Entanglement i thief-and-detectives

Matko Botinčan[1]

[1]PMF - Matematički odjel

Seminar za teorijsko računarstvo, 03. 04. 2006.

Sadržaj

1. Uvod
2. Entanglement
   - Definicije i osnovna svojstva
   - Entanglement vs. tree-width
   - Računska složenost
3. Entanglement i igre parnosti
   - Igre parnosti
   - Superdetective igra
4. Zaključak

Sadržaj

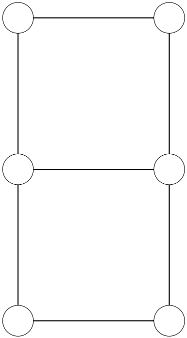
Sadržaj

Sadržaj

Pregled

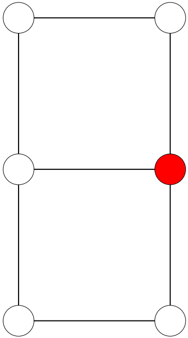
Igra robber-and-cops [1]

- Igrači: Policija (cops) i lopov (robber);
- Pozicije: (C, r);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, r_0)$, gdje $r_0 \in V$ bira robber;
- Potezi: $(C, r) \to (C', r')$
  Cops prvo biraju C', a zatim robber bira r' takav da postoji put od r do r' u $\mathcal{G} \setminus (C \cap C')$;
- Pobjednički uvjet: Cops pobjeđuju ako dostignu poziciju (C, r) za koju je $r \in C$; ako takva pozicija ne postoji pobjeđuje robber.



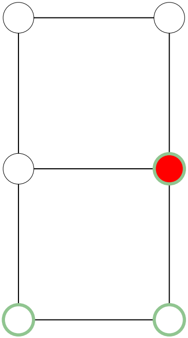
Igra robber-and-cops [1]

- Igrači: Policija (cops) i lopov (robber);
- Pozicije: (C, r);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, r_0)$, gdje $r_0 \in V$ bira robber;
- Potezi: $(C, r) \to (C', r')$
  Cops prvo biraju C', a zatim robber bira r' takav da postoji put od r do r' u $\mathcal{G} \setminus (C \cap C')$;
- Pobjednički uvjet: Cops pobjeđuju ako dostignu poziciju (C, r) za koju je $r \in C$; ako takva pozicija ne postoji pobjeđuje robber.



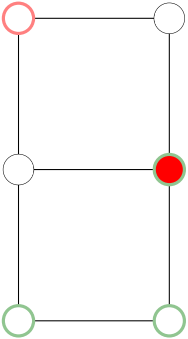
Igra robber-and-cops [1]

- Igrači: Policija (cops) i lopov (robber);
- Pozicije: (C, r);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, r_0)$, gdje $r_0 \in V$ bira robber;
- Potezi: $(C, r) \to (C', r')$
  Cops prvo biraju C', a zatim robber bira r' takav da postoji put od r do r' u $\mathcal{G} \setminus (C \cap C')$;
- Pobjednički uvjet: Cops pobjeđuju ako dostignu poziciju (C, r) za koju je $r \in C$; ako takva pozicija ne postoji pobjeđuje robber.



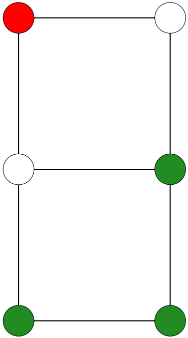
Igra robber-and-cops [1]

- Igrači: Policija (cops) i lopov (robber);
- Pozicije: (C, r);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, r_0)$, gdje $r_0 \in V$ bira robber;
- Potezi: $(C, r) \to (C', r')$
  Cops prvo biraju C', a zatim robber bira r' takav da postoji put od r do r' u $\mathcal{G} \setminus (C \cap C')$;
- Pobjednički uvjet: Cops pobjeđuju ako dostignu poziciju (C, r) za koju je $r \in C$; ako takva pozicija ne postoji pobjeđuje robber.



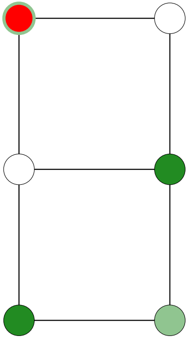
Igra robber-and-cops [1]

- Igrači: Policija (cops) i lopov (robber);
- Pozicije: (C, r);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, r_0)$, gdje $r_0 \in V$ bira robber;
- Potezi: $(C, r) \to (C', r')$
  Cops prvo biraju C', a zatim robber bira r' takav da postoji put od r do r' u $\mathcal{G} \setminus (C \cap C')$;
- Pobjednički uvjet: Cops pobjeđuju ako dostignu poziciju (C, r) za koju je $r \in C$; ako takva pozicija ne postoji pobjeđuje robber.



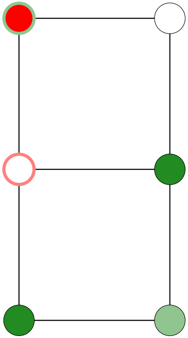
Igra robber-and-cops [1]

- Igrači: Policija (cops) i lopov (robber);
- Pozicije: (C, r);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, r_0)$, gdje $r_0 \in V$ bira robber;
- Potezi: $(C, r) \rightarrow (C', r')$
  Cops prvo biraju C', a zatim robber bira r' takav da postoji put od r do r' u $\mathcal{G} \setminus (C \cap C')$;
- Pobjednički uvjet: Cops pobjeđuju ako dostignu poziciju (C, r) za koju je $r \in C$; ako takva pozicija ne postoji pobjeđuje robber.



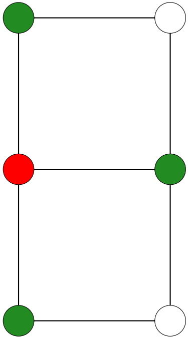
Igra robber-and-cops [1]

- Igrači: Policija (cops) i lopov (robber);
- Pozicije: (C, r);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, r_0)$, gdje $r_0 \in V$ bira robber;
- Potezi: $(C, r) \to (C', r')$
  Cops prvo biraju C', a zatim robber bira r' takav da postoji put od r do r' u $\mathcal{G} \setminus (C \cap C')$;
- Pobjednički uvjet: Cops pobjeđuju ako dostignu poziciju (C, r) za koju je $r \in C$; ako takva pozicija ne postoji pobjeđuje robber.



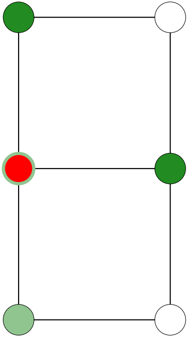
Igra robber-and-cops [1]

- Igrači: Policija (cops) i lopov (robber);
- Pozicije: (C, r);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, r_0)$, gdje $r_0 \in V$ bira robber;
- Potezi: $(C, r) \to (C', r')$
  Cops prvo biraju C', a zatim robber bira r' takav da postoji put od r do r' u $\mathcal{G} \setminus (C \cap C')$;
- Pobjednički uvjet: Cops pobjeđuju ako dostignu poziciju (C, r) za koju je $r \in C$; ako takva pozicija ne postoji pobjeđuje robber.

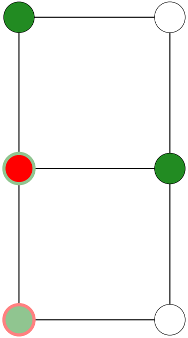


Igra robber-and-cops [1]

- Igrači: Policija (cops) i lopov (robber);
- Pozicije: (C, r);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, r_0)$, gdje $r_0 \in V$ bira robber;
- Potezi: $(C, r) \to (C', r')$
  Cops prvo biraju C', a zatim robber bira r' takav da postoji put od r do r' u $\mathcal{G} \setminus (C \cap C')$;
- Pobjednički uvjet: Cops pobjeđuju ako dostignu poziciju (C, r) za koju je $r \in C$; ako takva pozicija ne postoji pobjeđuje robber.

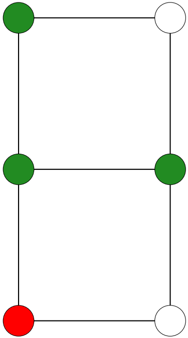


- Igrači: Policija (cops) i lopov (robber);
- Pozicije: (C, r);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, r_0)$, gdje $r_0 \in V$ bira robber;
- Potezi: $(C, r) \to (C', r')$
  Cops prvo biraju C', a zatim robber bira r' takav da postoji put od r do r' u $\mathcal{G} \setminus (C \cap C')$;
- Pobjednički uvjet: Cops pobjeđuju ako dostignu poziciju (C, r) za koju je $r \in C$; ako takva pozicija ne postoji pobjeđuje robber.



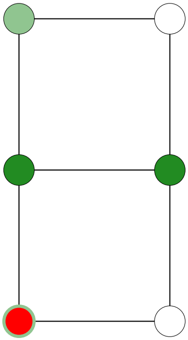
Igra robber-and-cops [1]

- Igrači: Policija (cops) i lopov (robber);
- Pozicije: (C, r);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, r_0)$, gdje $r_0 \in V$ bira robber;
- Potezi: $(C, r) \to (C', r')$
  Cops prvo biraju C', a zatim robber bira r' takav da postoji put od r do r' u $\mathcal{G} \setminus (C \cap C')$;
- Pobjednički uvjet: Cops pobjeđuju ako dostignu poziciju (C, r) za koju je $r \in C$; ako takva pozicija ne postoji pobjeđuje robber.



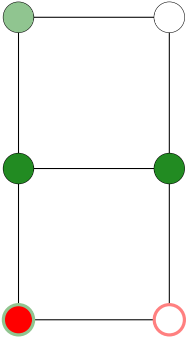
Igra robber-and-cops [1]

- Igrači: Policija (cops) i lopov (robber);
- Pozicije: (C, r);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, r_0)$, gdje $r_0 \in V$ bira robber;
- Potezi: $(C, r) \rightarrow (C', r')$
  Cops prvo biraju C', a zatim robber bira r' takav da postoji put od r do r' u $\mathcal{G} \setminus (C \cap C')$;
- Pobjednički uvjet: Cops pobjeđuju ako dostignu poziciju (C, r) za koju je $r \in C$; ako takva pozicija ne postoji pobjeđuje robber.



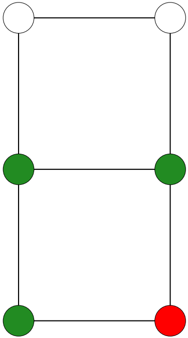
Igra robber-and-cops [1]

- Igrači: Policija (cops) i lopov (robber);
- Pozicije: (C, r);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, r_0)$, gdje $r_0 \in V$ bira robber;
- Potezi: $(C, r) \to (C', r')$
  Cops prvo biraju C', a zatim robber bira r' takav da postoji put od r do r' u $\mathcal{G} \setminus (C \cap C')$;
- Pobjednički uvjet: Cops pobjeđuju ako dostignu poziciju (C, r) za koju je $r \in C$; ako takva pozicija ne postoji pobjeđuje robber.



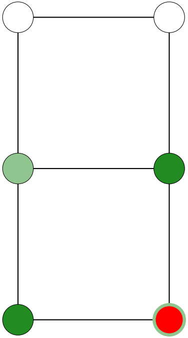
Igra robber-and-cops [1]

- Igrači: Policija (cops) i lopov (robber);
- Pozicije: (C, r);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, r_0)$, gdje $r_0 \in V$ bira robber;
- Potezi: $(C, r) \to (C', r')$
  Cops prvo biraju C', a zatim robber bira r' takav da postoji put od r do r' u $\mathcal{G} \setminus (C \cap C')$;
- Pobjednički uvjet: Cops pobjeđuju ako dostignu poziciju (C, r) za koju je $r \in C$; ako takva pozicija ne postoji pobjeđuje robber.



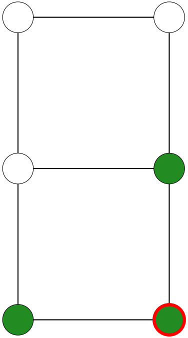
Igra robber-and-cops [1]

- Igrači: Policija (cops) i lopov (robber);
- Pozicije: (C, r);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, r_0)$, gdje $r_0 \in V$ bira robber;
- Potezi: $(C, r) \to (C', r')$
  Cops prvo biraju C', a zatim robber bira r' takav da postoji put od r do r' u $\mathcal{G} \setminus (C \cap C')$;
- Pobjednički uvjet: Cops pobjeđuju ako dostignu poziciju (C, r) za koju je $r \in C$; ako takva pozicija ne postoji pobjeđuje robber.



Igra robber-and-cops [1]

- Igrači: Policija (cops) i lopov (robber);
- Pozicije: (C, r);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, r_0)$, gdje $r_0 \in V$ bira robber;
- Potezi: $(C, r) \rightarrow (C', r')$
  Cops prvo biraju C', a zatim robber bira r' takav da postoji put od r do r' u $\mathcal{G} \setminus (C \cap C')$;
- Pobjednički uvjet: Cops pobjeđuju ako dostignu poziciju (C, r) za koju je $r \in C$; ako takva pozicija ne postoji pobjeđuje robber.



Igra robber-and-cops [2]

Teorem (Seymour, Thomas (1993.))

Graf $\mathcal{G}$ ima tree-width $\leq k$ akko $(k+1)$ policajaca ima pobjedničku strategiju u robber-and-cops igri na $\mathcal{G}$.

- Tree-dekompozicija ne uzima u obzir orijentaciju bridova
  $\rightarrow$ tree-width može biti adekvatna mjera složenosti i usmjerenih grafova za probleme koji su neosjetljivi na orijentaciju bridova
- Tree-width nije adekvatan za probleme kod kojih se orijentacija bridova uzima u obzir:
  - Egzistencija Hamiltonovog ciklusa
  - Evaluacija formula modalnih logika (npr. μ-računa)
  - Rješavanje (beskonačnih) igara na grafovima (npr. igara parnosti)

Igra robber-and-cops [2]

Teorem (Seymour, Thomas (1993.))

Graf $\mathcal{G}$ ima tree-width $\leq k$ akko $(k+1)$ policajaca ima pobjedničku strategiju u robber-and-cops igri na $\mathcal{G}$.

- Tree-dekompozicija ne uzima u obzir orijentaciju bridova $\rightarrow$ tree-width može biti adekvatna mjera složenosti i usmjerenih grafova za probleme koji su neosjetljivi na orijentaciju bridova
- Tree-width nije adekvatan za probleme kod kojih se orijentacija bridova uzima u obzir:
  - Egzistencija Hamiltonovog ciklusa
  - Evaluacija formula modalnih logika (npr. μ-računa)
  - Rješavanje (beskonačnih) igara na grafovima (npr. igara parnosti)

Igra robber-and-cops [2]

Teorem (Seymour, Thomas (1993.))

Graf $\mathcal{G}$ ima tree-width $\leq k$ akko $(k+1)$ policajaca ima pobjedničku strategiju u robber-and-cops igri na $\mathcal{G}$.

- Tree-dekompozicija ne uzima u obzir orijentaciju bridova
  $\rightarrow$ tree-width može biti adekvatna mjera složenosti i usmjerenih grafova za probleme koji su neosjetljivi na orijentaciju bridova
- Tree-width nije adekvatan za probleme kod kojih se orijentacija bridova uzima u obzir:
  - Egzistencija Hamiltonovog ciklusa
  - Evaluacija formula modalnih logika (npr. μ-računa)
  - Rješavanje (beskonačnih) igara na grafovima (npr. igara parnosti)

Mjere složenosti usmjerenih grafova

- Directed tree-width [Johnson, Robertson, Seymour, Thomas]
- Directed path-width [Barat]
- DAG-width [Berwanger, Dawar, Hunter, Kreutzer, Obdržalek]
- Entanglement [Berwanger, Grädel]

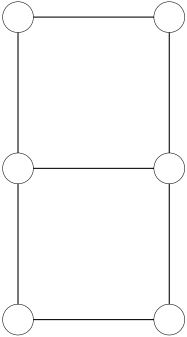
D. Berwanger, E. Grädel, Entanglement - A measure for the complexity of directed graphs with applications to logic and games. Proceedings of LPAR 2004, LNCS 3452, 209–223, Springer-Verlag, 2005.

Pregled

Pregled

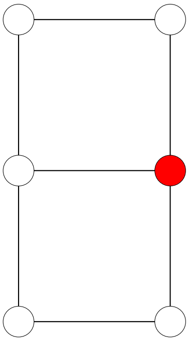
Igra thief-and-detectives

- Igrači: Detektivi (detectives) i kradljivac (thief);
- Pozicije: (D, t);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, t_0)$, gdje $t_0 \in V$ bira thief;
- Potezi: $(D, t) \to (D', t')$
  - Mogućnosti za D':
    - $D' = D$,
    - $D' = D \cup \{t\}$ (ako je $|D| < k$),
    - $D' = (D \setminus v) \cup \{t\}$, $v \in D$ (ako je $|D| = k$),
  - $t' \in tE \setminus D'$;
- Pobjednički uvjet: Detectives pobjeđuju kada thief više ne može odabrati t' t.d. $t' \in tE \setminus D'$.



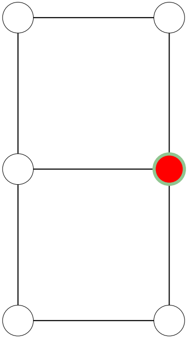
Igra thief-and-detectives

- Igrači: Detektivi (detectives) i kradljivac (thief);
- Pozicije: (D, t);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, t_0)$, gdje $t_0 \in V$ bira thief;
- Potezi: $(D, t) \to (D', t')$
  - Mogućnosti za D':
    - $D' = D$,
    - $D' = D \cup \{t\}$ (ako je $|D| < k$),
    - $D' = (D \setminus v) \cup \{t\}$, $v \in D$ (ako je $|D| = k$),
  - $t' \in tE \setminus D'$;
- Pobjednički uvjet: Detectives pobjeđuju kada thief više ne može odabrati t' t.d. $t' \in tE \setminus D'$.



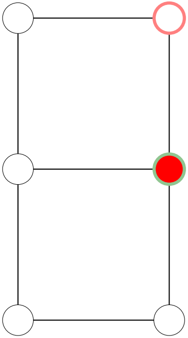
Igra thief-and-detectives

- Igrači: Detektivi (detectives) i kradljivac (thief);
- Pozicije: (D, t);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, t_0)$, gdje $t_0 \in V$ bira thief;
- Potezi: $(D, t) \to (D', t')$
  - Mogućnosti za D':
    - $D' = D$,
    - $D' = D \cup \{t\}$ (ako je $|D| < k$),
    - $D' = (D \setminus v) \cup \{t\}$, $v \in D$ (ako je $|D| = k$),
  - $t' \in tE \setminus D'$;
- Pobjednički uvjet: Detectives pobjeđuju kada thief više ne može odabrati t' t.d. $t' \in tE \setminus D'$.



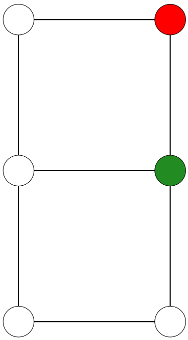
Igra thief-and-detectives

- Igrači: Detektivi (detectives) i kradljivac (thief);
- Pozicije: (D, t);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, t_0)$, gdje $t_0 \in V$ bira thief;
- Potezi: $(D, t) \to (D', t')$
  - Mogućnosti za D':
    - $D' = D$,
    - $D' = D \cup \{t\}$ (ako je $|D| < k$),
    - $D' = (D \setminus v) \cup \{t\}$, $v \in D$ (ako je $|D| = k$),
  - $t' \in tE \setminus D'$;
- Pobjednički uvjet: Detectives pobjeđuju kada thief više ne može odabrati t' t.d. $t' \in tE \setminus D'$.



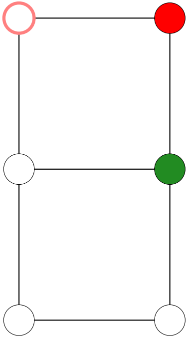
Igra thief-and-detectives

- Igrači: Detektivi (detectives) i kradljivac (thief);
- Pozicije: (D, t);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, t_0)$, gdje $t_0 \in V$ bira thief;
- Potezi: $(D, t) \to (D', t')$
  - Mogućnosti za D':
    - $D' = D$,
    - $D' = D \cup \{t\}$ (ako je $|D| < k$),
    - $D' = (D \setminus v) \cup \{t\}$, $v \in D$ (ako je $|D| = k$),
  - $t' \in tE \setminus D'$;
- Pobjednički uvjet: Detectives pobjeđuju kada thief više ne može odabrati t' t.d. $t' \in tE \setminus D'$.



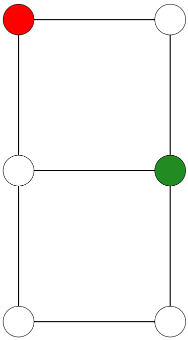
Igra thief-and-detectives

- Igrači: Detektivi (detectives) i kradljivac (thief);
- Pozicije: (D, t);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, t_0)$, gdje $t_0 \in V$ bira thief;
- Potezi: $(D, t) \to (D', t')$
  - Mogućnosti za D':
    - $D' = D$,
    - $D' = D \cup \{t\}$ (ako je $|D| < k$),
    - $D' = (D \setminus v) \cup \{t\}$, $v \in D$ (ako je $|D| = k$),
  - $t' \in tE \setminus D'$;
- Pobjednički uvjet: Detectives pobjeđuju kada thief više ne može odabrati t' t.d. $t' \in tE \setminus D'$.



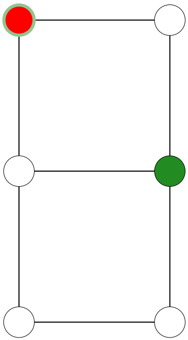
Igra thief-and-detectives

- Igrači: Detektivi (detectives) i kradljivac (thief);
- Pozicije: (D, t);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, t_0)$, gdje $t_0 \in V$ bira thief;
- Potezi: $(D, t) \to (D', t')$
  - Mogućnosti za D':
    - $D' = D$,
    - $D' = D \cup \{t\}$ (ako je $|D| < k$),
    - $D' = (D \setminus v) \cup \{t\}$, $v \in D$ (ako je $|D| = k$),
  - $t' \in tE \setminus D'$;
- Pobjednički uvjet: Detectives pobjeđuju kada thief više ne može odabrati t' t.d. $t' \in tE \setminus D'$.



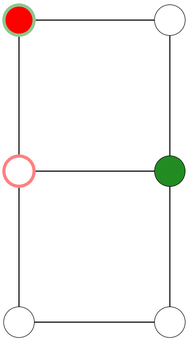
Igra thief-and-detectives

- Igrači: Detektivi (detectives) i kradljivac (thief);
- Pozicije: (D, t);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, t_0)$, gdje $t_0 \in V$ bira thief;
- Potezi: $(D, t) \to (D', t')$
  - Mogućnosti za D':
    - $D' = D$,
    - $D' = D \cup \{t\}$ (ako je $|D| < k$),
    - $D' = (D \setminus v) \cup \{t\}$, $v \in D$ (ako je $|D| = k$),
  - $t' \in tE \setminus D'$;
- Pobjednički uvjet: Detectives pobjeđuju kada thief više ne može odabrati t' t.d. $t' \in tE \setminus D'$.



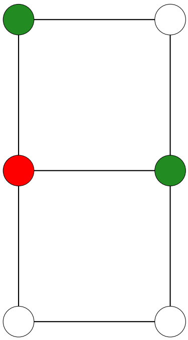
Igra thief-and-detectives

- Igrači: Detektivi (detectives) i kradljivac (thief);
- Pozicije: (D, t);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, t_0)$, gdje $t_0 \in V$ bira thief;
- Potezi: $(D, t) \to (D', t')$
  - Mogućnosti za D':
    - $D' = D$,
    - $D' = D \cup \{t\}$ (ako je $|D| < k$),
    - $D' = (D \setminus v) \cup \{t\}$, $v \in D$ (ako je $|D| = k$),
  - $t' \in tE \setminus D'$;
- Pobjednički uvjet: Detectives pobjeđuju kada thief više ne može odabrati t' t.d. $t' \in tE \setminus D'$.



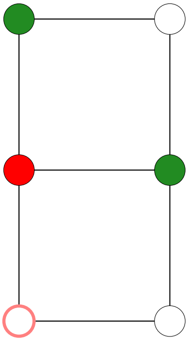
Igra thief-and-detectives

- Igrači: Detektivi (detectives) i kradljivac (thief);
- Pozicije: (D, t);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, t_0)$, gdje $t_0 \in V$ bira thief;
- Potezi: $(D, t) \to (D', t')$
  - Mogućnosti za D':
    - $D' = D$,
    - $D' = D \cup \{t\}$ (ako je $|D| < k$),
    - $D' = (D \setminus v) \cup \{t\}$, $v \in D$ (ako je $|D| = k$),
  - $t' \in tE \setminus D'$;
- Pobjednički uvjet: Detectives pobjeđuju kada thief više ne može odabrati t' t.d. $t' \in tE \setminus D'$.



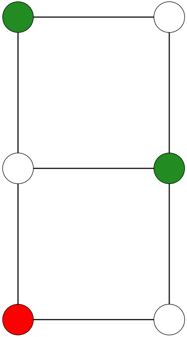
Igra thief-and-detectives

- Igrači: Detektivi (detectives) i kradljivac (thief);
- Pozicije: (D, t);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, t_0)$, gdje $t_0 \in V$ bira thief;
- Potezi: $(D, t) \to (D', t')$
  - Mogućnosti za D':
    - $D' = D$,
    - $D' = D \cup \{t\}$ (ako je $|D| < k$),
    - $D' = (D \setminus v) \cup \{t\}$, $v \in D$ (ako je $|D| = k$),
  - $t' \in tE \setminus D'$;
- Pobjednički uvjet: Detectives pobjeđuju kada thief više ne može odabrati t' t.d. $t' \in tE \setminus D'$.



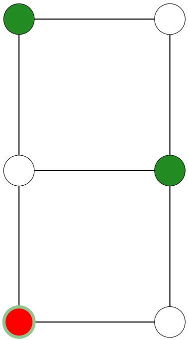
Igra thief-and-detectives

- Igrači: Detektivi (detectives) i kradljivac (thief);
- Pozicije: (D, t);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, t_0)$, gdje $t_0 \in V$ bira thief;
- Potezi: $(D, t) \to (D', t')$
  - Mogućnosti za D':
    - $D' = D$,
    - $D' = D \cup \{t\}$ (ako je $|D| < k$),
    - $D' = (D \setminus v) \cup \{t\}$, $v \in D$ (ako je $|D| = k$),
  - $t' \in tE \setminus D'$;
- Pobjednički uvjet: Detectives pobjeđuju kada thief više ne može odabrati t' t.d. $t' \in tE \setminus D'$.



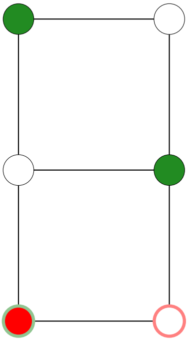
Igra thief-and-detectives

- Igrači: Detektivi (detectives) i kradljivac (thief);
- Pozicije: (D, t);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, t_0)$, gdje $t_0 \in V$ bira thief;
- Potezi: $(D, t) \to (D', t')$
  - Mogućnosti za D':
    - $D' = D$,
    - $D' = D \cup \{t\}$ (ako je $|D| < k$),
    - $D' = (D \setminus v) \cup \{t\}$, $v \in D$ (ako je $|D| = k$),
  - $t' \in tE \setminus D'$;
- Pobjednički uvjet: Detectives pobjeđuju kada thief više ne može odabrati t' t.d. $t' \in tE \setminus D'$.



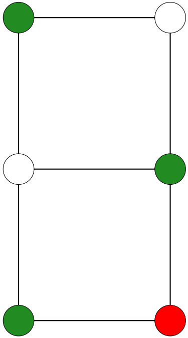
Igra thief-and-detectives

- Igrači: Detektivi (detectives) i kradljivac (thief);
- Pozicije: (D, t);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, t_0)$, gdje $t_0 \in V$ bira thief;
- Potezi: $(D, t) \to (D', t')$
  - Mogućnosti za D':
    - $D' = D$,
    - $D' = D \cup \{t\}$ (ako je $|D| < k$),
    - $D' = (D \setminus v) \cup \{t\}$, $v \in D$ (ako je $|D| = k$),
  - $t' \in tE \setminus D'$;
- Pobjednički uvjet: Detectives pobjeđuju kada thief više ne može odabrati t' t.d. $t' \in tE \setminus D'$.



Igra thief-and-detectives

- Igrači: Detektivi (detectives) i kradljivac (thief);
- Pozicije: (D, t);
- Inicijalna pozicija: $(\emptyset, t_0)$, gdje $t_0 \in V$ bira thief;
- Potezi: $(D, t) \to (D', t')$
  - Mogućnosti za D':
    - $D' = D$,
    - $D' = D \cup \{t\}$ (ako je $|D| < k$),
    - $D' = (D \setminus v) \cup \{t\}$, $v \in D$ (ako je $|D| = k$),
  - $t' \in tE \setminus D'$;
- Pobjednički uvjet: Detectives pobjeđuju kada thief više ne može odabrati t' t.d. $t' \in tE \setminus D'$.



Entanglement [1]

Definicija (entanglement)

Entanglement grafa $\mathcal{G}$ je najmanji $k \in \mathbb{N}$ za koji k detektiva imaju pobjedničku strategiju u thief-and-detectives igri na $\mathcal{G}$.

Primjeri

Entanglement [1]

Definicija (entanglement)

Entanglement grafa $\mathcal{G}$ je najmanji $k \in \mathbb{N}$ za koji k detektiva imaju pobjedničku strategiju u thief-and-detectives igri na $\mathcal{G}$.

Primjeri

Entanglement [1]

Definicija (entanglement)

Entanglement grafa $\mathcal{G}$ je najmanji $k \in \mathbb{N}$ za koji k detektiva imaju pobjedničku strategiju u thief-and-detectives igri na $\mathcal{G}$.

Primjeri

1. *Ako je $\mathcal{G}$ acikličan,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) =$

Entanglement [1]

Definicija (entanglement)

Entanglement grafa $\mathcal{G}$ je najmanji $k \in \mathbb{N}$ za koji k detektiva imaju pobjedničku strategiju u thief-and-detectives igri na $\mathcal{G}$.

Primjeri

1. *Ako je $\mathcal{G}$ acikličan,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) = 0$;

Entanglement [1]

Definicija (entanglement)

Entanglement grafa $\mathcal{G}$ je najmanji $k \in \mathbb{N}$ za koji k detektiva imaju pobjedničku strategiju u thief-and-detectives igri na $\mathcal{G}$.

Primjeri

1. *Ako je $\mathcal{G}$ acikličan,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) = 0$;
2. *Ako je $\mathcal{G}$ graf unarne funkcije,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) =$

Entanglement [1]

Definicija (entanglement)

Entanglement grafa $\mathcal{G}$ je najmanji $k \in \mathbb{N}$ za koji k detektiva imaju pobjedničku strategiju u thief-and-detectives igri na $\mathcal{G}$.

Primjeri

1. *Ako je $\mathcal{G}$ acikličan,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) = 0$;
2. *Ako je $\mathcal{G}$ graf unarne funkcije,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) = 1$;

Entanglement [1]

Definicija (entanglement)

Entanglement grafa $\mathcal{G}$ je najmanji $k \in \mathbb{N}$ za koji k detektiva imaju pobjedničku strategiju u thief-and-detectives igri na $\mathcal{G}$.

Primjeri

1. *Ako je $\mathcal{G}$ acikličan,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) = 0$;
2. *Ako je $\mathcal{G}$ graf unarne funkcije,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) = 1$;
3. *Ako je $\mathcal{G}$ neusmjereno stablo,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq$

Entanglement [1]

Definicija (entanglement)

Entanglement grafa $\mathcal{G}$ je najmanji $k \in \mathbb{N}$ za koji k detektiva imaju pobjedničku strategiju u thief-and-detectives igri na $\mathcal{G}$.

Primjeri

1. *Ako je $\mathcal{G}$ acikličan,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) = 0$;
2. *Ako je $\mathcal{G}$ graf unarne funkcije,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) = 1$;
3. *Ako je $\mathcal{G}$ neusmjereno stablo,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq 2$;

Entanglement [1]

Definicija (entanglement)

Entanglement grafa $\mathcal{G}$ je najmanji $k \in \mathbb{N}$ za koji k detektiva imaju pobjedničku strategiju u thief-and-detectives igri na $\mathcal{G}$.

Primjeri

1. *Ako je $\mathcal{G}$ acikličan,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) = 0$;
2. *Ako je $\mathcal{G}$ graf unarne funkcije,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) = 1$;
3. *Ako je $\mathcal{G}$ neusmjereno stablo,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq 2$;
4. *Ako je $\mathcal{G}$ potpuno povezan usmjeren graf s n čvorova,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) =$

Entanglement [1]

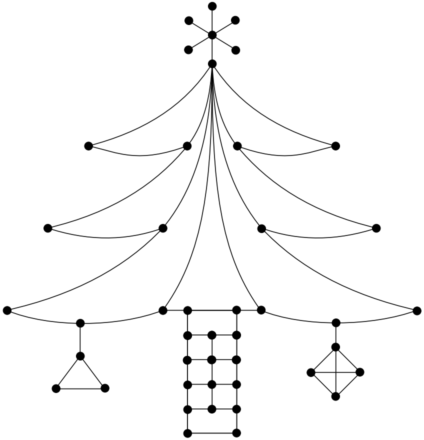
Definicija (entanglement)

Entanglement grafa $\mathcal{G}$ je najmanji $k \in \mathbb{N}$ za koji k detektiva imaju pobjedničku strategiju u thief-and-detectives igri na $\mathcal{G}$.

Primjeri

1. *Ako je $\mathcal{G}$ acikličan,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) = 0$;
2. *Ako je $\mathcal{G}$ graf unarne funkcije,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) = 1$;
3. *Ako je $\mathcal{G}$ neusmjereno stablo,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq 2$;
4. *Ako je $\mathcal{G}$ potpuno povezan usmjeren graf s n čvorova,* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) = n$;

5.) :-)



Entanglement [2]

Definicija

Asinkroni produkt grafova $\mathcal{G} = (V, E)$ *i* $\mathcal{G}' = (V', E')$ *je graf* $\mathcal{G} \times \mathcal{G}' = (V \times V', F)$, *gdje je* $F = \{(uu', vv') \mid (uEv \wedge u' = v') \vee (u'Ev' \wedge u = v)\}$.

$\mathcal{T}_{mn} := \mathcal{C}_m \times \mathcal{C}_n \ldots (m \times n)$-torus
($\mathcal{C}_n$ predstavlja usmjereni ciklus s n čvorova)

Primjer

- *Za sve* n *je* $\mathrm{ent}(\mathcal{T}_{nn}) = n$;
- *Za sve* $m \neq n$ *je* $\mathrm{ent}(\mathcal{T}_{mn}) = \min\{m, n\} + 1$.

Entanglement [2]

Definicija

Asinkroni produkt grafova $\mathcal{G} = (V, E)$ *i* $\mathcal{G}' = (V', E')$ *je graf* $\mathcal{G} \times \mathcal{G}' = (V \times V', F)$, *gdje je* $F = \{(uu', vv') \mid (uEv \wedge u' = v') \vee (u'Ev' \wedge u = v)\}$.

$\mathcal{T}_{mn} := \mathcal{C}_m \times \mathcal{C}_n \ldots (m \times n)$-torus
($\mathcal{C}_n$ predstavlja usmjereni ciklus s n čvorova)

Primjer

- *Za sve* n *je* $\mathrm{ent}(\mathcal{T}_{nn}) = n$;
- *Za sve* $m \neq n$ *je* $\mathrm{ent}(\mathcal{T}_{mn}) = \min\{m, n\} + 1$.

Entanglement [2]

Definicija

Asinkroni produkt grafova $\mathcal{G} = (V, E)$ *i* $\mathcal{G}' = (V', E')$ *je graf* $\mathcal{G} \times \mathcal{G}' = (V \times V', F)$, *gdje je*
$F = \{(uu', vv') \mid (uEv \wedge u' = v') \vee (u'Ev' \wedge u = v)\}$.

$\mathcal{T}_{mn} := \mathcal{C}_m \times \mathcal{C}_n \ \ldots \ (m \times n)$-torus
($\mathcal{C}_n$ predstavlja usmjereni ciklus s n čvorova)

Primjer

- *Za sve* n *je* $\mathrm{ent}(\mathcal{T}_{nn}) = n$;
- *Za sve* $m \neq n$ *je* $\mathrm{ent}(\mathcal{T}_{mn}) = \min\{m, n\} + 1$.

Entanglement [3]

Lema

Neka je $\mathcal{G} = (V, E)$ konačni usmjereni graf takav da za $k \in \mathbb{N}$ postoji parcijalno bojanje vrhova $i \colon V \to \{0, \ldots, k-1\}$ pod kojim svaki jako povezan podgraf $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$ sadrži vrh v čija boja je jedinstvena u $\mathcal{C}$ ($i(v) \neq i(w)$ za sve $w \in \mathcal{C}$). Tada je $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq k$.

Dokaz.

Bojanje i interpretiramo kao pozicionalnu strategiju za detektive:

- ako je $i(v)$ definirano, na v dolazi $i(v)$-ti detektiv;
- ako $i(v)$ nije definirano, detektivi ostaju na mjestu.

Entanglement [3]

Lema

Neka je $\mathcal{G} = (V, E)$ *konačni usmjereni graf takav da za* $k \in \mathbb{N}$ *postoji parcijalno bojanje vrhova* $i\colon V \to \{0, \ldots, k-1\}$ *pod kojim svaki jako povezan podgraf* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$ *sadrži vrh* v *čija boja je jedinstvena u* $\mathcal{C}$ *(*$i(v) \neq i(w)$ *za sve* $w \in \mathcal{C}$*). Tada je* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq k$.

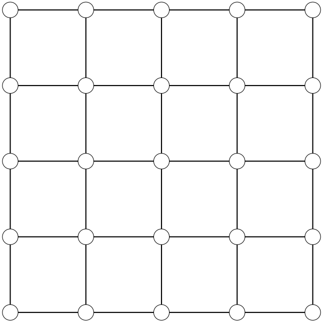
Dokaz.

Bojanje i interpretiramo kao pozicionalnu strategiju za detektive:

- ako je $i(v)$ definirano, na v dolazi $i(v)$-ti detektiv;
- ako $i(v)$ nije definirano, detektivi ostaju na mjestu.

$\square$

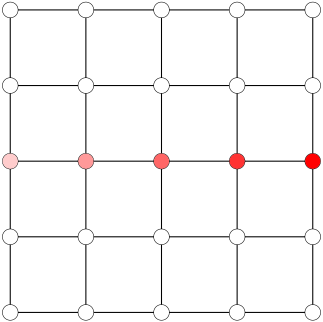
Entanglement [4]



Primjer

Za sve n, (neusmjerena) $n \times n$ mreža ima entanglement najviše $3n$.

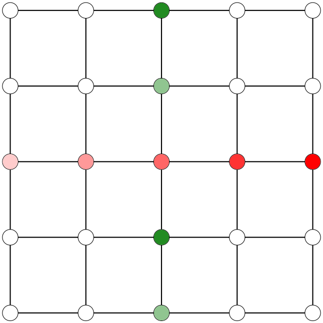
Entanglement [4]



Primjer

Za sve n, (neusmjerena) $n \times n$ mreža ima entanglement najviše $3n$.

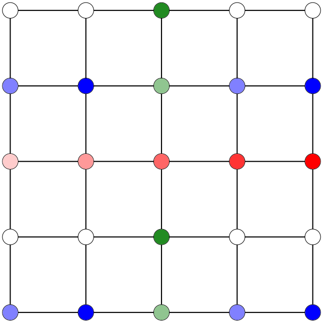
Entanglement [4]



Primjer

Za sve n, (neusmjerena) $n \times n$ mreža ima entanglement najviše $3n$.

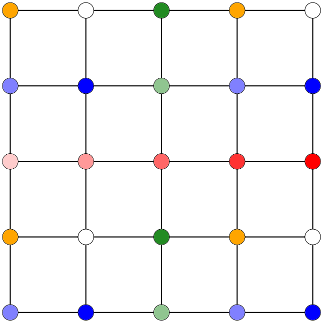
Entanglement [4]



Primjer

Za sve n, (neusmjerena) $n \times n$ mreža ima entanglement najviše $3n$.

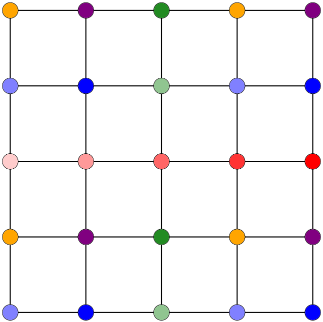
Entanglement [4]



Primjer

Za sve n, (neusmjerena) $n \times n$ mreža ima entanglement najviše $3n$.

Entanglement [4]



Primjer

Za sve n, (neusmjerena) $n \times n$ mreža ima entanglement najviše $3n$.

Pregled

Entanglement vs. tree-width

Napomena

Za aciklične grafove $\mathcal{G}$ vrijedi $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) = 0$, no, $\mathrm{tw}(\mathcal{G})$ može biti po volji velik.

Propozicija

Ako je $\mathrm{tw}(\mathcal{G}) = k$, tada vrijedi $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq (k+1) \cdot \log |\mathcal{G}|$.

Propozicija

Postoji familija grafova tree-widtha 3 i neomeđenog entanglementa.

Entanglement vs. tree-width

Napomena

Za aciklične grafove $\mathcal{G}$ *vrijedi* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) = 0$, *no,* $\mathrm{tw}(\mathcal{G})$ *može biti po volji velik.*

Propozicija

Ako je $\mathrm{tw}(\mathcal{G}) = k$, *tada vrijedi* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq (k+1) \cdot \log |\mathcal{G}|$.

Propozicija

Postoji familija grafova tree-widtha 3 i neomeđenog entanglementa.

Entanglement vs. tree-width

Napomena

Za aciklične grafove $\mathcal{G}$ *vrijedi* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) = 0$, *no,* $\mathrm{tw}(\mathcal{G})$ *može biti po volji velik.*

Propozicija

Ako je $\mathrm{tw}(\mathcal{G}) = k$, *tada vrijedi* $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq (k+1) \cdot \log |\mathcal{G}|$.

Propozicija

Postoji familija grafova tree-widtha 3 i neomeđenog entanglementa.

Pregled

Alternirajuća detekcija ciklusa

Alternirajući algoritam koji odlučuje da li je $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq k$

Ulaz: $\mathcal{G} = (V, E)$ i $k \leq |V|$
Prihvaćanje akko $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq k$

univerzalno odaberi $v \in V$;
$(d_i)_{i=1}^{k} := \bot$;
ponavljaj
  egzistencijalno odaberi $i \in \{1, \ldots, k\} \cup \{\mathrm{pass}\}$;
  ako $i \neq \mathrm{pass}$ **onda** $d_i := v$;
  ako $vE \setminus \{d_i \mid i \in \{1, \ldots, k\}\} = \emptyset$ **onda prihvati**;
  inače univerzalno odaberi $v \in vE$;

Alternirajuća detekcija ciklusa

Alternirajući algoritam koji odlučuje da li je $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq k$

Ulaz: $\mathcal{G} = (V, E)$ i $k \leq |V|$
Prihvaćanje akko $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq k$

univerzalno odaberi $v \in V$;
$(d_i)_{i=1}^{k} := \perp$;
ponavljaj
  egzistencijalno odaberi $i \in \{1, \ldots, k\} \cup \{\mathrm{pass}\}$;
  ako $i \neq \mathrm{pass}$ **onda** $d_i := v$;
  ako $vE \setminus \{d_i \mid i \in \{1, \ldots, k\}\} = \emptyset$ **onda prihvati**;
  inače univerzalno odaberi $v \in vE$;

Alternirajuća detekcija ciklusa

Alternirajući algoritam koji odlučuje da li je $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq k$

Ulaz: $\mathcal{G} = (V, E)$ i $k \leq |V|$
Prihvaćanje akko $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq k$

univerzalno odaberi $v \in V$;
$(d_i)_{i=1}^{k} := \perp$;
ponavljaj
  egzistencijalno odaberi $i \in \{1, \ldots, k\} \cup \{\mathrm{pass}\}$;
  ako $i \neq \mathrm{pass}$ **onda** $d_i := v$;
  ako $vE \setminus \{d_i \mid i \in \{1, \ldots, k\}\} = \emptyset$ **onda prihvati**;
  inače univerzalno odaberi $v \in vE$;

Računska složenost

Algoritam koristi samo prostor za spremanje v i $(d_i)_{i=1}^{k}$
$\rightarrow$ složenost: $\textsc{Aspace}((k+1)\log|V|)$
$\rightarrow$ $\mathrm{EXP}\textsc{time}$

Propozicija

Za fiksno k, problem odlučivanja da li je $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq k$ je rješiv u $\textsc{Ptime}$.

Računska složenost

Algoritam koristi samo prostor za spremanje v i $(d_i)_{i=1}^{k}$
$\longrightarrow$ složenost: $\textsc{Aspace}((k+1)\log|V|)$
$\longrightarrow$ $\mathrm{EXP}\textsc{time}$

Propozicija

Za fiksno k, problem odlučivanja da li je $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq k$ je rješiv u $\textsc{Ptime}$.

Pregled

Pregled

Igre parnosti

Igra parnosti $\mathcal{G}(V, V_0, E, \Omega)$:

- Igrač 0 igra na pozicijama $v \in V_0$, a igrač 1 na pozicijama $v \in V_1 := V \setminus V_0$
- $\Omega(v) \in \mathbb{N}$ predstavlja prioritet pozicije v
- Tijek igre: konačan ili beskonačan niz $\pi = v_0 v_1 v_2 \ldots \in V^{\leq \omega}$ t.d. $v_{i+1} \in v_i E$
- Pobjednički uvjeti:
  - konačni tijekovi igre: gubi onaj igrač koji nema što odigrati
  - beskonačni tijekovi igre:
    Igrač 0 pobjeđuje u $\pi \Leftrightarrow \min \{j \mid (\exists^\infty i)\, \Omega(v_i) = j\}$ je paran

Igre parnosti

Igra parnosti $\mathcal{G}(V, V_0, E, \Omega)$:

- Igrač 0 igra na pozicijama $v \in V_0$, a igrač 1 na pozicijama $v \in V_1 := V \setminus V_0$
- $\Omega(v) \in \mathbb{N}$ predstavlja prioritet pozicije v
- Tijek igre: konačan ili beskonačan niz $\pi = v_0 v_1 v_2 \ldots \in V^{\leq\omega}$ t.d. $v_{i+1} \in v_i E$
- Pobjednički uvjeti:
  - konačni tijekovi igre: gubi onaj igrač koji nema što odigrati
  - beskonačni tijekovi igre:
    Igrač 0 pobjeđuje u $\pi \Leftrightarrow \min\{j \mid (\exists^\infty i)\, \Omega(v_i) = j\}$ je paran

Igre parnosti

Igra parnosti $\mathcal{G}(V, V_0, E, \Omega)$:

- Igrač 0 igra na pozicijama $v \in V_0$, a igrač 1 na pozicijama $v \in V_1 := V \setminus V_0$
- $\Omega(v) \in \mathbb{N}$ predstavlja prioritet pozicije v
- Tijek igre: konačan ili beskonačan niz $\pi = v_0 v_1 v_2 \ldots \in V^{\leq\omega}$ t.d. $v_{i+1} \in v_i E$
- Pobjednički uvjeti:
  - konačni tijekovi igre: gubi onaj igrač koji nema što odigrati
  - beskonačni tijekovi igre: Igrač 0 pobjeđuje u $\pi \Leftrightarrow \min\{j \mid (\exists^\infty i)\, \Omega(v_i) = j\}$ je paran

Igre parnosti

Igra parnosti $\mathcal{G}(V, V_0, E, \Omega)$:

- Igrač 0 igra na pozicijama $v \in V_0$, a igrač 1 na pozicijama $v \in V_1 := V \setminus V_0$
- $\Omega(v) \in \mathbb{N}$ predstavlja prioritet pozicije v
- Tijek igre: konačan ili beskonačan niz $\pi = v_0 v_1 v_2 \ldots \in V^{\leq\omega}$ t.d. $v_{i+1} \in v_i E$
- Pobjednički uvjeti:
  - konačni tijekovi igre: gubi onaj igrač koji nema što odigrati
  - beskonačni tijekovi igre:
    Igrač 0 pobjeđuje u $\pi \Leftrightarrow \min\{j \mid (\exists^\infty i)\,\Omega(v_i) = j\}$ je paran

Igre parnosti

Igra parnosti $\mathcal{G}(V, V_0, E, \Omega)$:

- Igrač 0 igra na pozicijama $v \in V_0$, a igrač 1 na pozicijama $v \in V_1 := V \setminus V_0$
- $\Omega(v) \in \mathbb{N}$ predstavlja prioritet pozicije v
- Tijek igre: konačan ili beskonačan niz $\pi = v_0 v_1 v_2 \ldots \in V^{\leq \omega}$ t.d. $v_{i+1} \in v_i E$
- Pobjednički uvjeti:
  - konačni tijekovi igre: gubi onaj igrač koji nema što odigrati
  - beskonačni tijekovi igre:
    Igrač 0 pobjeđuje u $\pi \Leftrightarrow \min \{ j \mid (\exists^\infty i)\, \Omega(v_i) = j \}$ je paran

Igre parnosti

Igra parnosti $\mathcal{G}(V, V_0, E, \Omega)$:

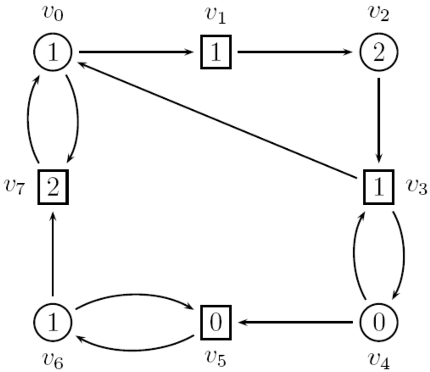
- Igrač 0 igra na pozicijama $v \in V_0$, a igrač 1 na pozicijama $v \in V_1 := V \setminus V_0$
- $\Omega(v) \in \mathbb{N}$ predstavlja prioritet pozicije v
- Tijek igre: konačan ili beskonačan niz $\pi = v_0 v_1 v_2 \ldots \in V^{\leq\omega}$ t.d. $v_{i+1} \in v_i E$
- Pobjednički uvjeti:
  - konačni tijekovi igre: gubi onaj igrač koji nema što odigrati
  - beskonačni tijekovi igre: Igrač 0 pobjeđuje u $\pi \Leftrightarrow \min\{j \mid (\exists^\infty i)\, \Omega(v_i) = j\}$ je paran

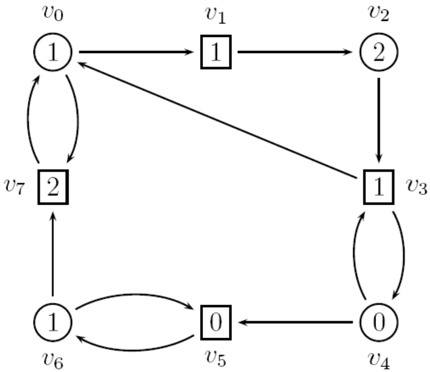
Igre parnosti

Igra parnosti $\mathcal{G}(V, V_0, E, \Omega)$:

- Igrač 0 igra na pozicijama $v \in V_0$, a igrač 1 na pozicijama $v \in V_1 := V \setminus V_0$
- $\Omega(v) \in \mathbb{N}$ predstavlja prioritet pozicije v
- Tijek igre: konačan ili beskonačan niz $\pi = v_0 v_1 v_2 \ldots \in V^{\leq\omega}$ t.d. $v_{i+1} \in v_i E$
- Pobjednički uvjeti:
  - konačni tijekovi igre: gubi onaj igrač koji nema što odigrati
  - beskonačni tijekovi igre:
    Igrač 0 pobjeđuje u $\pi \Leftrightarrow \min \{j \mid (\exists^\infty i)\, \Omega(v_i) = j\}$ je paran

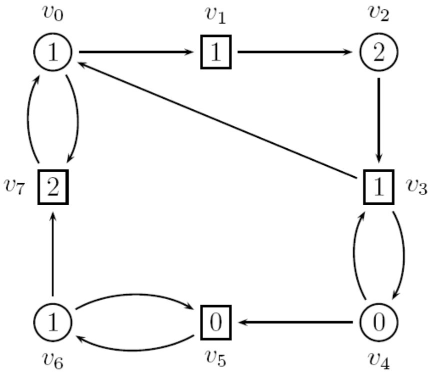
Primjer igre parnosti





Primjeri tijekova igre:

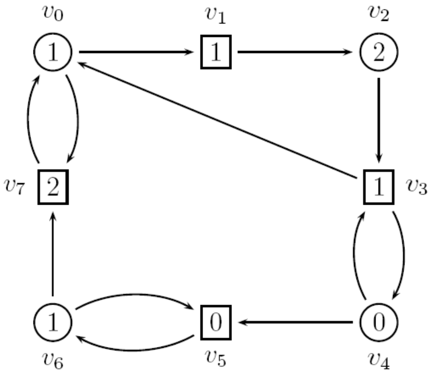
Primjer igre parnosti



Primjeri tijekova igre:

1. $\pi = v_3 v_4 (v_5 v_6)^\omega$
   $\rightarrow \Omega(\pi) = 10(01)^\omega$

Primjer igre parnosti



Primjeri tijekova igre:

1. $\pi = v_3 v_4 (v_5 v_6)^\omega$
   $\rightarrow \Omega(\pi) = 10(01)^\omega$
2. $\pi' = v_0 v_7 (v_0 v_1 v_2 v_3)^\omega$
   $\rightarrow \Omega(\pi') = 12(1121)^\omega$

Važnost igara parnosti

Rješavanje mnogih (kompliciranih) tipova (beskonačnih) igara moguće je reducirati na rješavanje igara parnosti:

- Igre koje se javljaju u verifikaciji
  (pobjednički uvjeti formulirani u temporalnim logikama (npr. LTL) ili MSO logici (S1S))
- Mullerove igre
  (igre u kojima pobjednik ovisi samo o prioritetima viđenim beskonačno često)
- Model-checking igre za logike fiksne točke (LFP, μ-račun)

Važnost igara parnosti

Rješavanje mnogih (kompliciranih) tipova (beskonačnih) igara moguće je reducirati na rješavanje igara parnosti:

- Igre koje se javljaju u verifikaciji
  (pobjednički uvjeti formulirani u temporalnim logikama (npr. LTL) ili MSO logici (S1S))
- Mullerove igre
  (igre u kojima pobjednik ovisi samo o prioritetima viđenim beskonačno često)
- Model-checking igre za logike fiksne točke (LFP, μ-račun)

Važnost igara parnosti

Rješavanje mnogih (kompliciranih) tipova (beskonačnih) igara moguće je reducirati na rješavanje igara parnosti:

- Igre koje se javljaju u verifikaciji
  (pobjednički uvjeti formulirani u temporalnim logikama (npr. LTL) ili MSO logici (S1S))
- Mullerove igre
  (igre u kojima pobjednik ovisi samo o prioritetima viđenim beskonačno često)
- Model-checking igre za logike fiksne točke (LFP, μ-račun)

Važnost igara parnosti

Rješavanje mnogih (kompliciranih) tipova (beskonačnih) igara moguće je reducirati na rješavanje igara parnosti:

- Igre koje se javljaju u verifikaciji
  (pobjednički uvjeti formulirani u temporalnim logikama (npr. LTL) ili MSO logici (S1S))
- Mullerove igre
  (igre u kojima pobjednik ovisi samo o prioritetima viđenim beskonačno često)
- Model-checking igre za logike fiksne točke (LFP, μ-račun)

Važnost igara parnosti

Rješavanje mnogih (kompliciranih) tipova (beskonačnih) igara moguće je reducirati na rješavanje igara parnosti:

- Igre koje se javljaju u verifikaciji
  (pobjednički uvjeti formulirani u temporalnim logikama (npr. LTL) ili MSO logici (S1S))
- Mullerove igre
  (igre u kojima pobjednik ovisi samo o prioritetima viđenim beskonačno često)
- Model-checking igre za logike fiksne točke (LFP, μ-račun)

Osnovno o složenosti igara parnosti

Teorem (Emerson/Jutla, Mostowski (FoCS 1991.))

Igre parnosti su determinirane, te svaki igrač ima pozicionalnu pobjedničku strategiju na svojoj pobjedničkoj regiji.

Teorem (Jurdziński (STACS 2000.))

Problem odlučivanja pobjednika u igri parnosti nalazi se u $\mathrm{UP}_{\mathrm{TIME}} \cap \mathrm{co\text{-}UP}_{\mathrm{TIME}}$.

Otvoreni problem

Da li su igre parnosti rješive u polinomnom vremenu?

Osnovno o složenosti igara parnosti

Teorem (Emerson/Jutla, Mostowski (FoCS 1991.))

Igre parnosti su determinirane, te svaki igrač ima pozicionalnu pobjedničku strategiju na svojoj pobjedničkoj regiji.

Teorem (Jurdziński (STACS 2000.))

Problem odlučivanja pobjednika u igri parnosti nalazi se u $\mathrm{UP}\textsc{time} \cap \textsc{co-}\mathrm{UP}\textsc{time}$.

Otvoreni problem

Da li su igre parnosti rješive u polinomnom vremenu?

Osnovno o složenosti igara parnosti

Teorem (Emerson/Jutla, Mostowski (FoCS 1991.))

Igre parnosti su determinirane, te svaki igrač ima pozicionalnu pobjedničku strategiju na svojoj pobjedničkoj regiji.

Teorem (Jurdziński (STACS 2000.))

Problem odlučivanja pobjednika u igri parnosti nalazi se u UPTIME $\cap$ CO-UPTIME.

Otvoreni problem

Da li su igre parnosti rješive u polinomnom vremenu?

Ipak...

Teorem (Obdržálek (CAV 2003.))

Na klasi grafova omeđenog tree-widtha igre parnosti rješive su u polinomnom vremenu.

Ovo i nije toliko začuđujuće:

Pobjedničku regiju igrača 0 u igri parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$ s $\Omega(V) = \{0, \dots, n-1\}$ možemo opisati L_μ-formulom:

$$\mu X_0 \,.\, \nu X_1 \,.\, \mu X_2 \dots \lambda X_{n-1} \,.\, \bigvee_{i<n} ((E_i \wedge \Diamond X_i) \vee (A_i \wedge \Box X_i)),$$

gdje je $E_i = \{v \mid \Omega(v) = i \text{ i igrač 0 igra s pozicije } v\}$, a $A_i = \{v \mid \Omega(v) = i \text{ i igrač 1 igra s pozicije } v\}$.

Ipak...

Teorem (Obdržálek (CAV 2003.))

Na klasi grafova omeđenog tree-widtha igre parnosti rješive su u polinomnom vremenu.

Ovo i nije toliko začuđujuće:

Pobjedničku regiju igrača 0 u igri parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$ s $\Omega(V) = \{0, \ldots, n-1\}$ možemo opisati L_μ-formulom:

$$\mu X_0 \,.\, \nu X_1 \,.\, \mu X_2 \ldots \lambda X_{n-1} \,.\, \bigvee_{i<n} \left((E_i \wedge \Diamond X_i) \vee (A_i \wedge \Box X_i) \right),$$

gdje je $E_i = \{v \mid \Omega(v) = i \text{ i igrač 0 igra s pozicije } v\}$, a $A_i = \{v \mid \Omega(v) = i \text{ i igrač 1 igra s pozicije } v\}$.

Pregled

Alternirajuće rješavanje igara parnosti

Ideja:

- potezi igrača 0 i 1 simuliraju se alternacijom;
- pamti se povijest tijeka igre kako bi se moglo detektirati dostizanje ciklusa;

Za spremanje cijele povijesti potreban je prostor $\mathcal{O}(|V|\log|V|)$
$\rightarrow$ složenost: $\textsc{Aspace}(\mathcal{O}(|V|\log|V|)) \equiv \textsc{Dtime}(|V|^{\mathcal{O}(V)})$

Problem

Ekstenzivna reprezentacija povijesti tijeka igre — zapis povijesti se analizira deterministički, ne koristeći pritom snagu alternacije.

Alternirajuće rješavanje igara parnosti

Ideja:

- potezi igrača 0 i 1 simuliraju se alternacijom;
- pamti se povijest tijeka igre kako bi se moglo detektirati dostizanje ciklusa;

Za spremanje cijele povijesti potreban je prostor $\mathcal{O}(|V|\log|V|)$
$\rightarrow$ složenost: $\textsc{Aspace}(\mathcal{O}(|V|\log|V|)) \equiv \textsc{Dtime}(|V|^{\mathcal{O}(V)})$

Problem

Ekstenzivna reprezentacija povijesti tijeka igre — zapis povijesti se analizira deterministički, ne koristeći pritom snagu alternacije.

Alternirajuće rješavanje igara parnosti

Ideja:

- potezi igrača 0 i 1 simuliraju se alternacijom;
- pamti se povijest tijeka igre kako bi se moglo detektirati dostizanje ciklusa;

Za spremanje cijele povijesti potreban je prostor $\mathcal{O}(|V|\log|V|)$
$\rightarrow$ složenost: $\textsc{Aspace}(\mathcal{O}(|V|\log|V|)) \equiv \textsc{Dtime}(|V|^{\mathcal{O}(V)})$

Problem

Ekstenzivna reprezentacija povijesti tijeka igre — zapis povijesti se analizira deterministički, ne koristeći pritom snagu alternacije.

Alternirajuće rješavanje igara parnosti

Ideja:

- potezi igrača 0 i 1 simuliraju se alternacijom;
- pamti se povijest tijeka igre kako bi se moglo detektirati dostizanje ciklusa;

Za spremanje cijele povijesti potreban je prostor $\mathcal{O}(|V| \log |V|)$
$\rightarrow$ složenost: $\textsc{Aspace}(\mathcal{O}(|V| \log |V|)) \equiv \textsc{Dtime}(|V|^{\mathcal{O}(V)})$

Problem

Ekstenzivna reprezentacija povijesti tijeka igre — zapis povijesti se analizira deterministički, ne koristeći pritom snagu alternacije.

Alternirajuće rješavanje igara parnosti

Ideja:

- potezi igrača 0 i 1 simuliraju se alternacijom;
- pamti se povijest tijeka igre kako bi se moglo detektirati dostizanje ciklusa;

Za spremanje cijele povijesti potreban je prostor $\mathcal{O}(|V| \log |V|)$
$\rightarrow$ složenost: $\textsc{Aspace}(\mathcal{O}(|V| \log |V|)) \equiv \textsc{Dtime}(|V|^{\mathcal{O}(V)})$

Problem

Ekstenzivna reprezentacija povijesti tijeka igre — zapis povijesti se analizira deterministički, ne koristeći pritom snagu alternacije.

Malo drugačiji pristup

Podsjetnik

Entanglement — mjera koliko je memorije potrebno da bi se odredilo da li *on-the-fly* stvoren put u grafu sadrži ciklus.

Drugačiji pogled na igru parnosti — tri sudionika:

- Igrači 0 i 1,
- "Sudac" koji utvrđuje koji od igrača pobjeđuje u igri.

U prethodnom pristupu, "sudac" pamti čitavu povijest tijeka igre.

Ideja: Iskoristiti činjenicu da se pojavljivanje ciklusa u *on-the-fly* stvorenom putu u grafu $\mathcal{G}$ može detektirati koristeći najviše $\mathrm{ent}(\mathcal{G})$ pozicija.

Poteškoća

Smjestiti tri igrača unutar klasičnog alternirajućeg modela izračunavanja.

Malo drugačiji pristup

Podsjetnik

Entanglement — mjera koliko je memorije potrebno da bi se odredilo da li *on-the-fly* stvoren put u grafu sadrži ciklus.

Drugačiji pogled na igru parnosti — tri sudionika:

- Igrači 0 i 1,
- "Sudac" koji utvrđuje koji od igrača pobjeđuje u igri.

U prethodnom pristupu, "sudac" pamti čitavu povijest tijeka igre.

Ideja: Iskoristiti činjenicu da se pojavljivanje ciklusa u *on-the-fly* stvorenom putu u grafu $\mathcal{G}$ može detektirati koristeći najviše $\mathrm{ent}(\mathcal{G})$ pozicija.

Poteškoća

Smjestiti tri igrača unutar klasičnog alternirajućeg modela izračunavanja.

Malo drugačiji pristup

Podsjetnik

Entanglement — mjera koliko je memorije potrebno da bi se odredilo da li *on-the-fly* stvoren put u grafu sadrži ciklus.

Drugačiji pogled na igru parnosti — tri sudionika:

- Igrači 0 i 1,
- "Sudac" koji utvrđuje koji od igrača pobjeđuje u igri.

U prethodnom pristupu, "sudac" pamti čitavu povijest tijeka igre.

Ideja: Iskoristiti činjenicu da se pojavljivanje ciklusa u *on-the-fly* stvorenom putu u grafu $\mathcal{G}$ može detektirati koristeći najviše $\mathrm{ent}(\mathcal{G})$ pozicija.

Poteškoća

Smjestiti tri igrača unutar klasičnog alternirajućeg modela izračunavanja.

Malo drugačiji pristup

Podsjetnik

Entanglement — mjera koliko je memorije potrebno da bi se odredilo da li *on-the-fly* stvoren put u grafu sadrži ciklus.

Drugačiji pogled na igru parnosti — tri sudionika:

- Igrači 0 i 1,
- "Sudac" koji utvrđuje koji od igrača pobjeđuje u igri.

U prethodnom pristupu, "sudac" pamti čitavu povijest tijeka igre.

Ideja: Iskoristiti činjenicu da se pojavljivanje ciklusa u *on-the-fly* stvorenom putu u grafu $\mathcal{G}$ može detektirati koristeći najviše $\mathrm{ent}(\mathcal{G})$ pozicija.

Poteškoća

Smjestiti tri igrača unutar klasičnog alternirajućeg modela izračunavanja.

Malo drugačiji pristup

Podsjetnik

Entanglement — mjera koliko je memorije potrebno da bi se odredilo da li *on-the-fly* stvoren put u grafu sadrži ciklus.

Drugačiji pogled na igru parnosti — tri sudionika:

- Igrači 0 i 1,
- "Sudac" koji utvrđuje koji od igrača pobjeđuje u igri.

U prethodnom pristupu, "sudac" pamti čitavu povijest tijeka igre.

Ideja: Iskoristiti činjenicu da se pojavljivanje ciklusa u *on-the-fly* stvorenom putu u grafu $\mathcal{G}$ može detektirati koristeći najviše $\mathrm{ent}(\mathcal{G})$ pozicija.

Poteškoća

Smjestiti tri igrača unutar klasičnog alternirajućeg modela izračunavanja.

Superdetective igra [1]

Za igru parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$, igrača σ i $k \leq |V|$ definiramo Superdetective igru $\mathcal{G}[\sigma, k]$:

- Superdetektiv želi pokazati, koristeći k detektiva, da igrač σ pobjeđuje u $\mathcal{G}$
- Pozicije iz V_σ pripadaju Superdetektivu, a one iz $V_{1-\sigma}$ protivniku
- Superdetektiv i protivnik igraju igru parnosti, pri čemu dodatno Superdetektiv pri svakom potezu može staviti jednog od detektiva na trenutnu poziciju
- Tijek igre završava kada se dostigne pozicija okupirana s detektivom: Superdetektiv pobjeđuje akko je paritet najmanjeg prioriteta viđenog od zadnjeg postavljanja detektiva na to mjesto jednak σ.

Superdetective igra [1]

Za igru parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$, igrača σ i $k \leq |V|$ definiramo Superdetective igru $\mathcal{G}[\sigma, k]$:

- Superdetektiv želi pokazati, koristeći k detektiva, da igrač σ pobjeđuje u $\mathcal{G}$
- Pozicije iz V_σ pripadaju Superdetektivu, a one iz $V_{1-\sigma}$ protivniku
- Superdetektiv i protivnik igraju igru parnosti, pri čemu dodatno Superdetektiv pri svakom potezu može staviti jednog od detektiva na trenutnu poziciju
- Tijek igre završava kada se dostigne pozicija okupirana s detektivom: Superdetektiv pobjeđuje akko je paritet najmanjeg prioriteta viđenog od zadnjeg postavljanja detektiva na to mjesto jednak σ.

Superdetective igra [1]

Za igru parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$, igrača σ i $k \leq |V|$ definiramo Superdetective igru $\mathcal{G}[\sigma, k]$:

- Superdetektiv želi pokazati, koristeći k detektiva, da igrač σ pobjeđuje u $\mathcal{G}$
- Pozicije iz V_σ pripadaju Superdetektivu, a one iz $V_{1-\sigma}$ protivniku
- Superdetektiv i protivnik igraju igru parnosti, pri čemu dodatno Superdetektiv pri svakom potezu može staviti jednog od detektiva na trenutnu poziciju
- Tijek igre završava kada se dostigne pozicija okupirana s detektivom: Superdetektiv pobjeđuje akko je paritet najmanjeg prioriteta viđenog od zadnjeg postavljanja detektiva na to mjesto jednak σ.

Superdetective igra [1]

Za igru parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$, igrača σ i $k \leq |V|$ definiramo Superdetective igru $\mathcal{G}[\sigma, k]$:

- Superdetektiv želi pokazati, koristeći k detektiva, da igrač σ pobjeđuje u $\mathcal{G}$
- Pozicije iz V_σ pripadaju Superdetektivu, a one iz $V_{1-\sigma}$ protivniku
- Superdetektiv i protivnik igraju igru parnosti, pri čemu dodatno Superdetektiv pri svakom potezu može staviti jednog od detektiva na trenutnu poziciju
- Tijek igre završava kada se dostigne pozicija okupirana s detektivom: Superdetektiv pobjeđuje akko je paritet najmanjeg prioriteta viđenog od zadnjeg postavljanja detektiva na to mjesto jednak σ.

Superdetective igra [1]

Za igru parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$, igrača σ i $k \leq |V|$ definiramo Superdetective igru $\mathcal{G}[\sigma, k]$:

- Superdetektiv želi pokazati, koristeći k detektiva, da igrač σ pobjeđuje u $\mathcal{G}$
- Pozicije iz V_σ pripadaju Superdetektivu, a one iz $V_{1-\sigma}$ protivniku
- Superdetektiv i protivnik igraju igru parnosti, pri čemu dodatno Superdetektiv pri svakom potezu može staviti jednog od detektiva na trenutnu poziciju
- Tijek igre završava kada se dostigne pozicija okupirana s detektivom: Superdetektiv pobjeđuje akko je paritet najmanjeg prioriteta viđenog od zadnjeg postavljanja detektiva na to mjesto jednak σ.

Superdetective igra [2]

Lema

1. *Ako igrač σ ima pobjedničku strategiju u igru parnosti $\mathcal{G}$, tada Superdetektiv pobjeđuje u Superdetective igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$ s $k = \mathrm{ent}(\mathcal{G})$.*
   (Dovoljno je uzeti $k = \mathrm{ent}(\mathcal{G}_{f_\sigma})$, gdje je $\mathcal{G}_{f_\sigma}$ podigra inducirana pozicionalnom pobjedničkom strategijom f_σ za igrača σ.)
2. *Ako za neko $k \in \mathbb{N}$, Superdetektiv pobjeđuje u igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$, tada igrač σ ima pobjedničku strategiju u igri parnosti $\mathcal{G}$.*

Napomena

Pobjednik u Superdetective igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$ može se odlučiti u $\textsc{Aspace}((2k+1)\log|V|)$.

Superdetective igra [2]

Lema

1. *Ako igrač σ ima pobjedničku strategiju u igru parnosti $\mathcal{G}$, tada Superdetektiv pobjeđuje u Superdetective igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$ s $k = \mathrm{ent}(\mathcal{G})$. (Dovoljno je uzeti $k = \mathrm{ent}(\mathcal{G}_{f_\sigma})$, gdje je $\mathcal{G}_{f_\sigma}$ podigra inducirana pozicionalnom pobjedničkom strategijom f_σ za igrača σ.)*
2. *Ako za neko $k \in \mathbb{N}$, Superdetektiv pobjeđuje u igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$, tada igrač σ ima pobjedničku strategiju u igri parnosti $\mathcal{G}$.*

Napomena

Pobjednik u Superdetective igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$ može se odlučiti u $\textsc{Aspace}((2k+1)\log|V|)$.

Superdetective igra [2]

Lema

1. *Ako igrač σ ima pobjedničku strategiju u igru parnosti $\mathcal{G}$, tada Superdetektiv pobjeđuje u Superdetective igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$ s $k = \mathrm{ent}(\mathcal{G})$. (Dovoljno je uzeti $k = \mathrm{ent}(\mathcal{G}_{f_\sigma})$, gdje je $\mathcal{G}_{f_\sigma}$ podigra inducirana pozicionalnom pobjedničkom strategijom f_σ za igrača σ.)*
2. *Ako za neko $k \in \mathbb{N}$, Superdetektiv pobjeđuje u igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$, tada igrač σ ima pobjedničku strategiju u igri parnosti $\mathcal{G}$.*

Napomena

Pobjednik u Superdetective igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$ može se odlučiti u $\textsc{Aspace}((2k+1)\log|V|)$.

Superdetective igra [2]

Lema

1. *Ako igrač σ ima pobjedničku strategiju u igru parnosti $\mathcal{G}$, tada Superdetektiv pobjeđuje u Superdetective igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$ s $k = \mathrm{ent}(\mathcal{G})$. (Dovoljno je uzeti $k = \mathrm{ent}(\mathcal{G}_{f_\sigma})$, gdje je $\mathcal{G}_{f_\sigma}$ podigra inducirana pozicionalnom pobjedničkom strategijom f_σ za igrača σ.)*
2. *Ako za neko $k \in \mathbb{N}$, Superdetektiv pobjeđuje u igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$, tada igrač σ ima pobjedničku strategiju u igri parnosti $\mathcal{G}$.*

Napomena

Pobjednik u Superdetective igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$ može se odlučiti u $\textsc{Aspace}((2k+1)\log|V|)$.

procedura Superdetective($\mathcal{G}$,v_0,σ,k)

Ulaz: igra parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$, $v_0 \in V$, igrač σ i broj detektiva k
Prihvaćanje akko Superdetektiv ima pobjedničku strategiju u igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$

$v := v_0;$ $(d_i)_{i=1}^k := \perp;$ $(h_i)_{i=1}^k := \perp;$
ponavljaj
 ako $\sigma = 0$ **onda egzistencijalno odaberi** $i \in \{1, \ldots, k\} \cup \{\mathrm{pass}\}$;
 inače univerzalno odaberi $i \in \{1, \ldots, k\} \cup \{\mathrm{pass}\}$;
 ako $i \neq \mathrm{pass}$ **onda** $d_i := v;$ $h_i := \Omega(v);$
 $v := \mathrm{Move}(\mathcal{G}, v);$
 za sve $i \in \{1, \ldots, k\}$
  $h_i := \min(h_i, \Omega(v));$
sve dok je $v = d_i$ za neko i
ako $h_i \bmod 2 = \sigma$ **onda prihvati**;
inače odbaci;

procedura Superdetective($\mathcal{G}$,v_0,σ,k)

Ulaz: igra parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$, $v_0 \in V$, igrač σ i broj detektiva k
Prihvaćanje akko Superdetektiv ima pobjedničku strategiju u igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$

$v := v_0$; $(d_i)_{i=1}^k := \perp$; $(h_i)_{i=1}^k := \perp$;
ponavljaj
  ako $\sigma = 0$ **onda egzistencijalno odaberi** $i \in \{1, \ldots, k\} \cup \{\mathrm{pass}\}$;
  inače univerzalno odaberi $i \in \{1, \ldots, k\} \cup \{\mathrm{pass}\}$;
  ako $i \neq \mathrm{pass}$ **onda** $d_i := v$; $h_i := \Omega(v)$;
  $v := \mathrm{Move}(\mathcal{G}, v)$;
  za sve $i \in \{1, \ldots, k\}$
    $h_i := \min(h_i, \Omega(v))$;
sve dok je $v = d_i$ za neko i
ako $h_i \bmod 2 = \sigma$ **onda prihvati**;
inače odbaci;

procedura Superdetective($\mathcal{G}$,v_0,σ,k)

Ulaz: igra parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$, $v_0 \in V$, igrač σ i broj detektiva k
Prihvaćanje akko Superdetektiv ima pobjedničku strategiju u igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$

$v := v_0;\qquad (d_i)_{i=1}^k := \perp;\qquad (h_i)_{i=1}^k := \perp;$
ponavljaj
  ako $\sigma = 0$ **onda egzistencijalno odaberi** $i \in \{1, \ldots, k\} \cup \{\text{pass}\}$;
  inače univerzalno odaberi $i \in \{1, \ldots, k\} \cup \{\text{pass}\}$;
  ako $i \neq \text{pass}$ **onda** $d_i := v$; $h_i := \Omega(v)$;
  $v := \text{Move}(\mathcal{G}, v)$;
  za sve $i \in \{1, \ldots, k\}$
    $h_i := \min(h_i, \Omega(v))$;
sve dok je $v = d_i$ za neko i
ako $h_i \bmod 2 = \sigma$ **onda prihvati**;
inače odbaci;

procedura Superdetective($\mathcal{G}$,v_0,σ,k)

Ulaz: igra parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$, $v_0 \in V$, igrač σ i broj detektiva k
Prihvaćanje akko Superdetektiv ima pobjedničku strategiju u igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$

$v := v_0$; $(d_i)_{i=1}^k := \perp$; $(h_i)_{i=1}^k := \perp$;
ponavljaj
  ako $\sigma = 0$ **onda egzistencijalno odaberi** $i \in \{1, \ldots, k\} \cup \{\text{pass}\}$;
  inače univerzalno odaberi $i \in \{1, \ldots, k\} \cup \{\text{pass}\}$;
  ako $i \neq \text{pass}$ **onda** $d_i := v$; $h_i := \Omega(v)$;
  $v := \text{Move}(\mathcal{G}, v)$;
  za sve $i \in \{1, \ldots, k\}$
    $h_i := \min(h_i, \Omega(v))$;
sve dok je $v = d_i$ za neko i
ako $h_i \bmod 2 = \sigma$ **onda prihvati**;
inače odbaci;

procedura Superdetective($\mathcal{G}$,v_0,σ,k)

Ulaz: igra parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$, $v_0 \in V$, igrač σ i broj detektiva k
Prihvaćanje akko Superdetektiv ima pobjedničku strategiju u igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$

$v := v_0$; $(d_i)_{i=1}^k := \perp$; $(h_i)_{i=1}^k := \perp$;
ponavljaj
  ako $\sigma = 0$ **onda egzistencijalno odaberi** $i \in \{1, \ldots, k\} \cup \{\mathrm{pass}\}$;
  inače univerzalno odaberi $i \in \{1, \ldots, k\} \cup \{\mathrm{pass}\}$;
  ako $i \neq \mathrm{pass}$ **onda** $d_i := v$; $h_i := \Omega(v)$;
  $v := \mathrm{Move}(\mathcal{G}, v)$;
  za sve $i \in \{1, \ldots, k\}$
    $h_i := \min(h_i, \Omega(v))$;
sve dok je $v = d_i$ za neko i
ako $h_i \bmod 2 = \sigma$ **onda prihvati**;
inače odbaci;

procedura Superdetective($\mathcal{G}$,v_0,σ,k)

Ulaz: igra parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$, $v_0 \in V$, igrač σ i broj detektiva k
Prihvaćanje akko Superdetektiv ima pobjedničku strategiju u igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$

$v := v_0$; $(d_i)_{i=1}^{k} := \perp$; $(h_i)_{i=1}^{k} := \perp$;
ponavljaj
  ako $\sigma = 0$ **onda egzistencijalno odaberi** $i \in \{1, \dots, k\} \cup \{\mathrm{pass}\}$;
  inače univerzalno odaberi $i \in \{1, \dots, k\} \cup \{\mathrm{pass}\}$;
  ako $i \neq \mathrm{pass}$ **onda** $d_i := v$; $h_i := \Omega(v)$;
  $v := \mathrm{Move}(\mathcal{G}, v)$;
  za sve $i \in \{1, \dots, k\}$
    $h_i := \min(h_i, \Omega(v))$;
sve dok je $v = d_i$ za neko i
ako $h_i \bmod 2 = \sigma$ **onda prihvati**;
inače odbaci;

procedura Superdetective($\mathcal{G}$,v_0,σ,k)

Ulaz: igra parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$, $v_0 \in V$, igrač σ i broj detektiva k
Prihvaćanje akko Superdetektiv ima pobjedničku strategiju u igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$

$v := v_0$; $(d_i)_{i=1}^k := \perp$; $(h_i)_{i=1}^k := \perp$;
ponavljaj
  ako $\sigma = 0$ **onda egzistencijalno odaberi** $i \in \{1, \dots, k\} \cup \{\mathrm{pass}\}$;
  inače univerzalno odaberi $i \in \{1, \dots, k\} \cup \{\mathrm{pass}\}$;
  ako $i \neq \mathrm{pass}$ **onda** $d_i := v$; $h_i := \Omega(v)$;
  $v := \mathrm{Move}(\mathcal{G}, v)$;
  za sve $i \in \{1, \dots, k\}$
    $h_i := \min(h_i, \Omega(v))$;
sve dok je $v = d_i$ za neko i
ako $h_i \bmod 2 = \sigma$ **onda prihvati**;
inače odbaci;

procedura Superdetective($\mathcal{G}$,v_0,σ,k)

Ulaz: igra parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$, $v_0 \in V$, igrač σ i broj detektiva k
Prihvaćanje akko Superdetektiv ima pobjedničku strategiju u igri $\mathcal{G}[\sigma, k]$

$v := v_0;\quad (d_i)_{i=1}^k := \perp;\quad (h_i)_{i=1}^k := \perp;$
ponavljaj
  ako $\sigma = 0$ **onda egzistencijalno odaberi** $i \in \{1, \ldots, k\} \cup \{\mathrm{pass}\}$;
  inače univerzalno odaberi $i \in \{1, \ldots, k\} \cup \{\mathrm{pass}\}$;
  ako $i \neq \mathrm{pass}$ **onda** $d_i := v$; $h_i := \Omega(v)$;
  $v := \mathrm{Move}(\mathcal{G}, v)$;
  za sve $i \in \{1, \ldots, k\}$
    $h_i := \min(h_i, \Omega(v))$;
sve dok je $v = d_i$ za neko i
ako $h_i \bmod 2 = \sigma$ **onda prihvati**;
inače odbaci;

Složenost rješavanja igara parnosti [1]

Teorem

Pobjednik igre parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$ *može se odlučiti u* $\textsc{Aspace}(\mathcal{O}(k \log |V|))$, *gdje je* k *entanglement podigre* $\mathcal{G}_{f_\sigma}$ *inducirane pozicionalnom pobjedničkom strategijom* f_σ *u* $\mathcal{G}$.

Dokaz.

Alternirajući algoritam RijesiIgruParnosti (na idućem slideu). □

Složenost rješavanja igara parnosti [1]

Teorem

Pobjednik igre parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$ može se odlučiti u $\textsc{Aspace}(\mathcal{O}(k \log |V|))$, gdje je k entanglement podigre $\mathcal{G}_{f_\sigma}$ inducirane pozicionalnom pobjedničkom strategijom f_σ u $\mathcal{G}$.

Dokaz.

Alternirajući algoritam RijesiIgruParnosti (na idućem slideu). □

Složenost rješavanja igara parnosti [2]

procedura RijesiIgruParnosti($\mathcal{G}$,v)

<u>**Ulaz**</u>: igra parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$, početna pozicija $v \in V$
<u>**Prihvaćanje**</u> akko igrač 0 pobjeđuje u igri $\mathcal{G}$

egzistencijalno odaberi $k_0 \leq |V|$;
univerzalno odaberi $k_1 \leq |V|$;
ako $k_0 \leq k_1$ **onda**
  ako Superdetective($\mathcal{G}, v, 0, k_0$) **onda prihvati**;
  inače odbaci;
inače
  ako Superdetective($\mathcal{G}, v, 1, k_1$) **onda odbaci**;
  inače prihvati;

Složenost rješavanja igara parnosti [2]

procedura RijesiIgruParnosti($\mathcal{G}$,v)

Ulaz: igra parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$, početna pozicija $v \in V$
Prihvaćanje akko igrač 0 pobjeđuje u igri $\mathcal{G}$

egzistencijalno odaberi $k_0 \leq |V|$;
univerzalno odaberi $k_1 \leq |V|$;
ako $k_0 \leq k_1$ **onda**
  ako Superdetective($\mathcal{G}, v, 0, k_0$) **onda prihvati**;
  inače odbaci;
inače
  ako Superdetective($\mathcal{G}, v, 1, k_1$) **onda odbaci**;
  inače prihvati;

Složenost rješavanja igara parnosti [2]

procedura RijesiIgruParnosti($\mathcal{G}$,v)

Ulaz: igra parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$, početna pozicija $v \in V$
Prihvaćanje akko igrač 0 pobjeđuje u igri $\mathcal{G}$

egzistencijalno odaberi $k_0 \leq |V|$;
univerzalno odaberi $k_1 \leq |V|$;
ako $k_0 \leq k_1$ **onda**
  ako Superdetective($\mathcal{G}, v, 0, k_0$) **onda prihvati**;
  inače odbaci;
inače
  ako Superdetective($\mathcal{G}, v, 1, k_1$) **onda odbaci**;
  inače prihvati;

Složenost rješavanja igara parnosti [2]

procedura RijesiIgruParnosti($\mathcal{G}$,v)

<u>**Ulaz**</u>: igra parnosti $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$, početna pozicija $v \in V$
<u>**Prihvaćanje**</u> akko igrač 0 pobjeđuje u igri $\mathcal{G}$

egzistencijalno odaberi $k_0 \leq |V|$;
univerzalno odaberi $k_1 \leq |V|$;
ako $k_0 \leq k_1$ **onda**
    ako Superdetective($\mathcal{G}, v, 0, k_0$) **onda prihvati**;
    inače odbaci;
inače
    ako Superdetective($\mathcal{G}, v, 1, k_1$) **onda odbaci**;
    inače prihvati;

Složenost rješavanja igara parnosti [3]

Korolar

Igre parnosti omeđenog entanglementa rješive su u polinomnom vremenu.

Pregled

1. Uvod
2. Entanglement
   - Definicije i osnovna svojstva
   - Entanglement vs. tree-width
   - Računska složenost
3. Entanglement i igre parnosti
   - Igre parnosti
   - Superdetective igra
4. Zaključak

Zaključak

Entanglement

- interesantna mjera složenosti konačnih usmjerenih grafova
- "prilagođena" analizi igara parnosti

Zaključak

Entanglement

- interesantna mjera složenosti konačnih usmjerenih grafova
- "prilagođena" analizi igara parnosti

Otvorena pitanja

Zaključak

Entanglement

- interesantna mjera složenosti konačnih usmjerenih grafova
- "prilagođena" analizi igara parnosti

Otvorena pitanja

- Da li je problem odlučivanja da li je $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq k$ NP-potpun?

Zaključak

Entanglement

- interesantna mjera složenosti konačnih usmjerenih grafova
- "prilagođena" analizi igara parnosti

Otvorena pitanja

- Da li je problem odlučivanja da li je $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq k$ NP-potpun?
- Koje klase (teških) problema dopuštaju polinomne algoritme na klasi grafova omeđenog entanglementa?

Zaključak

Entanglement

- interesantna mjera složenosti konačnih usmjerenih grafova
- "prilagođena" analizi igara parnosti

Otvorena pitanja

- Da li je problem odlučivanja da li je $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq k$ NP-potpun?
- Koje klase (teških) problema dopuštaju polinomne algoritme na klasi grafova omeđenog entanglementa?
- Vrijedi li neka slabija varijanta Courcelle-ovog teorema?
(direktni analogon ne vrijedi — npr: 3-obojivost na DAG-ovima)

Zaključak

Entanglement

- interesantna mjera složenosti konačnih usmjerenih grafova
- "prilagođena" analizi igara parnosti

Otvorena pitanja

- Da li je problem odlučivanja da li je $\mathrm{ent}(\mathcal{G}) \leq k$ NP-potpun?
- Koje klase (teških) problema dopuštaju polinomne algoritme na klasi grafova omeđenog entanglementa?
- Vrijedi li neka slabija varijanta Courcelle-ovog teorema? (direktni analogon ne vrijedi — npr: 3-obojivost na DAG-ovima)
- Jesu li "monotone" strategije dovoljne?