar{f} = (f_1, \ldots, f_s)$ odgovarajuće elemente dane s $\beta_1, \ldots, \beta_s$.

Igra s kamenčićima od beskonačno mnogo poteza $G^s_\infty(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ definira se analogno, uz razliku što u tom slučaju svaki igrač mora odigrati beskonačno mnogo poteza.

Analogon Ehrenfeuchtovog teorema za Ehrenfeucht-Fraïsséove u igre u slučaju igara s kamenčićima glasi ovako:

Teorem 2.14 *Za strukture $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, te elemente $\bar{a} \in |\mathfrak{A}| \cup \{*\}$ i $\bar{b} \in |\mathfrak{B}| \cup \{*\}$ s nosačima za koje je $\operatorname{supp}(\bar{a}) = \operatorname{supp}(\bar{b})$ vrijede slijedeće tvrdnje:*

1. *Duplikator pobjeđuje u igri $G^s_m(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ akko $\bar{a}$ i $\bar{b}$ zadovoljavaju istovjetan skup FO^s-formula kvantifikatorskog ranga $\leq m$ u $\mathfrak{A}$, odnosno $\mathfrak{B}$, tj. za sve formule logike FO^s vrijedi $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}]$ akko $\mathfrak{B} \models \varphi[\bar{b}]$.* [7]

2. *Duplikator pobjeđuje u igri $G^s_\infty(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ akko $\bar{a}$ i $\bar{b}$ zadovoljavaju istovjetan skup $\mathrm{L}^s_{\infty\omega}$-formula u $\mathfrak{A}$, odnosno $\mathfrak{B}$, tj. za sve formule logike $\mathrm{L}^s_{\infty\omega}$ vrijedi $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}]$ akko $\mathfrak{B} \models \varphi[\bar{b}]$.*

Analogno pojmovima m-izomorfnosti i parcijalne izomorfnosti definiramo pojmove s-m-izomorfnosti i s-parcijalne izomorfnosti.

Definicija 2.15 *Kažemo da su strukture $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ s-m-izomorfne ukoliko postoji niz $(I_j)_{j \leq m}$ nepraznih skupova s-parcijalnih izomorfizama s $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$ sa slijedećim svojstvima:*

(s-m-back) *Za svaki $j < m$, $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_{j+1}$, $1 \leq i \leq s$ i $b \in |\mathfrak{B}|$ postoji $a \in |\mathfrak{A}|$ takav da je $\bar{a}\frac{a}{i} \mapsto \bar{b}\frac{b}{i} \in I_j$.*

[7] Za $\bar{a} \in |\mathfrak{A}| \cup \{*\}$ prilikom pisanja $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}]$ prešutno pretpostavljamo da slobodne varijable formule φ imaju indekse među $\operatorname{supp}(\bar{a})$.

(*s-m-forth*) *Za svaki* $j < m$, $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_{j+1}$, $1 \leq i \leq s$ *i* $a \in |\mathfrak{A}|$ *postoji* $b \in |\mathfrak{B}|$ *takav da je* $\bar{a}_i^a \mapsto \bar{b}_i^b \in I_j$.

Ukoliko $(I_j)_{j \leq m}$ *ima svojstva* (s-m–back) *i* (s-m-forth) *pišemo* $(I_j)_{j \leq m} : \mathfrak{A} \cong_m^s \mathfrak{B}$.

Definicija 2.16 *Strukture* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$ *su s-parcijalno izomorfne ukoliko postoji neprazan skup* I *s-parcijalnih izomorfizama s* $\mathfrak{A}$ *u* $\mathfrak{B}$ *t.d. vrijede slijedeća svojstva:* [8]

(*s-back*) *Za svaki* $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I$, $1 \leq i \leq s$ *i* $b \in |\mathfrak{B}|$ *postoji* $a \in |\mathfrak{A}|$ *takav da je* $\bar{a}_i^a \mapsto \bar{b}_i^b \in I$.

(*s-forth*) *Za svaki* $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I$, $1 \leq i \leq s$ *i* $a \in |\mathfrak{A}|$ *postoji* $b \in |\mathfrak{B}|$ *takav da je* $\bar{a}_i^a \mapsto \bar{b}_i^b \in I$.

Ukoliko skup I *ima svojstva* (s-back) *i* (s-forth) *pišemo* $I : \mathfrak{A} \cong_{\text{part}}^s \mathfrak{B}$.

Vezu između pitanja Duplikatorove pobjede u igrama $G_m^s(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$, odnosno $G_\infty^s(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ i s-m-izomorfnosti, odnosno s-izomorfnosti struktura $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ daje slijedeći teorem.

Teorem 2.17 *Neka su dane strukture* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$, *te* $\bar{a} \in |\mathfrak{A}| \cup \{*\}$ *i* $\bar{b} \in |\mathfrak{B}| \cup \{*\}$ *takvi da je* $\text{supp}(\bar{a}) = \text{supp}(\bar{b})$.

- *Slijedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
  1. *Duplikator pobjeđuje u igri* $G_m^s(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$.
  2. *Postoji* $(I_j)_{j \leq m}$ *s* $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_m$ *t.d. vrijedi* $I : \mathfrak{A} \cong_m^s \mathfrak{B}$.
- *Slijedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
  1. *Duplikator pobjeđuje u igri* $G_\infty^s(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$.
  2. *Postoji* I *s* $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I$ *takav da* $I : \mathfrak{A} \cong_{\text{part}}^s \mathfrak{B}$.

Istaknimo kao posljedicu slijedeći direktni korolar.

Korolar 2.18 (Barwise-Immermannov teorem) *Neka su dane strukture* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$.

- *Slijedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
  1. $\mathfrak{A} \cong_m^s \mathfrak{B}$.
  2. $\mathfrak{A} \equiv_m^s \mathfrak{B}$.
- *Slijedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
  1. $\mathfrak{A} \cong_{\text{part}}^s \mathfrak{B}$.
  2. $\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{L}_{\infty\omega}}^s \mathfrak{B}$.

[8] Uočimo kako svojstvo da su $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ s-parcijalno izomorfne ne znači da između $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ postoji s-parcijalni izomorfizam.

3 Aksiomi proširenja

Zamislimo slijedeći pokus kojim ćemo konstruirati beskonačnu strukturu nad skupom pozitivnih cijelih brojeva $\{1, 2, 3, \ldots\}$ u kojoj će interpretacije svakog relacijskog simbola neke relacijske signature biti slučajno odabrane. Za svaki relacijski simbol R arnosti m iz dane relacijske signature i svaku m-torku prirodnih brojeva $i_1, \ldots, i_m$ bacamo simetričan novčić kako bismo odlučili da li je $Ri_1 \ldots i_m$ istinit. Dobiveni ishod jednog takvog pokusa rezultira beskonačnom strukturom na nosaču $\{1, 2, 3, \ldots\}$ sa slučajno odabranim interpretacijama svih relacijskih simbola. Ono što je iznenađujuće jest da je struktura dobivena ovakvim pokusom (bez obzira na ishode bacanja novčića) zapravo jedinstveno određena do na izomorfizam (tj. svaka dva ishoda pokusa su međusobno izomorfna). [9]

Opisano svojstvo pokazat će se kao ključno u kasnijim dokazima 0-1 zakona, a da bismo ga dokazali konstruirat ćemo prvo tzv. *random* teoriju kojoj će na prethodni način opisana *random* struktura biti model. Osnovni građevni elementi random teorije bit će rečenice (tzv. aksiomi proširenja) koje će (intuitivno) govoriti da za svako r postoji barem r različitih elemenata u strukturi, te da se svaka podstruktura od r elemenata može proširiti dodatnim elementom na sve moguće načine.

Neka je τ relacijska signatura. Za $r \geq 1$ definiramo skup Δ_{r+1} na slijedeći način:

$$\Delta_{r+1} := \{\varphi(x_1, \ldots, x_k) \mid \varphi \text{ je atomarna formula oblika } R\bar{x}, \text{ gdje je } R \in \tau \text{ i } v_{r+1} \in \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}\}\}.$$

Primjer 3.1 *Ukoliko se τ sastoji samo od jednog binarnog predikata P, tada je*

$$\Delta_{r+1} = \{Pv_{r+1}v_{r+1}, Pv_1v_{r+1}, \ldots, Pv_rv_{r+1}, Pv_{r+1}v_1, \ldots, Pv_{r+1}v_r\}.$$

□

Za podskup $\Phi \subseteq \Delta_{r+1}$ definiramo rečenicu

$$\chi_\Phi := \forall v_1 \ldots \forall v_r \Big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq r} v_i \neq v_j \rightarrow \exists v_{r+1} \Big(\bigwedge_{1 \leq i \leq r} v_i \neq v_{r+1} \wedge \bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi \wedge \bigwedge_{\varphi \in \Phi^c} \neg\varphi \Big)\Big),$$

gdje je $\Phi^c := \Delta_{r+1} \setminus \Phi$. Rečenica χ_Φ naziva se *aksiom $(r+1)$-proširenja.*

Označimo s T_{rand} skup svih aksioma proširenja. T_{rand} se obično naziva teorija *random* struktura. Za tako definiranu teoriju očito vrijedi slijedeća lema.

[9] Uočimo da ukoliko opisani pokus provedemo za grafove, dobivamo beskonačni graf sa slučajno odabranim bridovima.

Lema 3.2 *Svaki model od T_{rand} je nužno beskonačan.*

Kao idući korak željeli bismo pokazati da su svaka dva modela od T_{rand} parcijalno izomorfna. No, prije toga uvedimo jednu pomoćnu oznaku koju ćemo često koristiti u daljnjem tekstu.

Definicija 3.3 *Neka je dana struktura $\mathfrak{A}$. Za $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_s) \in |\mathfrak{A}|$, $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_s)$ definiramo formulu $\varphi^0_{\mathfrak{A},\bar{a}}(v_1, \ldots, v_s)$ na slijedeći način:*

$$\varphi^0_{\mathfrak{A},\bar{a}}(\bar{v}) := \bigwedge \{\varphi(\bar{v}) \mid \varphi \text{ je atomarna ili negacija atomarne },\ \mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}]\}.$$

Intuitivno, formula $\varphi^0_{\mathfrak{A},\bar{a}}$ opisuje tip izomorfnosti podstrukture generirane s $\bar{a}$ u strukturi $\mathfrak{A}$ (sjetimo se da smo se ograničili samo na relacijske signature).

Napomena 3.4 *Lagano se vidi da je skup*

$$\{\varphi(\bar{v}) \mid \varphi \text{ je atomarna ili negacija atomarne },\ \mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}]\}$$

konačan, pa je $\varphi^0_{\mathfrak{A},\bar{a}}(\bar{v})$ formula logike prvog reda.

Lema 3.5 *Za bilo koja dva modela $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ od T_{rand} skup*

$$I := \left\{\bar{a} \mapsto \bar{b} \mid \bar{a} \in |\mathfrak{A}|,\ \bar{b} \in |\mathfrak{B}|,\ \varphi^0_{\mathfrak{A},\bar{a}} = \varphi^0_{\mathfrak{B},\bar{b}}\right\}$$

ima svojstva (back) *i* (forth), *tj. $I : \mathfrak{A} \cong_{\mathrm{part}} \mathfrak{B}$.*

Dokaz: Uočimo prvo da je I sigurno neprazan jer je prazni parcijalni izomorfizam $\emptyset$ u I. Neka je $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ parcijalni izomorfizam iz skupa I, pri čemu je $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_r)$, a $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_r)$. Pokažimo primjerice da vrijedi svojstvo *(forth)* (svojstvo (*back*) dokazuje se analogno). Neka je a_{r+1} element iz $\mathfrak{A} \setminus \{a_1, \ldots, a_r\}$. Odaberimo $\Phi \subseteq \Delta_{r+1}$ definiran s $\Phi := \{\varphi(v_1, \ldots, v_{r+1}) \mid \varphi \in \Delta_{r+1},\ \mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}a_{r+1}]\}$. Budući je $\mathfrak{B}$ model od T_{rand} specijalno je $\mathfrak{B} \models \chi_\Phi$, pa postoji element $b_{r+1} \in \mathfrak{B}$ takav da je $\mathfrak{B} \models (\bigwedge_{\varphi\in\Phi} \varphi \wedge \bigwedge_{\varphi\in\Phi^c} \neg\varphi)[\bar{b}b_{r+1}]$, tj. $\varphi^0_{\mathfrak{B},\bar{b}b_{r+1}} = \varphi^0_{\mathfrak{A},\bar{a}a_{r+1}}$. To znači da parcijalni izomorfizam $\bar{a}a_{r+1} \mapsto \bar{b}b_{r+1}$ leži u skupu I. Dakle, vrijedi svojstvo *(forth)*, odakle zaključujemo da je $I : \mathfrak{A} \cong_{\mathrm{part}} \mathfrak{B}$. $\square$

Napomena 3.6 *Prethodno svojstvo može se dokazati i eliminacijom kvantifikatora. Dokaz je dan u [4].*

Prema korolaru 2.10 slijedi da su svaka dva modela od T_{rand} $\mathrm{L}_{\infty\omega}$-ekvivalentna, tj. T_{rand} je potpuna teorija (za $\mathrm{L}_{\infty\omega}$-rečenice), pa stoga vrijedi slijedeća propozicija.

Propozicija 3.7 *Za svaku $\mathrm{L}_{\infty\omega}$-rečenicu φ vrijedi:*

$$T_{\mathrm{rand}} \models \varphi \quad \text{ili} \quad T_{\mathrm{rand}} \models \neg\varphi.$$

Pokažimo sada da teorija *random* struktura ima prebrojiv model.

Lema 3.8 *T_{rand} ima prebrojiv model.*

Dokaz: Neka je $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ enumeracija svih parova oblika $(\bar{m}, \chi)$, gdje je $\bar{m}$ r-torka međusobno različitih prirodnih brojeva, a χ aksiom $(r+1)$-proširenja. Dakle, $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ enumerira sve aksiome proširenja zajedno sa svim pripadajućim međusobno različitim r-torkama prirodnih brojeva. Pretpostavimo dodatno da su za pojedini $\alpha_n = (\bar{m}, \chi)$ sve komponente od $\bar{m}$ manje od n. Induktivno definiramo strukture $\mathfrak{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$ takve da je

$$|\mathfrak{A}_n| = \{0, \ldots, n\} \text{ i } \mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \ldots$$

s ciljem da njihova unija $\mathfrak{A} := \bigcup_{n\geq 0} \mathfrak{A}_n$ bude model od T_{rand}:

- Definiramo $\mathfrak{A}_0 := (|\mathfrak{A}_0|, (\emptyset)_{R\in\tau})$ (svaki relacijski simbol interpretiran je praznim skupom).
- Pretpostavimo da je struktura $\mathfrak{A}_n$ već definirana za $n \in \mathbb{N}$. Neka je $\alpha_n = (m_1, \ldots, m_r, \chi)$ gdje je $\chi = \chi_\Phi$, za neki $\Phi \subseteq \Delta_{r+1}$. Definiramo $\mathfrak{A}_{n+1}$ s nosačem $|\mathfrak{A}_{n+1}|$ tako da je $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}_{n+1}$, te da za svaki $\varphi \in \Delta_{r+1}$ vrijedi
$$\mathfrak{A}_{n+1} \vDash \varphi[m_1, \ldots, m_r, n+1] \quad \text{akko} \quad \varphi \in \Phi$$
(uočimo kako se v_{r+1} javlja u svakoj od formula u Δ_{r+1}, pa je prethodna definicija korektna). Ovime smo očito osigurali da je $\mathfrak{A}_{n+1}$ model za χ_Φ.

Definiramo li sada $\mathfrak{A} := \bigcup_{n\geq 0} \mathfrak{A}_n$, lako se vidi da je $\mathfrak{A}$ model za sve $\chi \in T_{\text{rand}}$, pa smo time dobili traženi prebrojiv model za T_{rand}. $\square$

Dakle, budući T_{rand} ima prebrojiv model, on je prema korolaru 2.12 jedinstveno određen (do na izomorfizam). Jedinstveni prebrojiv model od T_{rand} označavamo s $\mathfrak{R}$ i nazivamo beskonačna *random* struktura. [10]

* * *

Svaki aksiom proširenja je rečenica logike prvog reda, te smo pokazali kako je svaka $L_{\infty\omega}$-rečenica ili njena negacija logička posljedica unije svih aksioma proširenja. Da bismo dobili odgovarajući rezultat za logiku FO^s, odnosno $L^s_{\infty\omega}$ moramo ograničiti broj korištenih varijabli.

Za $s \geq 1$ označimo s ϵ_s konjunkciju konačno mnogo aksioma r-proširenja, gdje je $r \leq s$. Očito je $\epsilon_s \in FO^s$. Na isti način kao i u slučaju teorije T_{rand} može se pokazati da vrijede analogna svojstva:

[10] To je upravo struktura dobivena primjenom beskonačnog pokusa opisanog u uvodu ove sekcije.

1. Svaki model od ϵ_s ima najmanje s elemenata.

2. Svaka dva modela od $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ od ϵ_s su s-parcijalno izomorfna.

Prema korolaru 2.18 slijedi da su svaka dva modela od ϵ_s $\mathrm{L}^s_{\infty\omega}$-ekvivalentna, pa stoga dobivamo slijedeću propoziciju.

Propozicija 3.9 *Za svaku* $\mathrm{L}^s_{\infty\omega}$*-rečenicu* φ *vrijedi:*

$$\epsilon_s \models \varphi \quad \text{ili} \quad \epsilon_s \models \neg\varphi.$$

4 Labelirani 0-1 zakon za logike FO i $\mathrm{L}^\omega_{\infty\omega}$

Za klasu τ-struktura $\mathcal{K}$ označimo s $L_n(\mathcal{K})$ broj struktura u $\mathcal{K}$ s nosačem $\{1,\ldots,n\}$:

$$L_n(\mathcal{K}) := \operatorname{card}\{\mathfrak{A} \in \mathcal{K} \mid |\mathfrak{A}| = \{1,\ldots,n\}\}.$$

Strukture s nosačem $\{1,\ldots,n\}$ nazivaju se *labelirane* strukture budući je svaki element takve strukture labeliran prirodnim brojem. Dakle, $L_n(\mathcal{K})$ jest broj labeliranih struktura u $\mathcal{K}$ kardinaliteta n. Posebno, ukoliko je $\mathcal{K}$ klasa svih (konačnih) modela rečenice φ, odnosno klasa svih (konačnih) τ-struktura koristimo oznake $L_n(\varphi)$, odnosno $L_n(\tau)$.

Označimo s $l_n(\mathcal{K})$ udio svih labeliranih τ-struktura koje se nalaze u $\mathcal{K}$:

$$l_n(\mathcal{K}) := \frac{L_n(\mathcal{K})}{L_n(\tau)}.$$

U slučaju kada postoji, limes $l(\mathcal{K}) := \lim_{n\to\infty} l_n(\mathcal{K})$ se naziva *labelirana asimptotska vjerojatnost* od $\mathcal{K}$. Analogno, $l_n(\varphi)$ označava $l_n(\mathrm{Mod}(\varphi))$, dok $l(\varphi)$ stoji za $l(\mathrm{Mod}(\varphi))$. Ukoliko je $l(\varphi) = 1$ kažemo da φ vrijedi u *gotovo svim* konačnim strukturama, odnosno da φ vrijedi *gotovo sigurno.*

Definicija 4.1 *Klasa* τ*-rečenica* Ψ *zadovoljava* labelirani 0-1 zakon *ukoliko za sve* $\varphi \in \Psi$ *vrijedi*

$$l(\varphi) = 1 \quad \text{ili} \quad l(\varphi) = 0,$$

odnosno, ekvivalentno izrečeno, ukoliko za sve $\varphi \in \Psi$ *ili* φ *ili* $\neg\varphi$ *vrijedi gotovo sigurno.*

Primjer 4.2 *Neka je* $\tau = \{E\}$*, gdje je* E *binarni relacijski simbol. Neusmjereni graf je* τ*-struktura* $\mathfrak{G} = (|\mathfrak{G}|, E^{\mathfrak{G}})$ *koja zadovoljava slijedeća svojstva:*

1. *za sve* $a \in |\mathfrak{G}|$*: nije* $E^{\mathfrak{G}}aa$*;*

2. *za sve* $a, b \in |\mathfrak{G}|$*: ako je* $E^{\mathfrak{G}}ab$*, onda je i* $E^{\mathfrak{G}}ba$*.*

Označimo s $\mathcal{G}_n$ skup svih grafova na $\{1, \ldots, n\}$. Uočimo kako je tada $|\mathcal{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}$. Izraz za labeliranu asimptotsku vjerojatnost rečenice φ koja opisuje određeno svojstvo grafova u tom će slučaju glasiti:

$$l(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \frac{\{\mathfrak{G} \in \mathcal{G}_n \mid \mathfrak{G} \text{ ima svojstvo } \varphi\}}{|\mathcal{G}_n|}$$

(a) *Neka je φ rečenica koja govori da "u grafu postoji izolirani vrh". Izolirani vrh očito može biti odabran na n načina, dok preostali vrhovi mogu formirati ostatak grafa na proizvoljan način. Stoga vrijedi:*

$$l_n(\varphi) \leq \frac{n \cdot 2^{\binom{n-1}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = \frac{n}{2^{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

pa je $l(\varphi) = 0$.

(b) *Neka rečenica φ govori da je "graf povezan". Pokažimo da u tom slučaju vrijedi $l(\varphi) = 1$. Rečenica φ nije izraziva u logici prvog reda, pa stoga gledamo slijedeću rečenicu:*

$$\psi := \forall x \forall y (x \neq y \to \exists z (Exz \wedge Eyz)).$$

Rečenica ψ povlači svojstvo povezanosti, pa je stoga dovoljno pokazati da vrijedi $l(\psi) = 1$. Pokazat ćemo da je $l(\neg\psi) = 0$. Potrebno je uočiti koliko ima parova vrhova $\{x, y\}$ takvih da se u kombinaciji sa svakim od preostalih vrhova z dogodi jedan od slijedeća tri slučaja:

- $\neg Exz \wedge Eyz$,
- $Exz \wedge \neg Eyz$,
- $\neg Exz \wedge \neg Eyz$.

Jednostavnim prebrojavanjem slijedi:

$$l_n(\neg\psi) \leq \frac{\binom{n}{2} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{n-2}{2}} \cdot 3^{n-2}}{2^{\binom{n}{2}}} = \binom{n}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

pa je stoga $l(\neg\psi) = 0$, odnosno $l(\psi) = 1$.

(c) $l($*"graf sadrži trokut"*$) = 1$.

(d) $l($*"graf je acikličan"*$) = 0$.

(e) $l($*"graf je 2-obojiv"*$) = 0$.

(e) $l($*"broj vrhova u grafu je paran"*$)$ *ne postoji, budući pripadna vjerojatnost l_n oscilira između 0 i 1.*

Primjer 4.3 *Neka je* $\tau = \{P, c\}$, *gdje je* P *unarni relacijski simbol. Uočimo da za svaku* τ*-strukturu* $(|\mathfrak{A}|, P^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}})$ *očito vrijedi*

$$(|\mathfrak{A}|, P^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}) \models Pc \quad akko \quad (|\mathfrak{A}|, P^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}) \not\models \neg Pc.$$

Odavle slijedi da je $l_n(Pc) = \frac{1}{2}$, *pa je stoga i* $l(Pc) = \frac{1}{2}$.

Ovaj primjer pokazuje kako labelirani 0-1 zakon za logiku prvog reda nad signaturom koja sadrži konstanske simbole općenito neće vrijediti.

Primjer 4.4 *Za signaturu* $\tau = \{f\}$, *gdje je* f *unarni funkcijski simbol, promotrimo rečenicu prvog reda* $\forall x f(x) \neq x$ *koja izražava svojstvo da funkcija* f *nema fiksnu točku. Uočimo kako će to svojstvo biti osigurano akko za svaki* $i \in \{1, \dots, n\}$ $f(i)$ *poprima jednu od* $n-1$ *mogućih vrijednosti različitih od* i. *Stoga vrijedi:*

$$l_n(\forall x f(x) \neq x) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = (1 - \frac{1}{n})^n.$$

Odatle slijedi da je $l(\forall x f(x) \neq x) = e^{-1}$.

Ovaj primjer pokazuje kako labelirani 0-1 zakon za logiku prvog reda nad signaturom koja sadrži funkcijske simbole općenito neće vrijediti. [11]

Dakle, primjeri 4.3 i 4.4 pokazuju kako labelirani 0-1 zakon možemo očekivati samo za logiku prvog reda nad relacijskom signaturom. U daljnjem tekstu pokazat ćemo kako u tom slučaju labelirani 0-1 zakon za logiku prvog reda doista i vrijedi.

Već smo ranije dokazali da je svaka rečenica φ ili njena negacija $\neg\varphi$ logička posljedica aksioma proširenja. Osnovni korak kojeg je još potrebno napraviti da bismo dokazali labelirani 0-1 zakon jest da svi aksiomi proširenja vrijede gotovo sigurno. O tome nam govori iduća lema.

Lema 4.5 *Svaki aksiom proširenja vrijedi u gotovo svim konačnim strukturama.*

Dokaz: Moramo pokazati da za svaki podskup $\Phi \subseteq \Delta_{r+1}$ labelirana asimptotska vjerojatnost $l(\chi_\Phi)$ iznosi 1. Pokažimo da vrijedi $l(\neg\chi_\Phi) = 0$. Za svaku r-torku $(a_1, \dots, a_r)$ različitih elemenata iz strukture $\mathfrak{A}$ neka je $a \in |\mathfrak{A}|$ element različit od $(a_1, \dots, a_r)$. Neka su (za odabrane $(a_1, \dots, a_r)$ i a) istinitosne vrijednosti od $R\bar{b}$ za sve $R \in \tau$ i $\bar{b} \in \{a_1, \dots, a_r, a\}$ koji sadrže

[11] Lynch je pokazao ([9]) kako za logiku prvog reda nad signaturom koja sadrži unarne funkcijske simbole vrijedi tzv. zakon konvergencije koji govori da za sve rečenice φ labelirana asimptotska vjerojatnost $l(\varphi)$ postoji i poprima vrijednosti između 0 i 1.

a odabrane slučajno. Neka je δ vjerojatnost da odabrana $(r+1)$-torka $(a_1, \ldots, a_r, a)$ zadovoljava $\{\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \cup \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Phi^c\}$. Ukoliko s c označimo broj podskupova od Δ_{r+1} očito je vjerojatnost δ jednaka $\frac{1}{c}$, pa je specijalno $\delta > 0$. Uočimo da r-torku $(a_1, \ldots, a_r)$ možemo odabrati na $n^{\underline{r}}$ načina, te da vjerojatnost da $(a_1, \ldots, a_r, a)$ ne zadovoljava $\{\varphi \mid \varphi \in \Phi\} \cup \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Phi^c\}$ iznosi $1 - \frac{1}{c}$, odakle slijedi:

$$\begin{aligned} l_n(\neg\chi_\Phi) = l_n(\exists v_1 \ldots \exists v_r (& \bigwedge_{1 \le i < j \le r} v_i \ne v_j \wedge \\ & \forall v_{r+1} (\bigvee_{1 \le i \le r} v_i = v_{r+1} \vee \bigvee_{\varphi \in \Phi} \neg\varphi \vee \bigvee_{\varphi \in \Phi^c} \varphi))) \\ & \le n^r \left(\frac{c-1}{c} \right)^{n-r} = n^r (1-\delta)^{n-r}. \end{aligned}$$

Odavle slijedi da je $l(\neg\chi_\Phi) = \lim_{n\to\infty} l_n(\neg\chi_\Phi) = 0$, pa je onda $l(\chi_\Phi) = 1$. $\square$

Kao posljedicu dobivamo slijedeći korolar.

Korolar 4.6 *Neka je φ rečenica prvog reda. Tada vrijedi:*

1. *Ako je $T_{\text{rand}} \models \varphi$, tada je $l(\varphi) = 1$.*
2. *Ako je $T_{\text{rand}} \models \neg\varphi$, tada je $l(\varphi) = 0$.*

Dokaz:

1. Ako je $T_{\text{rand}} \models \varphi$, tada prema teoremu kompaktnosti postoji konačan podskup $T_0 \subseteq T_{\text{rand}}$ takav da $T_0 \models \varphi$. Budući je T_0 konačan skup aksioma proširenja prema prethodnoj lemi slijedi $l(\bigwedge T_0) = 1$. Stoga je $l(\varphi) = 1$.
2. Ako je pak $T_{\text{rand}} \models \neg\varphi$, tada prema prvom dijelu korolara slijedi $l(\neg\varphi) = 1$, pa je onda $l(\varphi) = 0$. $\square$

Podsjetimo se da smo za $s \ge 1$ s ϵ_s označili konjunkciju konačno mnogo aksioma r-proširenja, gdje je $r \le s$. Iz leme 4.5 slijedi da za svaki ϵ_s vrijedi svojstvo $l(\epsilon_s) = 1$. Odatle dobivamo naredni korolar.

Korolar 4.7 *Neka je φ $\mathrm{L}^\omega_{\infty\omega}$-rečenica. Tada vrijedi:*

1. *Ako je $\epsilon_s \models \varphi$, tada je $l(\varphi) = 1$.*
2. *Ako je $\epsilon_s \models \neg\varphi$, tada je $l(\varphi) = 0$.*

Izrecimo na kraju teorem koji govori o labeliranom 0-1 zakonu u logici prvog reda i $\mathrm{L}^\omega_{\infty\omega}$ logici.

Teorem 4.8 *Neka je τ relacijska signatura. Tada logika prvog reda i $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ logika nad signaturom τ zadovoljavaju labelirani 0-1 zakon.*

Dokaz: Sjetimo se da prema propoziciji 3.7 za sve rečenice prvog reda φ vrijedi:

$$T_{\text{rand}} \models \varphi \quad \text{ili} \quad T_{\text{rand}} \models \neg\varphi,$$

te, također, prema propoziciji 3.9 za sve rečenice $\varphi \in \mathrm{L}^{s}_{\infty\omega}$ vrijedi:

$$\epsilon_s \models \varphi \quad \text{ili} \quad \epsilon_s \models \neg\varphi.$$

Tvrdnja teorema onda direktno slijedi iz prethodna dva korolara. □

5 Parametarske klase

Uočimo kako osnovnim teoremom o 0-1 zakonu za logiku prvog reda i $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ logiku zapravo još uvijek nismo dokazali davno najavljenu tvrdnju o tome kako se svako svojstvo grafova definabilno u logici prvog reda (odnosno $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ logici) podvrgava 0-1 zakonu. Da bismo takva pitanja mogli precizno tretirati koristimo pojam uvjetne vjerojatnosti i odgovarajućom prilagodbom argumenata iznesenih u prethodnoj sekciji pokazujemo da 0-1 zakon vrijedi i za uvjetne vjerojatnosti u odnosu na klasu struktura koje su aksiomatizabilne tzv. "parametarskim" aksiomima (klasa grafova ima to svojstvo).

Neka su $\mathcal{K}$ i $\mathcal{H}$ klase τ-struktura. Labeliranu vjerojatnost $l_n(\mathcal{K} \mid \mathcal{H})$ definiramo kao:

$$l_n(\mathcal{K} \mid \mathcal{H}) := \frac{L_n(\mathcal{K} \cap \mathcal{H})}{L_n(\mathcal{H})},$$

pri čemu je razlomak definiran u slučaju kada $\mathcal{H}$ sadrži barem jednu strukturu kardinaliteta n. Ukoliko postoji, limes $l(\mathcal{K} \mid \mathcal{H}) := \lim_{n\to\infty} l_n(\mathcal{K} \mid \mathcal{H})$ se naziva *labelirana asimptotska vjerojatnost* od $\mathcal{K}$ *obzirom na* $\mathcal{H}$. Na analogan način definiraju se $l_n(\varphi \mid \mathcal{H})$ i $l_n(\mathcal{K} \mid \tau)$, odnosno $l(\varphi \mid \mathcal{H})$ i $l(\mathcal{K} \mid \tau)$. Uočimo kako po definiciji slijedi da je $l_n(\mathcal{K} \mid \tau) = l_n(\mathcal{K})$, odnosno $l(\mathcal{K} \mid \tau) = l(\mathcal{K})$.

Primjer 5.1 *Označimo s* GRAPH *klasu svih konačnih neusmjerenih grafova, a s* CONN *klasu svih konačnih povezanih grafova. Tada* $l_n(\text{CONN} \mid \text{GRAPH})$ *predstavlja udio povezanih grafova s vrhovima iz* $\{1, \ldots, n\}$ *među svim grafovima s vrhovima iz* $\{1, \ldots, n\}$.

Obzirom da će nam u daljnjem tekstu često biti potrebna, uvodimo slijedeću pokratu:

$$\forall_{\neq} x_1 \ldots x_s \psi \equiv \\ \forall x_1 \ldots \forall x_s((x_1 \neq x_2 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \ldots \wedge x_{s-1} \neq x_s) \rightarrow \psi).$$

Definicija 5.2 *Neka je τ relacijska signatura. Rečenica prvog reda φ naziva se* parametarskom *ukoliko je ona konjunkcija rečenica oblika $\forall_{\neq} x_1 \dots x_s \psi$, gdje je $s \geq 1$, a ψ je logička kombinacija atomarnih formula oblika $Ry_1 \dots y_n$, odnosno $\neg Ry_1 \dots y_n$, gdje je $R \in \tau$ i $\{y_1, \dots, y_n\} = \{x_1, \dots, x_s\}$. Za klasu struktura $\mathcal{K}$ kažemo da je* parametarska *ukoliko je $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\varphi)$, za neku parametarsku rečenicu φ.*

Pogledajmo neke primjere parametarskih rečenica.

Primjer 5.3

1. *$\forall x \neg Exx \wedge \forall_{\neq} xy(Exy \rightarrow Eyx)$, odnosno $\forall x \neg Exx$ su parametarske rečenice koje aksiomatiziraju klasu neusmjerenih, odnosno usmjerenih grafova.*

2. *Klasa turnira aksiomatizirana je parametarskom rečenicom $\forall x \neq Exx \wedge \forall_{\neq} xy(Exy \leftrightarrow \neg Exy)$.*

3. *Uočimo kako $\forall_{\neq} xyz((Exy \wedge Eyz) \rightarrow Exz)$ nije parametarska rečenica (npr. $\{x, y\} \neq \{x, y, z\}$). Zapravo, iz analize koja slijedi postat će jasno da, primjerice, klase tranzitivnih relacija, relacija ekvivalencije, parcijalnih uređaja, linearnih uređaja nisu parametarske, pri čemu je tranzitivnost zapravo jedina prepreka koja to onemogućava.*

4. *Za relacijski simbol R arnosti k, $\forall_{\neq} x_1 \dots x_k (Rx_1 \dots x_k \wedge \neg Rx_1 \dots x_k)$ je parametarska rečenica koja je očito istinita u svim strukturama kardinaliteta $< k$, ali nema model kardinaliteta $\geq k$.*

Označimo s k maksimum arnosti relacijskih simbola u τ. Parametarska rečenica (i njoj pripadna klasa modela) naziva se *netrivijalnom* ukoliko ima modele kardinaliteta $\geq k$.

Lema 5.4 *Svaka netrivijalna parametarska rečenica ima po volji velike modele.*

Dokaz: Neka je φ_0 netrivijalna parametarska rečenica. Za dani neprazan skup B slijedećom procedurom generirat ćemo model za φ_0 s nosačem B. Neka je s k označen maksimum arnosti relacijskih simbola. Za proizvoljan $s \leq k$ i međusobno različite $b_1, \dots, b_s \in B$ odabiremo proizvoljan model $\mathfrak{A}$ od φ_0 kardinaliteta $\geq s$ (takav očito postoji jer je φ_0 netrivijalna parametarska rečenica) i međusobno različite $a_1, \dots, a_s \in |\mathfrak{A}|$. Za sve $R \in \tau$ definiramo "$\{b_1, \dots, b_s\}$-dio od R^B" kao odgovarajuću kopiju "$\{a_1, \dots, a_s\}$-dijela od $R^{|\mathfrak{A}|}$" na slijedeći način. Za $\varphi(v_1, \dots, v_s) = Ry_1 \dots y_n$ gdje za skupove varijabli vrijedi $\{y_1, \dots, y_n\} = \{v_1, \dots, v_s\}$ definiramo "$\{b_1, \dots, b_s\}$-dio od R^B" relacijom:

$$(B, (R^B)_{R \in \tau}) \models \varphi[b_1, \dots, b_s] \quad \text{akko} \quad \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_s].$$

Na ovaj se način svaka s-torka različitih elemenata iz $(B, (R^B)_{R\in\tau})$ ponaša kao s-torka iz nekog modela od φ_0. Kako je φ_0 parametarska rečenica, $(B, (R^B)_{R\in\tau})$ doista predstavlja model od φ_0. $\Box$

Neka je φ_0 netrivijalna parametarska rečenica. Tada aksiom $(r+1)$-proširenja

$$\forall_{\neq} v_1 \ldots v_r \exists v_{r+1} \big(\bigwedge_{1\leq i\leq r} v_i \neq v_{r+1} \ \wedge \ \bigwedge_{\varphi\in\Phi} \varphi \ \wedge \ \bigwedge_{\varphi\in\Phi^c} \neg\varphi \big)\big)$$

nazivamo kompatibilnim s φ_0 ukoliko je skup formula

$$\{\varphi_0\} \cup \{\exists v_1 \ldots \exists v_r \exists v_{r+1} \big(\bigwedge_{1\leq i<j\leq r+1} v_i \neq v_j \ \wedge \ \bigwedge_{\varphi\in\Phi} \varphi \ \wedge \ \bigwedge_{\varphi\in\Phi^c} \neg\varphi \big)\big)\}$$

ispunjiv.

Označimo s $T_{\text{rand}}(\varphi_0)$ skup rečenica koji se sastoji od φ_0 i svih aksioma proširenja kompatibilnih s φ_0. Analogno kao u dokazu leme 3.5 da su svaka dva modela od T_{rand} parcijalno izomorfna, pokazalo bi se da su i svaka dva modela od $T_{\text{rand}}(\varphi_0)$ parcijalno izomorfna, pa stoga i $\mathrm{L}_{\infty\omega}$-ekvivalentna. Odatle slijedi propozicija:

Propozicija 5.5 *Za sve* $\mathrm{L}_{\infty\omega}$*-rečenice* ψ *vrijedi:*

$$T_{\text{rand}}(\varphi_0) \models \psi \quad \textit{ili} \quad T_{\text{rand}}(\varphi_0) \models \neg\psi.$$

Također, na sličan način kao u dokazu leme 3.8 pokazalo bi se da vrijedi lema:

Lema 5.6 $T_{\text{rand}}(\varphi_0)$ *ima (do na izomorfizam) jedinstven prebrojiv model* $\mathfrak{R}(\varphi_0)$.

Za $s \geq 1$ označimo s φ_0^s konjunkciju φ_0 s svim aksiomima r-proširenja za koje je $r \leq s$ i koji su kompatibilni s φ_0. Sličnom argumentacijom kao ranije dobili bismo da su svaka dva modela od φ_0^s s-parcijalno izomorfna, pa stoga i $\mathrm{L}^s_{\infty\omega}$-ekvivalentna. Odatle slijedi:

Propozicija 5.7 *Za sve* $\mathrm{L}^s_{\infty\omega}$*-rečenice* ψ *vrijedi:*

$$\varphi_0^s \models \psi \quad \textit{ili} \quad \varphi_0^s \models \neg\psi.$$

Napokon, imamo slijedeću propoziciju.

Propozicija 5.8 *Ako je* ψ *aksiom proširenja kompatibilan s* φ_0 *tada je* $l(\psi \mid \varphi_0) = 1$.

Dokaz (skica): Dokaz tvrdnje propozicije može se provesti u potpunosti analogno kao dokaz leme 4.5, jedino što se sada u ovom slučaju moramo restringirati samo na modele od φ_0. Pritom će se konstanta c uzeti kao broj svih podskupova Φ od Δ_{r+1} koji odgovaraju aksiomima $(r+1)$-proširenja kompatibilnim s φ_0. $\square$

Neka je $\mathcal{H}$ klasa struktura, te neka je Ψ klasa rečenica. Kažemo da $\mathcal{H}$ *zadovoljava labelirani 0-1 zakon za* Ψ ako za sve $\psi \in \Psi$ vrijedi:

$$l(\psi \mid \mathcal{H}) = 1 \quad \text{ili} \quad l(\psi \mid \mathcal{H}) = 0.$$

Spajanjem prethodnih propozicija dobivamo kao zaključak slijedeći teorem.

Teorem 5.9 *Neka je $\mathcal{H}$ netrivijalna parametarska klasa. Tada $\mathcal{H}$ zadovoljava labelirani 0-1 zakon za logiku $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega}$, a stoga i za logiku prvog reda.*

6 Nelabelirani 0-1 zakon

U ovoj sekciji za klasu struktura $\mathcal{K}$ proučit ćemo tzv. *nelabeliranu vjerojatnost* $u_n(\mathcal{K})$ koja predstavlja udio tipova izomorfizma struktura kardinaliteta n u klasi $\mathcal{K}$. Nelabelirana uvjetna vjerojatnost definirana je analogno. Kao što ćemo vidjeti u tekstu koji slijedi, pokazat će se da se labelirane i nelabelirane asimptotske vjerojatnosti podudaraju u slučaju kada gotovo sve strukture u pripadajućim klasama imaju svojstvo rigidnosti.

Za klasu struktura $\mathcal{K}$ neka $U_n(\mathcal{K})$ predstavlja broj tipova izomorfizma struktura kardinaliteta n u $\mathcal{K}$, odnosno, ekvivalentno:

$$U_n(\mathcal{K}) := \text{broj tipova izomorfizma struktura u } \mathcal{K} \text{ s nosačem } \{1, \ldots, n\}.$$

Oznake $U_n(\tau)$ i $U_n(\varphi)$ stoje za $U_n(\mathcal{K})$, gdje $\mathcal{K}$ predstavlja klasu svih τ-struktura, odnosno klasu svih modela od φ, respektivno.

Neka je dana klasa struktura $\mathcal{K}$. Definirajmo

$$u_n(\mathcal{K}) := \frac{U_n(\mathcal{K})}{U_n(\tau)},$$

te označimo (u slučaju kada limes postoji) s $u(\mathcal{K}) := \lim_{n\to\infty} u_n(\mathcal{K})$ *nelabeliranu asimptotsku vjerojatnost* od $\mathcal{K}$.

Za klase struktura $\mathcal{K}$ i $\mathcal{H}$, izraz

$$u_n(\mathcal{K} \mid \mathcal{H}) := \frac{U_n(\mathcal{K} \cap \mathcal{H})}{U_n(\mathcal{H})}$$

nazivamo nelabelirana vjerojatnost od $\mathcal{K}$ u odnosu na $\mathcal{H}$, a

$$u(\mathcal{K} \mid \mathcal{H}) := \lim_{n\to\infty} u_n(\mathcal{K} \mid \mathcal{H})$$

nelabelirana asimptotska vjerojatnost od $\mathcal{K}$ u odnosu na $\mathcal{H}$.

Primjer 6.1 *Nelabelirana vjerojatnost* $u_n(\mathrm{CONN} \mid \mathrm{GRAPH})$ *predstavlja udio tipova izomorfizma povezanih grafova s n vrhova među ukupnim brojem tipova izomorfizma svih grafova s n vrhova.*

U proučavanju odnosa između labeliranih i nelabeliranih vjerojatnosti istaknutu ulogu igra klasa RIG rigidnih struktura.

Definicija 6.2 *Struktura* $\mathfrak{A}$ *naziva se* rigidnom *ukoliko je identiteta na* $|\mathfrak{A}|$ *jedini automorfizam od* $\mathfrak{A}$.

Pogledajmo sada neka svojstva implicirana (ne)rigidnošću.

Lema 6.3

1. $L_n(\mathcal{K}) \leq U_n(\mathcal{K}) \cdot n!$
2. *Ako je* $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{RIG}$ *tada je* $L_n(\mathcal{K}) = U_n(\mathcal{K}) \cdot n!$
3. *Ako je* $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{RIG}^c$ *tada je* $L_n(\mathcal{K}) \leq U_n(\mathcal{K}) \cdot \frac{n!}{2}$

Dokaz: Budući vrijedi $L_n(\mathcal{K}) = L_n(\mathcal{K} \cap \mathrm{RIG}) + L_n(\mathcal{K} \cap \mathrm{RIG}^c)$, odnosno $U_n(\mathcal{K}) = U_n(\mathcal{K} \cap \mathrm{RIG}) + U_n(\mathcal{K} \cap \mathrm{RIG}^c)$, dovoljno je dokazati tvrdnje 2. i 3. Neka je $\mathfrak{A}$ struktura s nosačem $\{1, \ldots, n\}$. Znamo da postoji $n!$ permutacija od $\{1, \ldots, n\}$. Svaka permutacija π daje strukturu $\mathfrak{A}_\pi$ s nosačem $\{1, \ldots, n\}$ takvu da je $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}_\pi$ (π je izomorfizam između $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}_\pi$). Očito, za permutacije π i ρ od $\{1, \ldots, n\}$ onda imamo:

$$\mathfrak{A}_\pi = \mathfrak{A}_\rho \quad \text{akko} \quad \pi^{-1} \circ \rho : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}.$$

Stoga, ukoliko je $\mathfrak{A}$ rigidna, identiteta je jedini izomorfizam s $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}$, pa vrijedi:

$$\mathfrak{A}_\pi = \mathfrak{A}_\rho \quad \text{akko} \quad \pi = \rho.$$

Dakle, permutiranjem rigidne strukture dobivamo $n!$ različitih struktura na $\{1, \ldots, n\}$, tj. $L_n(\mathcal{K}) = U_n(\mathcal{K}) \cdot n!$.
Ukoliko $\mathfrak{A}$ nije rigidna i ρ je neki netrivijalni automorfizam od $\mathfrak{A}$, onda vrijedi:

$$\mathfrak{A}_\pi = \mathfrak{A}_{\pi\circ\rho},$$

za bilo koju permutaciju π. Stoga permutiranjem nerigidne strukture dobivamo najviše $\frac{n!}{2}$ različitih struktura na $\{1, \ldots, n\}$, pa je $L_n(\mathcal{K}) \leq U_n(\mathcal{K}) \cdot \frac{n!}{2}$.
□

Lema 6.4 *Za sve klase struktura $\mathcal{H}$ vrijedi:*

$$u_n(\mathrm{RIG} \mid \mathcal{H}) \leq l_n(\mathrm{RIG} \mid \mathcal{H}).$$

Posebno, $u(\mathrm{RIG} \mid \mathcal{H}) = 1$ *povlači* $l(\mathrm{RIG} \mid \mathcal{H}) = 1$.

Dokaz:

$$\begin{aligned} u_n(\mathrm{RIG} \mid \mathcal{H}) &= \frac{U_n(\mathrm{RIG} \cap \mathcal{H}) \cdot n!}{U_n(\mathrm{RIG} \cap \mathcal{H}) \cdot n! + U_n(\mathrm{RIG}^c \cap \mathcal{H}) \cdot n!} \\ &\leq \frac{L_n(\mathrm{RIG} \cap \mathcal{H})}{L_n(\mathrm{RIG} \cap \mathcal{H}) + L_n(\mathrm{RIG}^c \cap \mathcal{H})} \\ &= l_n(\mathrm{RIG} \mid \mathcal{H}). \end{aligned}$$

□

Lema 6.3 nam ukazuje kako će gotovo sve strukture u klasi $\mathcal{H}$ biti rigidne akko vrijedi $L_n(\mathcal{H}) \approx U_n(\mathcal{H}) \cdot n!$. Preciznije o tome govori slijedeća propozicija.

Propozicija 6.5 *Neka je $\mathcal{H}$ klasa struktura. Tada vrijedi:*

$$u(\mathrm{RIG} \mid \mathcal{H}) = 1 \quad \textit{akko} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{L_n(\mathcal{H})}{U_n(\mathcal{H}) \cdot n!} = 1.$$

Dokaz: Budući je

$$\begin{aligned} \frac{L_n(\mathcal{H})}{U_n(\mathcal{H}) \cdot n!} &= \frac{L_n(\mathrm{RIG} \cap \mathcal{H})}{U_n(\mathcal{H}) \cdot n!} + \frac{L_n(\mathrm{RIG}^c \cap \mathcal{H})}{U_n(\mathcal{H}) \cdot n!} \\ &= u_n(\mathrm{RIG} \mid \mathcal{H}) + \frac{L_n(\mathrm{RIG}^c \cap \mathcal{H})}{U_n(\mathcal{H}) \cdot n!}, \end{aligned}$$

odakle je očito

$$u_n(\mathrm{RIG} \mid \mathcal{H}) \leq \frac{L_n(\mathcal{H})}{U_n(\mathcal{H}) \cdot n!},$$

koristeći 3. tvrdnju iz leme 6.3 dobivamo:

$$\begin{aligned} &u_n(\mathrm{RIG} \mid \mathcal{H}) \leq \frac{L_n(\mathcal{H})}{U_n(\mathcal{H}) \cdot n!} \leq \\ &\qquad u_n(\mathrm{RIG} \mid \mathcal{H}) + \frac{1}{2} u_n(\mathrm{RIG}^c \mid \mathcal{H}) = 1 - \frac{1}{2} u_n(\mathrm{RIG}^c \mid \mathcal{H}). \end{aligned}$$

Dakle, ukoliko vrijedi $u(\mathrm{RIG} \mid \mathcal{H}) = 1$ slijedi $\lim_{n\to\infty} \frac{L_n(\mathcal{H})}{U_n(\mathcal{H}) \cdot n!} = 1$, dok s druge strane $\lim_{n\to\infty} \frac{L_n(\mathcal{H})}{U_n(\mathcal{H}) \cdot n!} = 1$, povlači $u(\mathrm{RIG}^c \mid \mathcal{H}) = 0$, odakle je $u(\mathrm{RIG} \mid \mathcal{H}) = 1$. □

Naredni teorem predstavlja osnovni korak za proširivanje 0-1 zakona s labeliranog na nelabelirani slučaj.

Teorem 6.6 *Neka je $\mathcal{H}$ klasa struktura. Ukoliko su gotovo sve strukture u $\mathcal{H}$ rigidne, tj. ukoliko vrijedi $u(\mathrm{RIG} \mid \mathcal{H}) = 1$, onda se za svaku klasu struktura $\mathcal{K}$ labelirane i nelabelirane asimptotske vjerojatnosti obzirom na $\mathcal{H}$ podudaraju, tj. vrijedi:* [12]

$$l(\mathcal{K} \mid \mathcal{H}) = u(\mathcal{K} \mid \mathcal{H}).$$

Dokaz: Prema pretpostavci teorema je $u(\mathrm{RIG} \mid \mathcal{H}) = 1$, pa je stoga i $l(\mathrm{RIG} \mid \mathcal{H}) = 1$. Budući su gotovo sve strukture u $\mathcal{H}$ rigidne, lako se može pokazati da vrijedi:

$$l(\mathcal{K} \mid \mathcal{H}) = l(\mathcal{K} \mid \mathrm{RIG} \cap \mathcal{H}) \quad \text{i} \quad u(\mathcal{K} \mid \mathcal{H}) = u(\mathcal{K} \mid \mathrm{RIG} \cap \mathcal{H}).$$

Nadalje, vrijedi:

$$\begin{aligned} l_n(\mathcal{K} \mid \mathrm{RIG} \cap \mathcal{H}) &= \frac{L_n(\mathcal{K} \cap \mathrm{RIG} \cap \mathcal{H})}{L_n(\mathrm{RIG} \cap \mathcal{H})} \\ &= \frac{U_n(\mathcal{K} \cap \mathrm{RIG} \cap \mathcal{H}) \cdot n!}{U_n(\mathrm{RIG} \cap \mathcal{H}) \cdot n!} = u_n(\mathcal{K} \mid \mathrm{RIG} \cap \mathcal{H}). \end{aligned}$$

Dakle, dobivamo da je $l(\mathcal{K} \mid \mathrm{RIG} \cap \mathcal{H}) = u(\mathcal{K} \mid \mathrm{RIG} \cap \mathcal{H})$, pa odatle slijedi i tvrdnja teorema $l(\mathcal{K} \mid \mathcal{H}) = u(\mathcal{K} \mid \mathcal{H})$. □

Neka je $\mathcal{H} = \mathrm{Mod}(\varphi_0)$ parametarska klasa određena parametarskom rečenicom φ_0. Kažemo da je $\mathcal{H}$ *slobodna* ako za neki $m \geq 2$ postoji relacijski simbol R arnosti r i surjekcija $i\colon \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, m\}$ takvi da su formule

$$\varphi_0 \wedge \exists x_1 \ldots \exists x_m (\bigwedge_{1 \leq k < l \leq m} x_k \neq x_l \wedge R x_{i(1)} \ldots x_{i(r)})$$

i

$$\varphi_0 \wedge \exists x_1 \ldots \exists x_m (\bigwedge_{1 \leq k < l \leq m} x_k \neq x_l \wedge \neg R x_{i(1)} \ldots x_{i(r)})$$

ispunjive. Intuitivno, parametarska klasa $\mathcal{H}$ je slobodna ukoliko za neki $r \geq 2$ postoji mogućnost izbora prilikom fiksiranja dijelova relacije koje odgovaraju r-torkama različitih elemenata.

Primjer 6.7
1. *Klasa* GRAPH *je netrivijalna slobodna parametarska klasa.*
2. *Klasa svih τ-struktura, gdje se τ sastoji od barem jednog relacijskog simbola arnosti ≥ 2 je netrivijalna slobodna parametarska klasa.*

Bez dokaza navodimo slijedeću propoziciju.

[12] Uočimo kako $\lim_{n\to\infty} l_n(\mathcal{K} \mid \mathcal{H}) = \lim_{n\to\infty} u_n(\mathcal{K} \mid \mathcal{H})$ označava da oba limesa istovremeno konvergiraju k istom broju ili oba limesa divergiraju.

Propozicija 6.8 *Neka je $\mathcal{H}$ netrivijalna slobodna parametarska klasa. Tada su gotovo sve strukture u $\mathcal{H}$ rigidne, tj. $u(\mathrm{RIG} \mid \mathcal{H}) = 1$.*

Odatle odmah slijedi.

Korolar 6.9 *Neka je $\mathcal{H}$ netrivijalna slobodna parametarska klasa. Tada se labelirane i nelabelirane asimptotske vjerojatnosti obzirom na $\mathcal{H}$ podudaraju.*

Dokaz: Tvrdnja korolara slijedi direktno iz teorema 6.6 i propozicije 6.8. □

Tvrdnja korolara može se proširiti i na proizvoljne netrivijalne parametarske klase.

Propozicija 6.10 *Neka je $\mathcal{H}$ proizvoljna netrivijalna parametarska klasa. Tada se labelirane i nelabelirane asimptotske vjerojatnosti obzirom na $\mathcal{H}$ podudaraju.*

Kažemo da klasa $\mathcal{H}$ zadovoljava nelabelirani 0-1 zakon za skup rečenica Φ ako za sve $\varphi \in \Phi$ vrijedi:

$$u(\varphi \mid \mathcal{H}) = 1 \quad \text{ili} \quad u(\varphi \mid \mathcal{H}) = 0.$$

Kao posljedicu labeliranog 0-1 zakona za logiku $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ i logiku prvog reda na kraju dobivamo slijedeći teorem.

Teorem 6.11 *Neka je $\mathcal{H}$ netrivijalna parametarska klasa. Tada $\mathcal{H}$ zadovoljava nelabelirani 0-1 zakon za logiku $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega}$, a stoga i za logiku prvog reda.*

7 Neke posljedice

Podsjetimo se kako smo za netrivijalnu parametarsku rečenicu φ_0 s $T_{\mathrm{rand}}(\varphi_0)$ označili teoriju koja se sastoji od rečenice φ_0 i svih aksioma proširenja kompatibilnih s φ_0. Prema rezultatima iz ranije sekcije, teorija $T_{\mathrm{rand}}(\varphi_0)$ ima jedinstveno određen prebrojiv model $\mathfrak{R}(\varphi_0)$, tzv. *random* model od φ_0.

Neka je φ rečenica logike $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega}$. Istaknimo ukratko kao zaključak prethodnih sekcija ekvivalenciju slijedećih tvrdnji:

- $T_{\mathrm{rand}}(\varphi_0) \models \varphi$
- $\mathfrak{R}(\varphi_0) \models \varphi$
- $l(\varphi \mid \varphi_0) = 1$
- $u(\varphi \mid \varphi_0) = 1$.

Pogledajmo prvo kakva svojstva imaju konačni modeli netrivijalne parametarske rečenice φ_0.

Propozicija 7.1 *(a) Neka je $\mathfrak{B}$ konačni model od φ_0. Tada gotovo svi konačni modeli od φ_0 sadrže podstrukturu izomorfnu $\mathfrak{B}$.*

(b) Neka je $\mathfrak{B}$ konačni model od φ_0, te neka je $\mathfrak{A}$ podstruktura od $\mathfrak{B}$. Neka je π_0 smještenje strukture $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{R}(\varphi_0)$. Tada π_0 može biti prošireno do smještenja od $\mathfrak{B}$ u $\mathfrak{R}(\varphi_0)$.

Dokaz:

(a) Pretpostavimo da se $\mathfrak{B}$ sastoji od s elemenata, te neka je φ_0^s konjunkcija φ_0 s aksiomima r-proširenja iz $T_{\mathrm{rand}}(\varphi_0)$ za koje je $r \leq s$. Očito svaki model od φ_0^s sadrži podstrukturu izomorfnu s $\mathfrak{B}$ (jer je svaki model za φ_0^s ujedno i model za φ_0). Budući vrijedi $l(\varphi_0^s \mid \varphi_0) = 1$ (propozicija 5.8), slijedi da gotovo svi konačni modeli od φ_0 sadrže podstrukturu izomorfnu s $\mathfrak{B}$.

(b) Neka su dane strukture $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ takve da je $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, te pretpostavimo da je $|\mathfrak{A}| = \{\bar{a}\}$ [13], a $|\mathfrak{B}| = \{\bar{a}, \bar{b}\}$. Uočimo kako vrijedi $\varphi^0_{\mathfrak{A},\bar{a}} = \varphi^0_{\mathfrak{B},\bar{a}}$, pa je stoga rečenica

$$\forall \bar{v}(\varphi^0_{\mathfrak{A},\bar{a}}(\bar{v}) \rightarrow \exists \bar{w} \varphi^0_{\mathfrak{B},\bar{a}\bar{b}}(\bar{v}, \bar{w}))$$

logička posljedica aksioma proširenja iz $T_{\mathrm{rand}}(\varphi_0)$, odakle slijedi da je $\mathfrak{R}(\varphi_0)$ njen model. Budući je $\mathfrak{A} \vDash \varphi^0_{\mathfrak{A},\bar{a}}[\bar{a}]$ i $\varphi^0_{\mathfrak{A},\bar{a}}$ je otvorena formula, slijedi $\mathfrak{R}(\varphi_0) \vDash \varphi^0_{\mathfrak{A},\bar{a}}[\pi_0(\bar{a})]$ (π_0 je smještenje strukture $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{R}(\varphi_0)$, pa je ujedno i jaki homomorfizam). To znači da postoje $\bar{d}$ u $\mathfrak{R}(\varphi_0)$ takvi da je $\mathfrak{R}(\varphi_0) \vDash \varphi^0_{\mathfrak{B},\bar{a}\bar{b}}[\pi_0(\bar{a}), \bar{d}]$. Dakle, $\bar{a}\bar{b} \mapsto \pi_0(\bar{a})\bar{d}$ je traženo smještenje strukture $\mathfrak{B}$ u $\mathfrak{R}(\varphi_0)$. $\square$

Iduća propozicija govori o svojstvu random modela $\mathfrak{R}(\varphi_0)$.

Propozicija 7.2 *Ako su $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{C}$ konačne izomorfne podstrukture od $\mathfrak{R}(\varphi_0)$, tada postoji automorfizam od $\mathfrak{R}(\varphi_0)$ koji $\mathfrak{B}$ preslikava na $\mathfrak{C}$.*

Dokaz: Označimo nosač od $\mathfrak{R}(\varphi_0)$ s $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$, te neka je π izomorfizam između struktura $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{C}$. Neka je $\mathfrak{B}_0'$ konačna podstruktura od $\mathfrak{R}(\varphi_0)$ takva da je $|\mathfrak{B}_0'| = |\mathfrak{B}| \cup \{a_0\}$. Prema tvrdnji (b) prethodne propozicije postoji izomorfizam $\pi_0' : \mathfrak{B}_0' \cong \mathfrak{C}_0'$ za odgovarajuću podstrukturu $\mathfrak{C}_0' \subseteq \mathfrak{R}(\varphi_0)$ koji proširuje π. Na isti način dobivamo izomorfizam $\pi_0 : \mathfrak{B}_0 \cong \mathfrak{C}_0$ pri čemu je $\mathfrak{C}_0 \subseteq \mathfrak{R}(\varphi_0)$ takva da je $|\mathfrak{C}_0| = |\mathfrak{C}_0'| \cup \{a_0\}$, $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{R}(\varphi_0)$, pa je $\pi_0' \subseteq \pi_0$. Uočimo kako smo se ovime osigurali da

[13] U ovom paragrafu ovisno o kontekstu $\bar{x}$ označava k-torku $(x_1, \ldots, x_k)$ ili niz $x_1, \ldots, x_k$.

je $a_0 \in \mathrm{Dom}(\pi_0) \cap \mathrm{Im}(\pi_0)$. Nastavljajući opisanu konstrukciju dobivamo rastući niz izomorfizama $\pi_0 \subseteq \pi_1 \subseteq \pi_2 \subseteq \ldots$ na odgovarajućim podstrukturama sa svojstvom da je $a_i \in \mathrm{Dom}(\pi_i) \cap \mathrm{Im}(\pi_i)$. Time će onda svi elementi strukture $\mathfrak{R}(\varphi_0)$ biti obuhvaćeni u domeni i slici od $\pi := \bigcup_{i \geq 0} \pi_i$, pa je dakle π automorfizam od $\mathfrak{R}(\varphi_0)$. $\square$

8 Primjeri s grafovima

U ovoj sekciji cilj nam je pokazati kako se iz ranije dokazanih rezultata i primjenom 0-1 zakona mogu dobiti neke zanimljive tvrdnje o grafovima.

Propozicija 8.1 *Gotovo svi konačni grafovi nisu planarni.*

Dokaz: Dobro je poznata činjenica da graf ne može biti planaran ukoliko sadrži podgraf $\mathfrak{K}_5$, kliku od 5 elemenata (Kuratowski i Pontrjagin, 1930.). Budući je kliku od 5 elemenata moguće jednostavno definirati u logici prvog reda netrivijalnom parametarskom rečenicom, tvrdnja ove propozicije slijedi direktno iz tvrdnje (a) propozicije 7.1. $\square$

Propozicija 8.2 *Gotovo svi konačni grafovi nisu 3-obojivi.*

Dokaz: Dokaz je u potpunosti analogan kao i dokaz prethodne propozicije, pri čemu je prethodno potrebno uočiti kako svaki graf koji sadrži kliku od 4 elementa $\mathfrak{K}_4$ ne može biti 3-obojiv. $\square$

Označimo u daljnjem tekstu s φ_G parametarsku rečenicu koja aksiomatizira klasu grafova GRAPH. Vrijedi slijedeća propozicija.

Propozicija 8.3 *Gotovo svi konačni grafovi $\mathcal{G}$ su povezani s dijametrom $D(\mathcal{G}) := \max \{d(a,b) \mid a,b \in G\}$ koji iznosi 2.*

Dokaz: Uočimo kako smo nešto slabiju tvrdnju zapravo već dokazali u primjeru 4.2 (b), no, sada pokazujemo na koji način svojstvo iz propozicije slijedi iz prethodno obrađene teorije. Označimo s ψ rečenicu

$$\psi := \exists x \exists y \neg Exy \wedge \forall x \forall y \exists z (Exz \wedge Eyz).$$

Uočimo kako je ψ logička posljedica aksioma proširenja teorije $T_{\mathrm{rand}}(\varphi_G)$, pa su, dakle, gotovo svi konačni grafovi modeli od ψ. No, svaki graf $\mathcal{G}$ koji zadovoljava ovu rečenicu je povezan s dijametrom $D(\mathcal{G}) = 2$, pa je time tvrdnja propozicije dokazana.

Uočimo također kako rečenica ψ implicira svojstvo povezanosti, pa specijalno slijedi da su gotovo svi grafovi povezani (primjer 4.2). $\square$

Sa svojstvom rigidnosti situacija je drugačija, što pokazuje iduća propozicija.

Propozicija 8.4 *(a) Gotovo svi grafovi su rigidni.*

(b) Struktura $\mathfrak{R}(\varphi_G)$ nije rigidna.

(c) Ne postoji svojstvo gotovo svih grafova definabilno u $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ koje implicira svojstvo rigidnosti.

Dokaz:

(a) Činjenica da su gotovo svi grafovi rigidni slijedi direktno iz leme 6.4 i propozicije 6.8 (GRAPH je netrivijalna slobodna parametarska klasa).

(b) Da struktura $\mathfrak{R}(\varphi_G)$ nije rigidna vidi se kao direktna posljedica propozicije 7.2. Naime, kao strukture $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{C}$ mogu se odabrati dvije različite podstrukture od $\mathfrak{R}(\varphi_G)$ kardinaliteta 1 (one su očito izomorfne).

(c) Prisjetimo se da svako $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega}$-definabilno svojstvo kojeg zadovoljavaju gotovo svi grafovi nužno vrijedi u $\mathfrak{R}(\varphi_G)$. Obzirom da prema tvrdnji (b) struktura $\mathfrak{R}(\varphi_G)$ nije rigidna slijedi da ne može postojati svojstvo gotovo svih grafova definabilno $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega}$-rečenicom koje implicira svojstvo rigidnosti, jer bi onda moralo vrijediti da je i $\mathfrak{R}(\varphi_G)$ rigidna, što je nemoguće. □

8.1 Random grafovi

Podsjetimo se da *random* struktura $\mathfrak{R}(\varphi_G)$ zapravo predstavlja graf koji je dobiven ponavljanjem beskonačnog pokusa opisanog ranijeg u tekstu u kojem je svaki brid grafa odabran slučajno (s jednakom vjerojatnošću) bacanjem simetričnog novčića. Postavlja se pitanje što se događa ukoliko poopćimo parametre ovog slučajnog pokusa. Naime, umjesto da bridove grafa biramo s vjerojatnošću 1/2, svaki brid možemo birati s vjerojatnošću p, gdje p općenito ne mora biti fiksno zadan broj, već može varirati u ovisnosti o n. Neusmjeren graf s n vrhova kod kojeg su svi bridovi odabrani s vjerojatnošću $p(n)$ (tj. za sve vrhove i i j je $\Pr[E(i,j)] = p(n)$) nazivamo *random* grafom $G(n,p)$.

Osnovno pitanje koje se sada nameće jest možemo li za na ovaj način konstruirane *random* grafove izreći neku varijantu 0-1 zakona. Uočimo da nas pri tome zapravo zanima zadovoljavaju li *random* grafovi 0-1 zakon u ovisnosti o odabranom nizu vjerojatnosti $p(n)$.

Kažemo da niz vjerojatnosti $p(n)$ zadovoljava 0-1 zakon za logiku prvog reda ukoliko za svaku rečenicu prvog reda φ vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[G(n,p) \models \varphi] = 1 \quad \text{ili} \quad \lim_{n\to\infty} \Pr[G(n,p) \models \varphi] = 0.$$

Pokazuje se da se osnovni 0-1 zakon za logiku prvog reda za slučaj konstantne funkcije $p(n) = 1/2$ može relativno jednostavno generalizirati na slučaj proizvoljne konstantne funkcije $p(n) = p \in (0, 1)$. Znatno općenitiji (i daleko teži) rezultat dokazali su Shelah i Spencer 1988. godine ([10], [11]) kojeg iskazujemo slijedećim teoremom.

Teorem 8.5 *Neka je α iracionalan broj takav da je $0 < \alpha < 1$. Tada $p(n) = n^{-\alpha}$ zadovoljava 0-1 zakon.*

9 Rezultati za fragmente logike drugog reda

Pogledajmo sada koji se osnovni rezultati o (ne)važenju 0-1 zakona mogu dobiti za neke fragmente logike drugog reda.

9.1 Pozitivan rezultat za SO fragment $\Sigma_1^1(\exists^*\forall^*)$

Iako, kao što smo to već komentirali ranije u tekstu, svojstvo povezanosti grafa nije izrazivo u logici prvog reda, ono može biti izraženo pomoću Π_1^1-rečenice, na primjer ovako:

$$\varphi_{\text{CONN}} := \forall X(\forall x Xx \;\vee\; \forall x \neg Xx \;\vee\; \exists x \exists y(Xx \wedge \neg Xy \wedge Exy))$$

(između svake dvije netrivijalne particije skupa vrhova postoji brid).

Svojstvo nerigidnosti grafa izrazivo je pomoću primjerice:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{RIG}} := \exists X \forall x \forall y \forall u \forall v \exists z_1 \exists z_2 \exists w(& Xz_1x \wedge Xxz_2 \wedge \neg Xww \wedge \\ & ((Xxy \wedge Xuv) \rightarrow ((x = u \leftrightarrow y = v) \wedge (Exu \leftrightarrow Eyv)))).\end{aligned}$$

Ovakva rečenica spada u klasu tzv. $\Sigma_1^1(\forall^*\exists^*)$-rečenica, u kojoj se, dakle, nalaze rečenice oblika:

$$\exists X_1 \ldots \exists X_s \forall y_1 \ldots \forall y_m \exists z_1 \ldots \exists z_l \psi,$$

gdje su s, m i l iz $\mathbb{N}$, a ψ je otvorena formula.

Slično, $\Sigma_1^1(\exists^*\forall^*)$-rečenice su oblika:

$$\exists X_1 \ldots \exists X_s \exists y_1 \ldots \exists y_m \forall z_1 \ldots \forall z_l \phi,$$

gdje je ϕ otvorena formula.

Propozicija 9.1 *Neka je dana netrivijalna parametarska rečenica φ_0.*

(a) Neka je φ Π_1^1-rečenica. Ako je $\mathfrak{R}(\varphi_0) \models \varphi$, tada postoji rečenica prvog reda ψ takva da vrijedi:

$$u(\psi \mid \varphi_0) = 1 \quad i \quad \models \psi \rightarrow \varphi.$$

(b) *Neka je φ $\Sigma_1^1(\exists^*\forall^*)$-rečenica. Ako je $\mathfrak{R}(\varphi_0) \models \varphi$, tada postoji rečenica prvog reda ψ takva da vrijedi:*

$$u(\psi \mid \varphi_0) = 1 \quad i \quad \models_{fin} \psi \to \varphi.$$

Dokaz:

(a) Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{R}(\varphi_0) \models \varphi$ za Π_1^1 rečenicu $\varphi = \forall X_1 \dots \forall X_s \chi$, gdje χ ne sadrži kvantifikatore drugog reda. Pokažimo da tada skup $T_{\mathrm{rand}}(\varphi_0) \cup \{\neg\chi\}$ u kojem se nalaze $\tau \cup \{X_1, \dots, X_s\}$-rečenice nema model. Pretpostavimo li suprotno, tada bi prema Löwenheim-Skolemovom teoremu nadolje postojao prebrojiv model od $T_{\mathrm{rand}}(\varphi_0) \cup \{\neg\chi\}$ čiji bi τ-redukt bio izomorfan jedinstvenom prebrojivom modelu $\mathfrak{R}(\varphi_0)$ od $T_{\mathrm{rand}}(\varphi_0)$. No, tada bi vrijedilo $\mathfrak{R}(\varphi_0) \models \exists X_1 \dots \exists X_s \neg\chi$, što je suprotno pretpostavci $\mathfrak{R}(\varphi_0) \models \forall X_1 \dots \forall X_s \chi$.

Dakle, skup $T_{\mathrm{rand}}(\varphi_0) \cup \{\neg\chi\}$ nema model, pa prema teoremu kompaktnosti postoji konačan podskup T_0 od $T_{\mathrm{rand}}(\varphi_0)$ takav da $T_0 \cup \{\neg\chi\}$ nije ispunjiv. Označimo li s ψ konjunkciju rečenica u T_0 odmah vidimo da vrijedi $u(\psi \mid \varphi_0) = 1$. Kako $\psi \wedge \neg\chi$ nije ispunjiva, nužno vrijedi $\models \psi \to \chi$. Odatle pak slijedi $\models \psi \to \forall X_1 \dots \forall X_s \chi$, tj. $\models \psi \to \varphi$.

(b) Pretpostavimo da za $\Sigma_1^1(\exists^*\forall^*)$-rečenicu

$$\varphi = \exists X_1 \dots \exists X_s \exists \bar{x} \forall \bar{y} \chi,$$

gdje je χ otvorena formula, vrijedi $\mathfrak{R}(\varphi_0) \models \varphi$. Neka je, određenosti radi, $(\mathfrak{R}(\varphi_0), X_1, \dots, X_s) \models \exists \bar{x} \forall \bar{y} \chi$. Odaberimo $\bar{a}$ iz $|\mathfrak{R}(\varphi_0)|$ takav da je

$$(\mathfrak{R}(\varphi_0), X_1, \dots, X_s) \models \forall \bar{y} \chi[\bar{a}],$$

te označimo s $\mathfrak{A}$ podstrukturu od $\mathfrak{R}(\varphi_0)$ s nosačem $\{\bar{a}\}$. Budući je formula $\exists \bar{x} \varphi^0_{\mathfrak{A},\bar{a}}(\bar{x})$ istinita u $\mathfrak{R}(\varphi_0)$ ($\mathfrak{A} \models \varphi^0_{\mathfrak{A},\bar{a}}[\bar{a}]$), postoji ψ koji je konjunkcija φ_0 s konačno mnogo aksioma proširenja kompatibilnih s φ_0 takav da je $\models \psi \to \exists \bar{x} \varphi^0_{\mathfrak{A},\bar{a}}(\bar{x})$. Očito vrijedi $u(\psi \mid \varphi_0) = 1$, pa preostaje još pokazati da je $\models_{\mathrm{fin}} \psi \to \varphi$.

Neka je $\mathfrak{B}$ neki konačan model od ψ. Tada je na $\mathfrak{B}$ istinita formula $\exists \bar{x} \varphi^0_{\mathfrak{A},\bar{a}}(\bar{x})$, pa odaberimo $\bar{d}$ iz $|\mathfrak{B}|$ takav da je $\mathfrak{B} \models \varphi^0_{\mathfrak{A},\bar{a}}[\bar{d}]$. Tada $\bar{d} \mapsto \bar{a}$ predstavlja smještenje podstrukture od $\mathfrak{B}$ s nosačem $\{\bar{d}\}$ u $\mathfrak{R}(\varphi_0)$. Prema tvrdnji (b) propozicije 7.1 postoji proširenje π od $\bar{d} \mapsto \bar{a}$ koje je smještenje strukture $\mathfrak{B}$ u $\mathfrak{R}(\varphi_0)$. Označimo s $\mathfrak{B}'$ podstrukturu od $\mathfrak{R}(\varphi_0)$ takvu da je $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}'$. Dovoljno je pokazati da je $\mathfrak{B}'$ model za φ. Budući je $\forall \bar{y} \chi[\bar{a}]$ univerzalna formula, očuvana je za podstrukture, pa vrijedi

$$(\mathfrak{B}', X_1 \cap |\mathfrak{B}'|, \dots, X_s \cap |\mathfrak{B}'|) \models \forall \bar{y} \chi[\bar{a}].$$

Odatle slijedi $(\mathfrak{B}', X_1 \cap |\mathfrak{B}'|, \dots, X_s \cap |\mathfrak{B}'|) \models \exists \bar{x} \forall \bar{y} \chi$, pa je $\mathfrak{B}' \models \exists X_1 \dots \exists X_s \exists \bar{x} \forall \bar{y} \chi$, odnosno $\mathfrak{B}' \models \varphi$. $\square$

Uočimo kako tvrdnja (a) prethodne propozicije u stvari generalizira ranije navedenu činjenicu da je svojstvo povezanosti implicirano rečenicom prvog reda koja vrijedi u gotovo svim grafovima. Tvrdnja (b) pak pokazuje kako svojstvo nerigidnosti ne može biti izraženo $\Sigma_1^1(\exists^*\forall^*)$-rečenicom, jer bi u protivnom gotovo svi grafovi imali svojstvo nerigidnosti.

Teorem 9.2 *Neka je φ_0 netrivijalna parametarska rečenica, te neka je φ $\Sigma_1^1(\exists^*\forall^*)$-rečenica.*

(a) Ako je $\mathfrak{R}(\varphi_0) \models \varphi$, onda vrijedi $u(\varphi \mid \varphi_0) = 1$.

(b) Ako je $\mathfrak{R}(\varphi_0) \not\models \varphi$, onda vrijedi $u(\varphi \mid \varphi_0) = 0$.

Dokaz:

(a) Ako je $\mathfrak{R}(\varphi_0) \models \varphi$, tada prema tvrdnji (b) prethodne propozicije postoji rečenica prvog reda ψ takva da je $u(\psi \mid \varphi_0) = 1$ i $\models_{\text{fin}} \psi \rightarrow \varphi$. Posebno je onda $u(\varphi \mid \varphi_0) = 1$.

(b) Pretpostavimo da je $\mathfrak{R}(\varphi_0) \not\models \varphi$. Budući je $\neg\varphi$ logički ekvivalentna nekoj Π_1^1-rečenici, prema tvrdnji (a) prethodne propozicije postoji rečenica prvog reda ψ takva da je $u(\psi \mid \varphi_0) = 1$ i $\models \psi \rightarrow \neg\varphi$. Stoga vrijedi $u(\neg\varphi \mid \varphi_0) = 1$, a onda je $u(\varphi \mid \varphi_0) = 0$.

□

Kao zaključak dobivamo slijedeći korolar.

Korolar 9.3 *Logika $\Sigma_1^1(\exists^*\forall^*)$ zadovoljava labelirani i nelabelirani 0-1 zakon obzirom na netrivijalne parametarske klase.*

Napomena 9.4 *Još davne 1928. godine Bernays i Scönfinkel pokazali su da je problem zadovoljivosti za $\exists^*\forall^*$-rečenice logike prvog reda odlučiv, a upravo smo vidjeli kako $\Sigma_1^1(\exists^*\forall^*)$ logika zadovoljava 0-1 zakon. To je zapravo specijalni slučaj općenitog fenomena: Problem zadovoljivosti za prefiks klasu rečenica Φ logike prvog reda je odlučiv upravo u slučaju kada $\Sigma_1^1(\Phi) := \{\exists\bar{R}\varphi \mid \varphi \in \Phi\}$ zadovoljava 0-1 zakon.*

9.2 Neki rezultati za SO fragmente oblika $\Sigma_1^1(\Pi)$

Kvantifikatorski prefiksi (uređeni prirodnom inkluzijom) čine dobro parcijalno uređen skup ([6]). Označimo s F^+ kolekciju fragmenata logike $\Sigma_1^1(\Pi)$ određenu tipovima kvantifikatorskih prefiksa Π koji zadovoljavaju 0-1 zakon. Analogno, s F^+ označimo kolekciju fragmenata logike $\Sigma_1^1(\Pi)$ koji se ne podvrgavaju 0-1 zakonu.

Tip prefiksa Π nazivamo specijalnim ukoliko sadrži sve kvantifikatorske prefikse ili je pak predstavljen rječju alfabeta sastavljenog od simbola $\forall$,

$\exists$, $\forall^*$ i $\exists^*$. Može se pokazati da je najveći element od F^+ oblika $\Sigma^1_1(\Pi)$, za prefiks Π koji je dobiven kao unija konačne kolekcije specijalnih tipova prefiksa (točnije, maksimalnih specijalnih podtipova od Π). Odgovarajući Σ^1_1-fragmenti su onda maksimalni specijalni članovi od F^+ (Σ^1_1-fragment se naziva specijalnim ukoliko je njegov tip prefiksa specijalan).[14]

Maksimalni specijalni članovi od F^+, kao i minimalni specijalni članovi od F^- su poznati i o tome nam govori slijedeći teorem za kojeg navodimo samo iskaz.

Teorem 9.5

- *Maksimalni specijalni članovi od F^+ su $\Sigma^1_1(\exists^*\forall^*)$ i $\Sigma^1_1(\exists^*\forall\exists^*)$.*
- *Minimalni specijalni članovi od F^- su $\Sigma^1_1(\forall\exists\forall)$ i $\Sigma^1_1(\forall^2\exists)$.*

9.3 Negativan rezultat za monadsku SO logiku

Primjer 9.6 *Neka je $\mathcal{K}$ klasa τ-struktura parnog kardinaliteta. Tada vrijedi:*

$$l_n(\mathcal{K}) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ 0, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases},$$

pa stoga $l(\mathcal{K})$ ne postoji. Dakle, $l(\varphi)$ ne postoji za rečenicu drugog reda φ koja izražava "postojanje binarne relacije koja je relacija ekvivalencije i čije pripadne klase ekvivalencije sadrže po točno dva elementa".

Ovaj primjer ukazuje kako (labelirane ili nelabelirane) asimptotske vjerojatnosti za rečenice drugog reda općenito neće postojati. U ovoj sekciji nam je cilj pokazati kako asimptotske vjerojatnosti ne postoje čak niti samo za monadske Σ^1_1-rečenice, tj. za rečenice oblika

$$\exists X_1 \ldots \exists X_m \psi,$$

gdje su $X_1, \ldots, X_m$ unarne relacijske varijable, a ψ je formula prvog reda.

Lema 9.7 *Postoji formula prvog reda $\kappa(x, y, X, Y, Z, U)$, gdje su X, Y, Z, U unarne relacijske varijable, takva da za rečenicu*

$$\varphi := \exists X \exists Y \exists Z \exists U(\text{“}\kappa(\cdot,\cdot, X, Y, Z, U) \text{ tvori uređaj na nosaču”})$$

labelirana asimptotska vjerojatnost $l(\varphi \mid \varphi_0)$ iznosi 1 (pri čemu je φ_0 bilo koja netrivijalna slobodna parametarska rečenica). $\square$

[14]Sve ovo je zapravo posljedica jednog znatno općenitijeg rezultata o svrstivosti prefiks-vokabular klasa. O tome je moguće čitati u knjizi od Börgera, Grädela i Gurevicha *The Classical Decision Problem*.

Teorem 9.8 *Neka je φ_0 netrivijalna slobodna parametarska rečenica nad relacijskom signaturom τ_0. Tada postoji monadska Σ_1^1-rečenica φ nad τ_0 takva da labelirana asimptotska vjerojatnost $l(\varphi \mid \varphi_0)$ ne postoji.*

Dokaz: Neka je φ_0 netrivijalna slobodna parametarska rečenica, te $\mathcal{H}$ pripadna klasa njenih konačnih modela. Tada prema prethodnoj lemi slijedi da postoji formula prvog reda $\kappa(x, y, X, Y, Z, U)$ s unarnim relacijskim varijablama X, Y, Z, U takva da

$$\exists X \exists Y \exists Z \exists U (\text{“}\kappa(\cdot, \cdot, X, Y, Z, U) \text{ tvori uređaj na nosaču”})$$

gotovo sigurno vrijedi u $\mathcal{H}$. Definirajmo rečenicu φ (u kojoj je V unarna relacijska varijabla) na slijedeći način:

$$\begin{aligned} \varphi := \exists X \exists Y \exists Z \exists U \exists V (&\text{“}\kappa(\cdot, \cdot, X, Y, Z, U) \text{ tvori uređaj na nosaču} \\ &\text{čiji prvi element pripada } V \text{ i čiji posljednji element ne pripada } V\text{”}) \\ &\wedge\ \forall x \forall y (\text{“ako je } y\ \kappa\text{-sljedbenik od } x \text{ tada } (Vx \leftrightarrow \neg Vy)\text{”}). \end{aligned}$$

Tada je φ gotovo sigurno istinita na strukturama iz $\mathcal{H}$ parnog kardinaliteta, te je gotovo sigurno neistitnita na strukturama iz $\mathcal{H}$ neparnog kardinaliteta. Odatle slijedi da φ nema labeliranu asimptotsku vjerojatnost (podsjetimo se da je φ_0 netrivijalna, pa prema tome ima modele svih kardinaliteta). $\square$

Budući je klasa svih konačnih τ-struktura netrivijalna parametarska klasa u slučaju kada τ sadrži barem jedan binarni relacijski simbol odmah dobivamo slijedeći korolar.

Korolar 9.9 *Neka je τ signatura koja sadrži barem jedan binarni relacijski simbol. Tada postoji monadska Σ_1^1-rečenica nad signaturom τ koja nema labeliranu asimptotsku vjerojatnost.*

Literatura

[1] H. D. Ebbinghaus, J. Flum. *Finite Model Theory, second edition.* Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[2] R. Fagin. Probabilities on Finite Models. *Journal of Symbolic Logic* 41:1 (1976), 50-58.

[3] Y. V. Glebski, D. I. Kogan, M. I. Liogonky, V. A. Talanov. Range and Degree of Realizability of Formulas in the Restricted Predicate Calculus. *Kibernetika (Kiev)* 2 (1969), 17-28. Engleski prijevod u *Cybernetics* 5 (1969), 142-154.

[4] E. Grandjean. Complexity of the First-Order Theory of Almost All Structures. *Information and Control* 52 (1983), 180-204.

[5] Y. Gurevich. Zero-One Laws. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science* 51, 90-106, 1992.
http://research.microsoft.com/ gurevich/Opera/95.pdf

[6] Y. Gurevich. On the Classical Decision Problem. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, Oct. 1990, 140-150.
http://research.microsoft.com/ gurevich/Opera/91.pdf

[7] Y. Gurevich. Logic and the Challenge of Computer Science. *Current Trends in Theoretical Computer Science* (ed. E. Börger), Computer Science Press, 1988, 1-57.
http://research.microsoft.com/ gurevich/Opera/74.pdf

[8] L. Hella. *Lectures on Finite Model Theory.*
http://mtl.uta.fi/ malahe/Aix97.ps

[9] J. F. Lynch. Almost Sure Theories. *Annals of Mathematical Logic* 18 (1980), 91-135.

[10] J. Spencer. *Logic and Random Structures.*
http://cs.nyu.edu/cs/faculty/spencer/papers/ircsallsubm.pdf

[11] J. Spencer. *The Strange Logic of Random Graphs.* Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[12] J. Väänänen. *A Short Course on Finite Model Theory.*
http://www.math.helsinki.fi/logic/people/jouko.vaananen/shortcourse.pdf